

A MOZGÁS LEÍRÁSA GYORSULÓ KOORDINÁTARENDSZERBEN, TEHETETLENSÉGI ERŐK



Honoré Daumier (francia festő 1808-1879) Benyomások és összenyomódások utazás közben („Ó irgalom, mind elvesztünk.” „Dehogy! Csak a vonat indult el ismét ... mindenki tudja, hogy ha a mozdony előre indul, az utasok hátra esnek!”) Könyv a *The Railroads* c. folyóirat 1853 évi 9. számából.

Fotó: Armand Hammer Alapítvány

14.1 Bevezetés¹

Mindenki tapasztalta már, aki gépkocsiban utazott, hogy ha az autó gyorsan kanyarodik, akkor az utas az ülésnek a kanyar külső oldala felé eső részére sodródik. Az utas számára ez a kifelé irányuló „erő” nagyon valódinak tűnik. Hasonlóképpen a hirtelen fékező autó utasai olyan hevesen vágódnak előre, hogy – hacsak nincsenek bekötve a biztonsági övvel – a műszerfalnak lökődve próbálják elhárítani az előrelökő „erő hatását”. A két említett példa egy speciális erőtípust mutat be: olyan erőt, amelynek sem fizikai forrása, sem más, tárgyi eredete nincs. Oka abban a tényben keresendő, hogy az észlelő személy gyorsuló koordinátarendszerben van. Ezeknek a jelenségeknek a megértéséhez megszokott gondolkodásunk átértékelése szükséges. De – jóllehet első hallásra ez furcsának tűnik – ha valaki képes a jobbkéz-szabályt a vektoriális szorzat esetében eredményesen alkalmazni, akkor a témakör alább következő tárgyalása egyszerűbb, mint ahogyan ez az első pillanatban látszik.

¹ Ennek a fejezetnek egy részét a szerzők átvették a *Physics – A New Introductory Course*, Science Teaching Center, M.I.T. 1965. c. munkájukból.

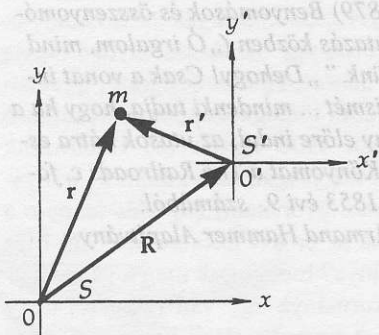
...erőt valamely más objektum, fizikai rendszer okozta. Példá erre a közelet vagy a rugót feszítő erő, a tárgyak ütközésekor fellépő erő és a gravitációs

erő. Ezeket „valódi erőknek” fogjuk nevezni, illetve ezalatt azt hogy ezek

esetében a testre ható erő okául mindig felfelfhető egy másik objektum, amitől az erőhatás származik.

A Newton törvényeket mindeddig „valódi” erőkre alkalmaztuk, s a vizsgált jelenségeket inerciarendszerben írtuk le. Inerciarendszerben szerzett ismereteink szerint nagyon elégedettek vagyunk azzal a newtoni gondolattal, hogy a testek nem képesek önmaguk gyorsítására – a testek gyorsulását külső erőknek (vagy külső erők eredőjének) kell tulajdonítani. Ha gyorsuló rendszerben tartózkodunk, akkor a gyorsuló koordinátarendszernek az alkalmazása a legmegfelelőbb. Az ilyen rendszerben azonban Newton törvényei eredeti alakjukban nem érvényesek. Ahelyett azonban, hogy elvetnénk, Newton törvényét inkább úgy módosítjuk, hogy a gyorsuló rendszerből megfigyelt jelenségek is a már jól ismert módszerrel legyenek vizsgálhatók. A módosítás abból áll, hogy Newton második törvényének erő-oldalához ún. „tehetlenségi” vagy „fiktív” erőket² adunk hozzá.

14.3 Egyenesvonalú gyorsuló koordinátarendszerek



14-1 ábra

Az S illetve az S' koordinátarendszerben lévő megfigyelő az m tömegű test helyét az \mathbf{r} illetve az \mathbf{r}' helyzetvektorral jelöli. A \mathbf{R} vektor az S' koordinátarendszer origójának az S koordinátarendszer origójához viszonyított helyzetét adja meg.

Az alábbiakban egy m tömegpont mozgását olyan jelölésrendszer segítségével írjuk le, ahogyan az két különböző vonatkoztatási rendszerből látszik.³ Tekintsünk egy inerciarendszerhez képest nyugvó S koordinátarendszert. Tegyük fel, hogy egy másik S' koordinátarendszer S -hez képest tetszőleges haladó mozgást végez. (14-1 ábra.) Az S' rendszerben végzett mérési adatainkat „vesszővel” (a „'” szimbólummal) fogjuk jelölni. (Kényelmi szempontból az S' rendszer x', y' és z' tengelyeit úgy választjuk meg, hogy azok az S rendszer megfelelő tengelyeivel párhuzamosak legyenek.) Az \mathbf{R} helyvektor az O' origó O -ra vonatkoztatott helyzetét jelöli.

Az S , illetve az S' koordinátarendszerbeli megfigyelők ugyanannak az m tömegpontnak a helyzetét az \mathbf{r} , illetve az \mathbf{r}' helyzetvektorral adják meg. Ezekre a vektorokra a vektoriális összegezés szokásos szabálya szerint fennáll:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{R}. \quad (14-1)$$

Ha mind m , mind S' mozgásban van, akkor m sebessége a két koordinátarendszerben a helyzetvektorok idő szerinti deriválásával kapható:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}'}{dt} + \frac{d\mathbf{R}}{dt} \quad (14-2)$$

ahol \mathbf{v}_R az O' origó O -hoz viszonyított sebességét jelöli. Hasonlóképpen, ha az m tömegpont gyorsul, akkor ismételt deriválással megkapjuk a gyorsulásokat:

² A tehetlenségi vagy fiktív erő más elnevezése: pseudo vagy inerciaerő.

³ Az „ahogyan egy adott vonatkoztatási rendszerben látszik” szóhasználatot nem kell betű szerint érteni. Egy vonatkoztatási rendszerben lévő test mozgásának „nézése” vagy „megfigyelése” itt annyit jelent, hogy „a testen a speciális vonatkoztatási rendszerhez viszonyított tér- és időméréseket végzünk.”

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv'}{dt} + \frac{dv_R}{dt}$$

azaz

$$a = a' + a_R \tag{14-3}$$

ahol a_R az O' középpont O -hoz viszonyított gyorsulását jelenti. A (14-3) egyenlet minden esetre érvényes általános összefüggés.

Egyenletesen (gyorsulás nélkül) mozgó rendszer

Először az S rendszerhez képest *egyenletesen* (gyorsulás- és forgásmentesen) mozgó S' rendszer speciális esetét vizsgáljuk, így $a_R = 0$. Minthogy az S inerciarendszerben érvényesek Newton törvényei, ezért ha m (valódi) külső F erő hatása alatt áll, akkor

$$S\text{-ből nézve } \sum F_{\text{valódi}} = ma. \tag{14-4}$$

(14-3) egyenletet m -mel szorozva kapjuk:

$$ma = ma' + ma_R. \tag{14-5}$$

De, mivel $a_R = 0$, azért ez $ma = ma'$ -re egyszerűsödik, vagy (14-4) miatt,

$$S'\text{-ből nézve } \sum F_{\text{valódi}} = ma' \quad (\text{Ha } S' \text{ egyenletesen halad, nem gyorsul}) \tag{14-6}$$

Tehát Newton első és második törvénye érvényes az egyenletesen, azaz gyorsulás nélkül mozgó koordináta-rendszerekben. Az összes ilyen koordináta-rendszert **inerciarendszernek**, vagy tehetetlenségi rendszernek nevezük, mert Newton első törvénye – a tehetetlenség törvénye – érvényes bennük.

Egyenletesen gyorsuló rendszerek

Tekintsük most azt az érdekesebb esetet, amikor az S' rendszer S -hez viszonyítva egyenesvonalú pályán a_R állandó gyorsulással mozog. A (14-5) egyenlet átrendezésével:

$$ma - ma_R = ma'. \tag{14-7}$$

Minthogy $\sum F_{\text{valódi}} = ma$, ezért írhatjuk:

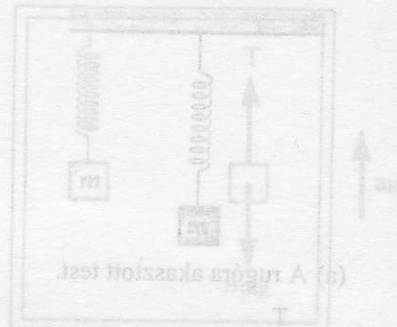
$$\sum F_{\text{valódi}} - ma_R = ma'. \tag{14-8}$$

Ez a levezetés döntő lépése. Az S' rendszerben az m tömegpontnak a' gyorsulása van. A newtoni mechanikában *egy test azért gyorsul, mert zérustól különböző eredő erő hat rá*. Newton gondolkodásmódja mélyen beivódott józan eszünkbe, és annak érdekében, hogy Newton törvényének alakját megtartsuk, kitaláljuk az $[F_{\text{valódi}} - ma_R]$ mennyiséget, mint azt, ami $\Sigma F'$ erőként az m tömegű testre hatva a testnek az S' rendszerben észlelt a' gyorsulását okozza. Ez a $\Sigma F'$ eredő erő két részből áll: A *valódi* $\Sigma F_{\text{valódi}}$ és a $-ma_R$ ún. inercia vagy tehetetlenségi erőből. Ily módon a gyorsuló S' rendszerben Newton második törvényét a következőképpen írhatjuk:

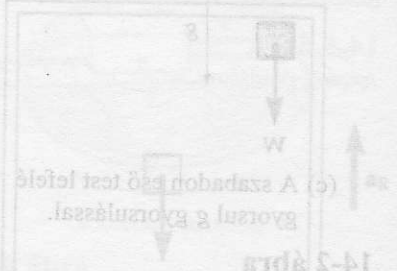
$$\text{Newton második törvénye} \quad \sum F' = ma' \tag{14-9}$$

(az a_R gyorsulással mozgó rendszerre módosított alakban) $\underbrace{\sum F_{\text{valódi}} + (-ma_R)}_{\text{(a valódi erők összege)}} = ma' \quad \underbrace{(-ma_R)}_{\text{(tehetetlenségi erő)}}$

ahol a **tehetetlenségi erőt** így definiáljuk:

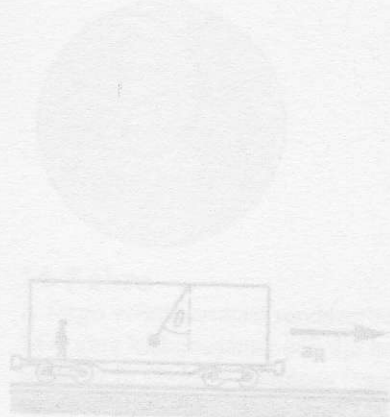


(a) A gyorsuló rendszerben (a) ügő megfigyelők az inerciarendszerben vizsgálják a gravitációs mezőben lévő testet. (b) A rugóra akasztott test vektor-ábrája.

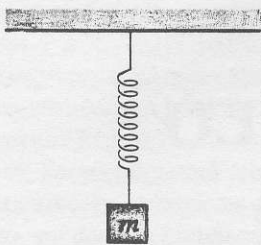


(c) A szabadon eső test lefelé gyorsul a gyorsulással.

14-3 ábra
Gravitációs mezőben mentes térrészben a gyorsulással felfelé mozgó dobhoz rögzített koordináta-rendszerre vonatkozó jelenség. Itt tehát gyorsuló koordináta-rendszeréről van szó.



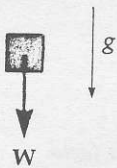
14-4 ábra
A 14-1 példához.



(a) A rugóra akasztott test.



(b) A rugóra akasztott test vektorábrája.

(c) A szabadon eső test lefelé gyorsul g gyorsulással.

14-2 ábra

Nyugvó inerciarendszerben vizsgált jelenség, g gravitációs mező jelenlétében.



14-1 ábra

Az S illetve az S' koordinátarendszerben lévő megfigyelő az m tömegű test helyét az r illetve az r' helyzetvektorral jelöli. A R vektor az S' koordinátarendszer origójának az S koordinátarendszer origójához viszonyított helyzetét adja meg.

Tehetlenségi erő

$$\mathbf{F}_{\text{tehetetl.}} = -m\mathbf{a}_R \quad (14-10)$$

(az egyenesvonalú egyenletes gyorsulással mozgó koordináta rendszerben)

A forgatónyomatékok számítása szempontjából ezt az erőt úgy tekinthetjük, mintha a tömegközéppontra hatna. A tehetlenségi erő hozzáadása nem csupán matematikai trükk. Amint majd hamarosan látni fogjuk, a gyorsuló rendszerben dolgozó megfigyelők a $-m\mathbf{a}_R$ erő jelenlétét kísérletileg igazolni tudják, még hozzá *pontosan úgy*, mint ahogyan a gravitációs erő jelenlétét igazolják.

Az előjelekre vonatkozóan külön megjegyzést kell tennünk. Az egyenletekben a negatív előjelet mindig beleértjük az $\mathbf{F}_{\text{tehetetl.}} = (-m\mathbf{a}_R)$ tehetlenségi erő definíciójába. Jegyezzük meg, hogy a tehetlenségi erő iránya a rendszer \mathbf{a}_R gyorsulásának irányával *ellentétes*. Ez az eljárás összhangban van azzal, hogy egy testre ható eredő erő a testre ható összes erő *összegével* egyenlő. Így a gyorsuló rendszerben az eredő $\Sigma\mathbf{F}'$ erő a valódi és a tehetlenségi erő $\Sigma\mathbf{F}' = \Sigma\mathbf{F}_{\text{valódi}} + \mathbf{F}_{\text{tehetetl.}}$ összege.

Vektordiagramok rajzolásakor a nyilakra soha nem teszünk negatív jelet. Az erők helyes irányát maga a diagram tünteti fel, függetlenül a koordinátarendszer választásából adódó irányok előjelétől. Így a tehetlenségi erő helyes irányaként az \mathbf{a}_R -rel *ellentétes* irányt választva, a vázlaton a vektort már csak egyszerűen nagyságával, $m\mathbf{a}_R$ -rel jelöljük.

A $(-m\mathbf{a}_R)$ erő forrásaként egyetlen fizikai rendszert vagy testet sem nevezhetünk meg. Ebben az értelemben ez az erő „fiktív”. De az S' rendszerben ülő megfigyelő számára valóban „jelen van”. Gondoljunk csak meg, miként észleljük a gravitációs erőt egy inerciarendszerben! Ha egy rugóra m tömegű testet akasztunk (lásd a 14-2a ábrát), akkor a rugó megnyúlik és egy felfelé mutató T erőt fejt ki, pontosan egyensúlyozva a W gravitációs erőt. Valójában éppen abból következtetünk a lefelé mutató gravitációs erőre, hogy a rugó megnyúlt. Ha a T erőt a W erővel kombináljuk, akkor az m tömegű testre zérus eredő erő hat, és a test nyugalomban marad. Ha a rugó eltörik, akkor a test lefelé gyorsul, ami a gravitációs erő további bizonyítéka. A $\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ összefüggést alkalmazva azt mondjuk, hogy a lefelé mutató g gyorsulást a most egymagában ható W gravitációs erő okozza: $\mathbf{W} = m\mathbf{g}$.

Tegyük fel, hogy ugyanezt a kísérletet gravitációmentes tartományban, de \mathbf{a}_R gyorsulással mozgó S' koordinátarendszerben (14-3 ábra) végezzük el. Az itteni megfigyelők észlelik a rugó megnyúlását, ami azt jelzi, hogy az m tömegű testre felfelé irányuló erő hat. De mivel a test ebben a rendszerben nyugalomban van, ezért arra következtetnek, hogy egy másik, „lefelé” mutató $-m\mathbf{a}_R$ erő is van jelen, ami a testet az S' rendszerben nyugalomban tartja. Továbbá, ha a rugó elszakad, a megfigyelők a test $-\mathbf{a}_R$ gyorsulással „lefelé” irányuló mozgását észlelik, a kiegyensúlyozatlan $-m\mathbf{a}_R$ erő következményeként.

Tehát a gyorsuló S' rendszerben lévő megfigyelők a $-m\mathbf{a}_R$ tehetlenségi erő jelenlétére *pontosan* ugyanolyan módon következtetnek, ahogyan mi a gravitációs erőre, és a tehetlenségi erő számukra ugyanolyan realitás, mint számunkra a gravitációs erő. Persze van a dolognak néhány szokatlan vonása. Szemben azzal, hogy a gravitáció oka egy közelünkben lévő tömeg (a Föld), a tehetlenségi erő okául semmilyen más testet vagy rendszert nem lehet megjelölni. Minthogy nem anyag fejt ki, nem engedelmeskedik Newton harmadik törvényének sem. *A tehetlenségi erő annak következménye, hogy a jelenséget gyorsuló rendszerben vizsgáljuk és hogy Newton második törvényének alakját meg szeretnénk tartani.* Szigorúan ragaszkodunk ahhoz a gondolathoz, hogy a testek azért gyorsulnak, mert egy kiegyensúlyozatlan (kompenzálatlan) erő hat rájuk.

A továbbiakban megoldunk néhány, egyenesvonalú gyorsuló koordinátarendszerekből megfigyelt mozgásra vonatkozó példát. A jobb érthetőség

kedvéért a példákat az S és az S' rendszerben lévő megfigyelő szempontjából párhuzamosan tárgyaljuk. A fejezet minden példájában fel fogjuk tételezni, hogy az S és az S' rendszerbeli megfigyelő tudja, melyik a „felfelé” mutató irány és, hogy mindkét rendszerben a testekre ható gravitációs erő ugyanaz a W . A kétféle leírás között a tehetetlenségi erők jelenléte vagy hiánya képezi az egyetlen különbséget.

14-1 PÉLDA

Tekintsünk egy vasúti kocsin mennyezetéről zsinóron lelógó m tömegű testet! A kocsinak állandó gyorsulása van (14-4 ábra), aminek következtében a testet felfüggesztő zsinór a függőlegessel θ szöveget alkot. Határozzuk meg ezt a szöveget a megadott mennyiségek függvényében!

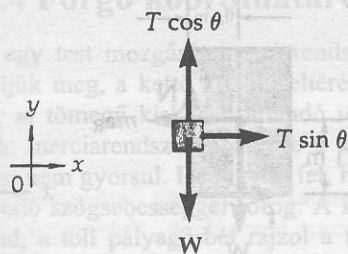
MEGOLDÁS

A feladatot a földhöz rögzített S inerciarendszer és a kocsihoz rögzített gyorsuló S' rendszer megfigyelőjének szemszögéből tárgyaljuk

S-ből megfigyelve
(Földi rendszer)



Mint ahogy a tárgy jobbfelé gyorsul, azért az erőket olyan egymásra merőleges komponensekre bontjuk, amelyek egyike a gyorsulás irányába mutat.

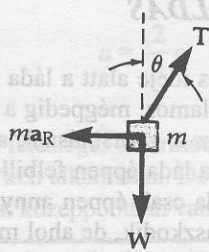


Vízszintes komponens

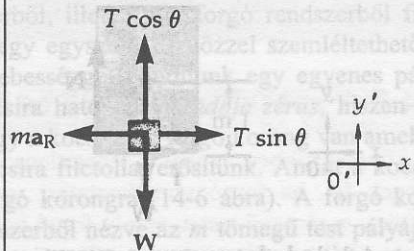
$$\sum F_x = ma_x$$

$$[T \sin \theta] = ma \quad [1]$$

S'-ből megfigyelve
(Mozgó rendszer)



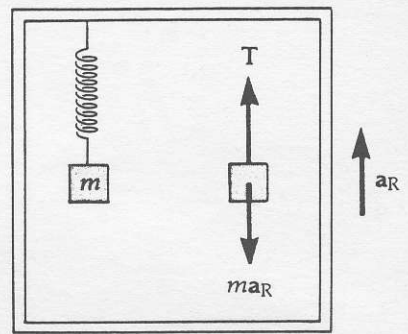
Az erőket két egymásra merőleges komponensre bontjuk. Megjegyezzük, hogy az ma_R tehetetlenségi erő *balra* mutat (mivel a kocsi *jobbra* gyorsul). A test S' -ben nyugalomban van.



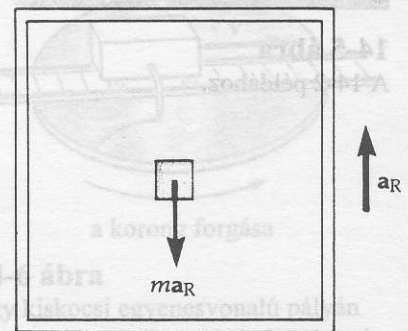
Vízszintes komponens

$$\sum F'_x = 0 \quad (\text{Egyensúly})$$

$$[T \sin \theta - ma_R] = 0 \quad [1]$$



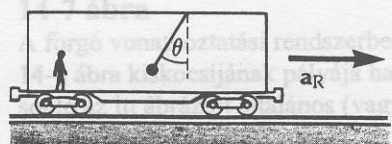
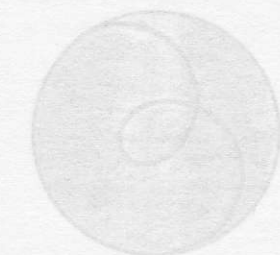
(a) A gyorsuló rendszerben ülő megfigyelők azt hiszik, hogy az m tömegű testre két, egymással egyensúlyban lévő erő hat. Így a megfigyelők magyarázatát tudják adni annak, hogy miért marad az m tömegű test az ő koordináta-rendszerükben nyugalomban.



(b) Ha a rugó elszakad, a megfigyelők látják, hogy az m tömegű test a kiegyensúlyozatlan ma_R erő hatására a doboz padlója felé gyorsul.

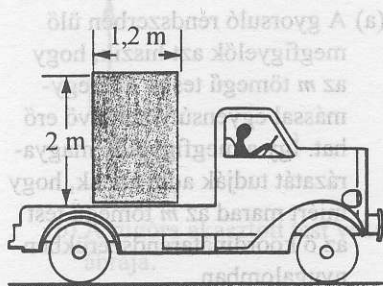
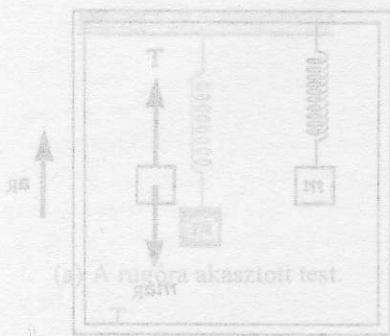
14-3 ábra

Gravitációs mezőtől mentes térrészben a_R gyorsulással felfelé mozgó dobozhoz rögzített koordináta-rendszerre vonatkozó jelenség. Itt tehát gyorsuló koordináta-rendszeréről van szó.

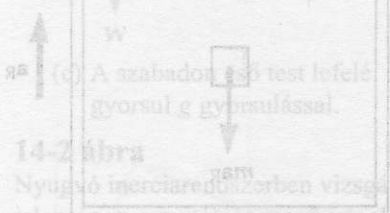


14-4 ábra

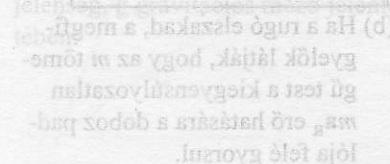
A 14-1 példához.



14-5 ábra
A 14-2 példához.



14-2 ábra



14-3 ábra
Gravitációs mezőből mentes térben
a gyorsulással felső mozgó doboz
hoz rögzített koordináta-rendszerre
vonalközös jelenség. Itt tehát gyorsuló
koordináta-rendszerből van szó.



14-4 ábra
A 14-1 példához.

Függőleges komponens

$$\sum F_y = 0 \quad (\text{Egyensúly})$$

$$[T \cos \theta] = mg \quad [2]$$

[1] -et [2]-vel osztva:

$$\frac{T \sin \theta}{T \cos \theta} = \frac{ma}{mg}$$

$$\text{tg } \theta = \frac{a}{g}$$

Függőleges komponens

$$\sum F'_y = 0 \quad (\text{Egyensúly})$$

$$[T \cos \theta] = mg \quad [2]$$

[1] -et [2]-vel osztva:

$$\frac{T \sin \theta}{T \cos \theta} = \frac{ma_R}{mg}$$

$$\text{tg } \theta = \frac{a_R}{g}$$

14-2 PÉLDA

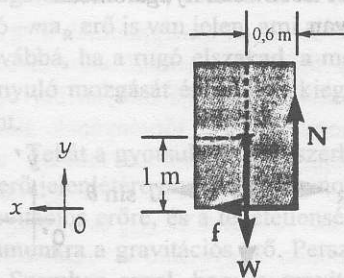
Egy 48 km/óra sebességgel haladó teherkocsin 1 × 1,2 × 2 méter méretű, 100 kg tömegű ládát szállítanak. A vezető úgy akar fékezni, hogy a kocsi a lehető leghamarabb megálljon, de a láda ne boruljon fel. A láda a kocsin a 14-5 ábrán látható módon van elhelyezve. Tömegközéppontja a geometriai középpontjában van. Feltételezve, hogy a láda nem csúszik meg, határozzuk meg azt a maximális gyorsulást, amellyel a kocsi a láda felborulásának veszélye nélkül fékezhető le!

MEGOLDÁS

A fékezés ideje alatt a láda (feltéve, hogy nem csúszik meg) felbillenésre hajlamos, mégpedig a kocsi elejéhez legközelebbi éle körül fordulva. Az a gyorsulásnak azt az értékét határozzuk meg, amelynek hatására a láda éppen felbillen. Ez ahhoz a határesethez tartozik, amikor a láda csak éppen annyira fordul el, hogy teljes súlyával az első élre támaszkodjon, de ahol még éppen forgási egyensúlyban van. Emiatt az N normális és az f súrlódási erő hatásvonala is ezen az elülső élen megy át. Megjegyezzük, hogy csúszás hiányában *nem* tételezhetjük fel, hogy a nyugalmi súrlódási erő maximális értékét veszi fel. Tehát $f_s \neq \mu_s N$.

Ahogyon S-ből látszik

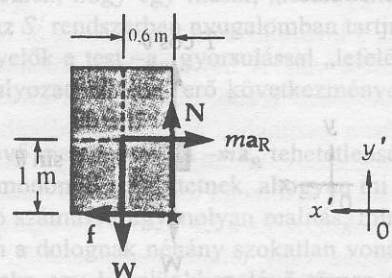
(Földi rendszer)



A láda *balra* gyorsul a gyorsulással. Forgási egyensúlyban van.

Ahogyon S'-ből látszik

(Mozgó rendszer)



A láda haladási és forgási egyensúlyban van. Minthogy S' balra gyorsul, azért a $(-ma_R)$ tehetetlenségi erőt jobbra irányítjuk.

Vízszintes komponens

$$\sum F_x = ma_x$$

$$f = ma \quad [1]$$

Vízszintes komponens

$$\sum F'_x = 0 \quad (\text{egyensúly})$$

$$f = ma_R \quad [1]$$

Függőleges komponens

$$\sum F_y = 0 \quad (\text{egyensúly})$$

$$N = mg \quad [2]$$

Forgási egyensúly

Mint hogy a test gyorsulva halad, a forgatónyomatékokat *csak* a tömegközéppontra⁴ (TKP) kell felírni.

$$\sum \mathbf{M} = 0 \quad (\text{Forgási egyensúly})$$

(tömegkp-ra)

Óramutató járásával megegyező irányú forgatónyomatékok = Óramutató járásával ellentétes irányú forgatónyomatékok.

$$f(1 \text{ m}) = N(0,6 \text{ m}) \quad [3]$$

[1]-et és [2]-t [3]-ba helyettesítve:

$$ma(1 \text{ m}) = mg(0,6 \text{ m}) \quad ma(1 \text{ m}) = mg(0,6 \text{ m}) \quad [3]$$

$$a = \frac{2}{3}g \quad a = \frac{2}{3}g$$

Megjegyzés: A láda tömegének megadása felesleges információ. A láda tömegétől függetlenül ugyanazt a fékezést kell alkalmazni. De az fontos, hogy a láda tömegközéppontja a geometriai középpontban van.

Függőleges komponens

$$\sum F'_y = 0 \quad (\text{egyensúly})$$

$$N = mg \quad [2]$$

Forgási egyensúly

Mint hogy ebben a rendszerben a láda mind haladási, mind forgási egyensúlyban van, ezért a forgatónyomatékokat *tetszőleges tengelyre* számíthatjuk. Az egyik ismeretlen kiküszöbölésére az első élt választjuk tengelynek.

$$\sum \mathbf{M}' = 0 \quad (\text{Forgási egyensúly})$$

(első élre)

Óramutató járásával megegyező irányú forgatónyomatékok = Óramutató járásával ellentétes irányú forgatónyomatékok.

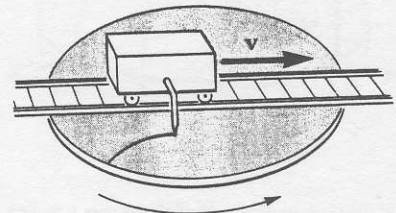
A továbbiakban forgó koordinátarendszerekkel foglalkozunk. Tárgyalásunkban állandó szögsebességgel forgó (szöggyorsulás-mentes) rendszerekre szorítkozunk. De a forgás állandó szögsebessége ellenére a centripetális gyorsulás következtében az ilyen koordinátarendszer mégis *gyorsuló*.

14.4 Forgó koordinátarendszerek

Ha egy test mozgását inerciarendszerből, illetve egy forgó rendszerből figyeljük meg, a kettő közötti eltérés egy egyszerű eszközzel szemléltethető. Egy *m* tömegű kiskocsit állandó *v* sebességgel elindítunk egy egyenes pályán. Inerciarendszerből nézve a kocsira ható *erők eredője zérus*, hiszen a kocsi nem gyorsul. De tegyük fel, hogy a kocsi alatt forgó korong van amely állandó szögsebességgel forog. A kocsira filctollat erősítünk. Amint a kocsi halad, a toll pályagörbét rajzol a forgó korongra (14-6 ábra). A forgó koronghoz rögzített vonatkoztatási rendszerből nézve az *m* tömegű test pályája (ahogyan a filctoll felrajzolja) a 14-7 ábrán látható valamelyik görbéhez hasonló. A görbevonalú pálya miatt a forgó vonatkoztatási rendszerben lévő

14-9 ábra

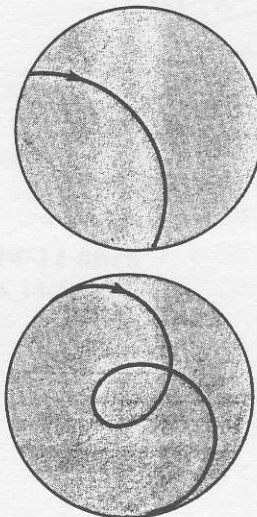
Forgó korongra erősített állványon zsinórra kötött labda lóg.



a korong forgása

14-6 ábra

Egy kiskocsi egyenesvonalú pályán állandó *v* sebességgel halad. A kocsira erősített író toll a kocsi pályáját a forgó korongra rajzolja.



14-7 ábra

A forgó vonatkoztatási rendszerben a 14-6 ábra kiskocsijának pályája hasonló az itt ábrázolt általános (vagy ezeknél bonyolultabb) görbéek egyikehez, a forgó korong szögsebességétől függően.

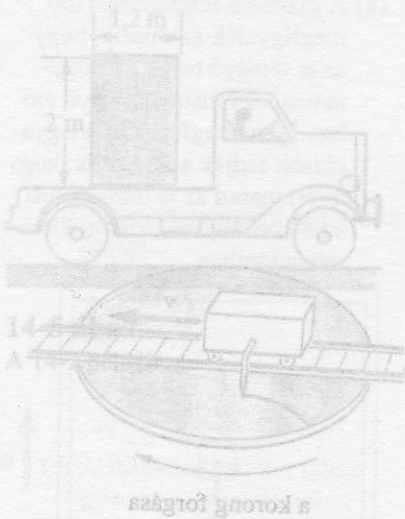
⁴ Felidézzük a 10.6 fejezetből, hogy forgatónyomaték számításához (a forgó mozgás alap-egyenletével való felírásához) csak akkor választhatunk szabadon bármilyen tengelyt, ha a test haladási és forgási egyensúlyban van. Itt, mint hogy lineáris gyorsulás van dolgunk, a tömegközéppontra vonatkoztatott forgatónyomaték számításához vagyunk kötve. (Ugyanez a megszorítás érvényes gyorsuló koordinátarendszerben is.)

megfigyelő – ha hisz a $\Sigma F = ma$ törvény érvényességében – arra következtet, hogy a testre ható erők összegének zérustól különbözőnek kell lennie, mert a test csak így kényszerülhet görbevonalú mozgásra. Ekkor a test nyilvánvalóan gyorsul. Inerciarendszerből nézve azonban a testre ható erők összege zérus. Ez újabb példa a gyorsuló – ez esetben forgó – vonatkoztatási rendszerben fellépő tehetlenségi erőre. Először alkalmas jelölésrendszert vezetünk be. Tekintsünk két rendszert:

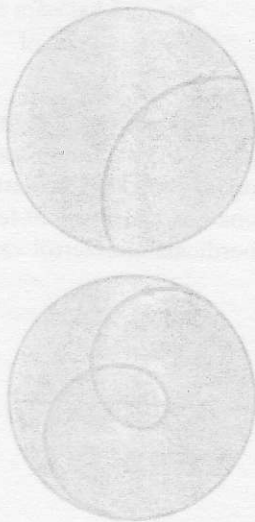
Az S RENDSZER az „állócsillagokhoz” viszonyítva nyugalomban lévő „stacionárius”, vagy inerciarendszer. Kényelmi okból ezt gyakran földi rendszernek nevezzük.

Az S' RENDSZER az S-hez viszonyított ω szögsebességgel forgó koronghoz rögzített rendszer. Az ebben végzett mérési adatokat „vesszővel” ($'$) jelöljük, hogy megkülönböztessük az S inerciarendszerben végzett mérések vesző nélküli adataitól.

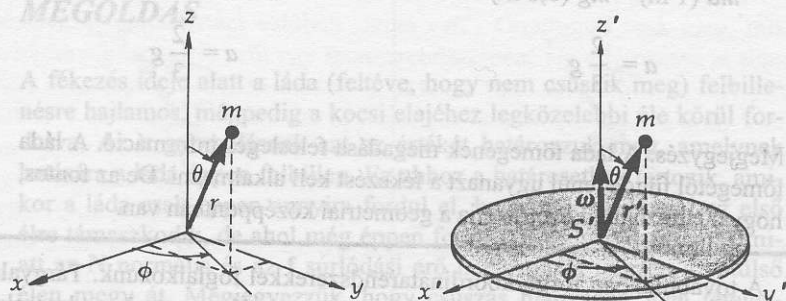
A szimmetria nyújtotta előnyök kihasználására az r , θ és ϕ gömbi koordinátákat használjuk (14-8a ábra). Kényelmi okból az O és az O' origókat a forgó korong középpontjába helyezzük, hogy ugyanaz az r helyzetvektor (ami megegyezik r' -vel) adja meg az m tömegű test helyét mindkét vonatkoztatási rendszerben. A z és a z' tengelyek ugyancsak essenek egybe. Az ω szögsebességvektor mindig a forgástengelyben fekszik (14-8b ábra).



14-6 ábra
Egy kiskocsi egyensúlyos pályán állandó v sebességgel halad. A kocsira erőkötés történik a kocsipályát a forgó korongra rajzolva.



14-7 ábra
A forgó vonatkoztatási rendszerben a 14-6 ábra kiskocsijának pályája ha-
sonló az itt ábrázolt állandós (vagy
szabaddal) mozgású pályákkal egy-
ként, a forgó korong szögsebes-
ségétől függetlenül.



(a) Az r , a θ és a ϕ gömbi koordináták. Az m tömegpont helyzetét az r vektor adja meg.

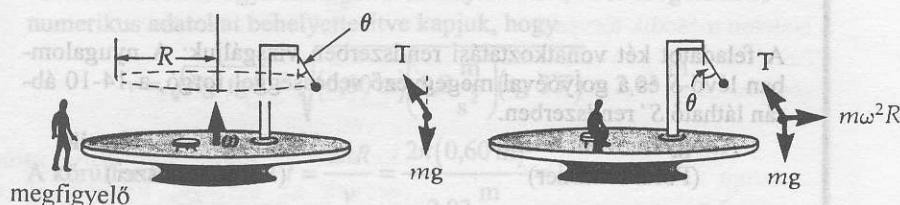
(b) A forgó koronghoz rögzített S' koordinátarendszer z' tengelye a forgástengelyben fekszik. Az m tömegpont helyzetét az r' vektor adja meg. Az ω szögsebességvektor a forgástengelyben fekszik.

14-8 ábra

A stacionárius S és a forgó S' vonatkoztatási rendszer kapcsolata.

14.5 A centrifugális erő és a Coriolis erő

A következőkben azokat a tehetlenségi erőket vizsgáljuk, amelyek akkor lépnek fel, ha forgó vonatkoztatási rendszert használunk. Tekintsünk egy kicsiny m tömegű testet, amely forgó korongra erősített állványra van felfüggesztve. (14-9a ábra.) A test a függőlegessel θ szöget bezáró fonálon függ és a forgó rendszerben nyugalomban van. A földi (S rendszerbeli) megfigyelő úgy látja, hogy a test R sugarú körpályán ω szögsebességgel mozog. A fonalat feszítő erő vízszintes komponense, $T \sin \theta$, az a valódi erő, amely a testnek a körpálya középpontja felé mutató $\omega^2 R$ nagyságú centripetális gyorsulását okozza. De a forgó S' rendszerben (14-9b ábra) a test nyugalomban van, amiből az következik, hogy az m tömegpontra ható erők eredője zérus. Így, az előző bekezdésben ismertetett érveléshez hasonlóan arra következtethetünk, hogy egy $m\omega^2 R$ nagyságú, kifelé mutató tehetlenségi erő lépett fel,



- (a) Az S földi vonatkoztatási rendszerből nézve a labda R sugarú vízszintes körön ω szögsebességgel mozog. T vízszintes komponense a befelé mutató centripetális erő.
- (b) A forgó korong S' vonatkoztatási rendszerében a labda nyugalomban van. A kifelé mutató $m\omega^2R$ centrifugális erő tartja egyensúlyban a labdát a forgó koordináta-rendszerben.

ami a fonalat feszítő erő valódi, befelé mutató komponensével egyensúlyt tart. Ezt a kifelé mutató F_{cf} erőt **centrifugális erőnek**⁵ nevezzük.

Centrifugális erő $F_{cf} = m\omega^2R$ [A forgástengelyre merőlegesen kifelé] (14-11)

ahol R a forgástengelytől mért távolság. Vektoriális alakban⁶

$$\mathbf{F}_{cf} = -m[\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')] \quad (14-12)$$

ahol \mathbf{r}' az m tömegpont S' rendszerben elfoglalt helyének O' origóból húzott helyzetvektora. A vektoriális szorzást nem kell minden esetben kifejteni, mert mint az általános esetben (14C-31 feladat) majd megmutatjuk, F_{cf} mindig a forgástengelyre merőlegesen kifelé mutat. Mint a többi tehetetlenségi erő definíálásakor, itt is figyeljünk a vektor definíciójában szereplő negatív előjelre. (A vektordiagramokon azonban nem szabad a negatív előjelet használni; az irányt maga a diagram adja meg.) A centrifugális erő tehetetlenségi erő, csak forgó rendszerben létezik; inerciarendszerben soha nincs jelen. Ha forgatónyomatékat számolunk, a centrifugális erőt mindig a tömegközéppontra (TKP) hatónak képzeljük éppen úgy, mint a gravitációs erőt.* Valóban, a gyorsuló rendszer megfigyelői számára a tehetetlenségi erők pontosan úgy hatnak, mintha egy többlet gravitációs mező lenne „bekapcsolva” – jelen esetben egy radiálisan kifelé irányított mező, amelynek hatása a forgástengelytől mért távolsággal növekszik.

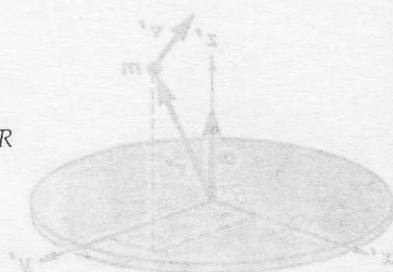
14-3 PÉLDA

Egy zsinór végére erősített golyó $R = 0,60$ m sugarú vízszintes körön kering, eközben a zsinór a függőlegessel 35° -os szöget zár be. Számítsuk ki a golyó keringési idejét!

⁵ A centrifugális szókapcsolatot Newton a latin *centrum* „központ” és a *fugere* „rohanni”, „menekülni” szavakból képezte.

⁶ A vektoralgebrában az $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')$ szorzatot „hármasszorzatnak” nevezik. Lényeges, hogy a zárójelen belüli vektoriális szorzást a másik vektoriális szorzás elvégzése előtt számítsuk ki. (Ha a műveleteket fordított sorrendben végeznénk el, akkor az eredmény mindig zérust adna, mert az $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega}$ szorzatban $\sin 0^\circ$ zérussal egyenlő.)

* Ez az állítás nem mindig igaz. Egzakt módon akkor teljesül, ha a centrifugális gyorsulás a vizsgált test minden részecskéjére ugyanakkora, ahhoz hasonlóan, ahogyan a gravitációs erő is csak homogén térben egyesíthető a tömegközéppontban. (A fordító megj.)



14-9 ábra
Forgó korongra erősített állványon zsinórra kötött labda lóg.

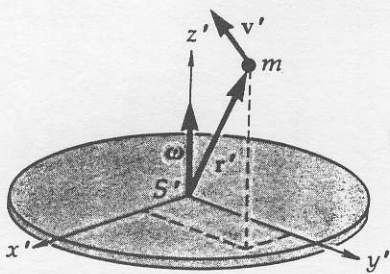


(a) Az egyenlítőről indított rakéta a szaggatott vonallal jelölt pályát követi Helsinkit felé.



(b) A rakéta (az $x'y'$ síkban) v' sebességgel halad észak felé. A rá ható Coriolis erő iránya $-(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}')$, (vagyis a $-x'$ irány).

14-11 ábra
A 14-4 példához.



14-10 ábra

A testnek a forgó S' koordináta-rendszerből nézve \mathbf{v}' sebessége van.

MEGOLDÁS

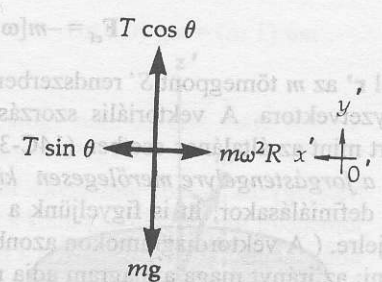
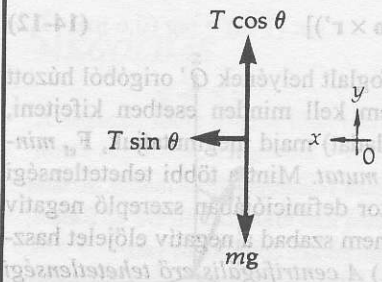
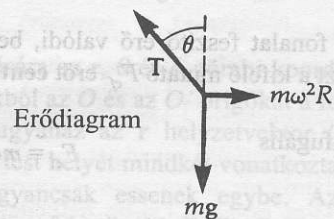
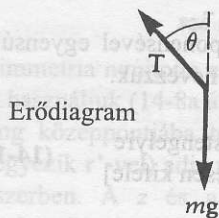
A feladatot két vonatkoztatási rendszerben vizsgáljuk: A nyugalomban lévő S és a golyóval megegyező sebességgel forgó, a 14-10 ábrán látható S' rendszerben.

Ahogy S -ből látszik
(Földi rendszer)

A golyó állandó sebességgel körpályán mozog, így a kör középpontja felé gyorsul. Ezért a radiális irányt választjuk egyik koordináta-irányának.

Ahogy S' -ből látszik
(Forgó rendszer)

A nyugalom fenntartásához a golyóra a forgó rendszerben a kifelé mutató $mR\omega^2 = m\frac{v^2}{R}$ centrifugális erő is hat.



Erődiagram két egymásra merőleges irányban felbontott erőkkel

Erődiagram két egymásra merőleges irányban felbontott erőkkel

Vízszintes komponens

Vízszintes komponens

$$\sum F_x = ma_x$$

$$\sum F'_x = 0 \text{ (Egyensúly)}$$

$$T \sin \theta = m \left(\frac{v^2}{R} \right) \quad [1]$$

$$T \sin \theta = m\omega^2 R \left(= m \frac{v^2}{R} \right) \quad [1]$$

Függőleges komponens

Függőleges komponens

$$\sum F_y = 0 \text{ (Egyensúly)}$$

$$\sum F'_y = 0 \text{ (Egyensúly)}$$

$$T \cos \theta = mg \quad [2]$$

$$T \cos \theta = mg \quad [2]$$

[1]-et [2]-vel osztva kapjuk

[1]-et [2]-vel osztva kapjuk

$$\frac{T \sin \theta}{T \cos \theta} = \frac{m \left(\frac{v^2}{R} \right)}{mg}$$

$$\frac{T \sin \theta}{T \cos \theta} = \frac{m \left(\frac{v^2}{R} \right)}{mg}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{v^2}{Rg}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{v^2}{Rg}$$

Mindkét elemzés ugyanarra az eredményre vezet; v -re megoldva és a numerikus adatokat behelyettesítve kapjuk, hogy

$$v = \sqrt{Rg \operatorname{tg} \theta} = \sqrt{(0,60 \text{ m}) \left(9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) (\operatorname{tg} 35^\circ)} = 2,03 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

A körülfordulási idő $t = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi(0,60 \text{ m})}{2,03 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 1,86 \text{ s}.$

A Coriolis erő

Ha egy testnek az S' rendszerből tekintve v' sebessége van (14-10 ábra), akkor további erő jelenik meg. Ezt az F_{Cor} erőt **Coriolis erőnek** nevezük:

Coriolis erő $F_{\text{Cor}} = -2m(\omega \times v')$ (14-13)

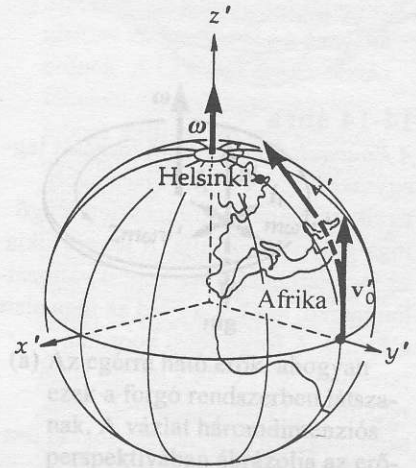
ahol v' az m tömegű test S' rendszerben mért sebessége. A negatív előjel fontos, ha az F_{Cor} erő helyes irányának meghatározására a vektoriális szorzat jobbkéz-szabályát akarjuk alkalmazni [lásd a 10.3 fejezetet]. (A vektordiagramokban nem használjuk a negatív előjelet.) A Coriolis erő *eltérítő* erő, mindig merőleges a v' sebességre. Ha a test a forgó rendszerben nem mozog, akkor nincs Coriolis erő. Ez *tehetetlenségi erő*, soha nincs jelen inerciarendszerben. Forgatónyomaték számításakor a Coriolis erőt a test tömegközéppontjában (TKP) támadó erőnek tekintjük.*

14-4 PÉLDA

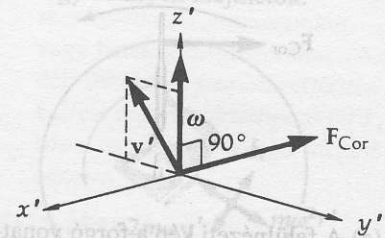
Tegyük fel, hogy a jövőben nagysebességű rakétaposta szolgáltatást létesítenek az egyenlítői Középfrika és (az ugyanazon délkörön fekvő) Helsinki között. Ha a repülési programban a Coriolis erőt elhanyagolják, akkor vajon Helsinkitől keletre avagy nyugatra fog-e a rakéta földet érni?

MEGOLDÁS

A 14-11 ábrán látható, hogy a start pillanatában a Coriolis erő zérus (mert a Föld ω szögsebessége és a kezdeti v' sebesség párhuzamosak). Azonban a további repülés során a vektorok szöget zárnak be egymással. Emiatt az $F_{\text{Cor}} = -2m(\omega \times v')$ Coriolis erő keletre mutat, aminek következtében a rakéta Helsinkitől keletre ér földet.



(a) Az egyenlítőről indított rakéta a szaggatott vonallal jelölt pályát követi Helsink felé.



(b) A rakéta (az $y'z'$ síkban) v' sebességgel halad észak felé. A rá ható Coriolis erő iránya $-(\omega \times v')$, (vagyis a $-x$ irány).

14-11 ábra

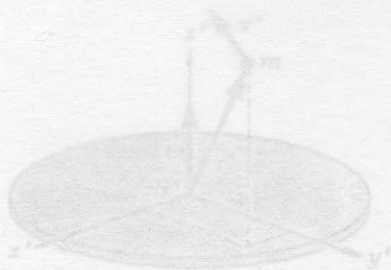
A 14-4 példához.

Newton második törvényének forgó rendszerekben érvényes alakja

Most megfogalmazzuk Newton második törvényének forgó rendszerekre vonatkozó módosított alakját. Az inerciarendszerekben fellépő $\Sigma F_{\text{valódi}}$ valódi erőkhöz két „fiktív” tehetetlenségi erőt (inerciaerőt) adunk hozzá:

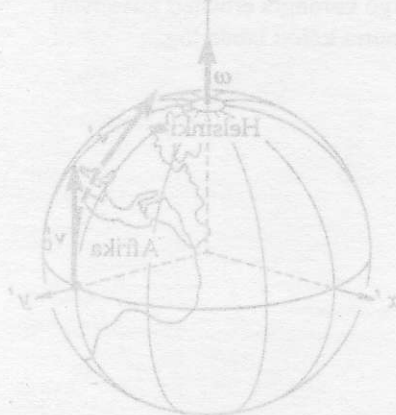
⁷ A Coriolis erőt felfedezőjéről, Gaspard G. Coriolis francia mérnökről nevezték el, aki egyenletét vízikerekek tanulmányozásának eredményeképpen 1835-ben publikálta. A centrifugális- és a Coriolis erő képletének a levezetésére e könyv keretei között nem térhetünk ki.

* Ez alól ismét adódhatnak kivételek pl. akkor, ha a vizsgált kiterjedt test egyes pontjainak sebessége különböző. (A fordító megj.)



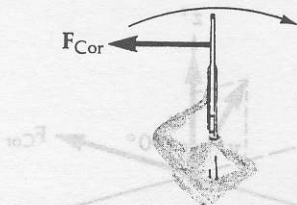
14-10 ábra

A testnek a forgó koordináta-rendszerből nézve v' sebessége van.

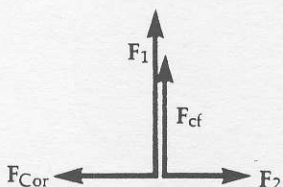


Az egyenlítőn irányított mozgás szagától valószínűleg a papír síkjára merőlegesen lefelé irányul, úgyhogy $-(\omega \times v')$ irányba balra mutat.

A forgás iránya



(a) A felülnézeti kép a forgó vonatkoztatási rendszerben csak a Coriolis erőt tünteti fel a mozgó lövedékre. Az ω vektor a papír síkjára merőlegesen lefelé irányul, úgyhogy $-(\omega \times v')$ irányba balra mutat.



(b) A lövedékre ható vízszintes erők a cső elhagyását közvetlenül megelőző pillanatban, ahogyan ezek a forgó rendszerben felülnézetből látszanak.

14-12 ábra

A 14-5 példához.

Newton második törvénye (módosítva forgó vonatkoztatási rendszerekre)

Valódi erő

$$\sum F_{\text{valódi}}$$

Centrifugális erő

$$|F_{\text{cr}}| = m\omega^2 R$$

Coriolis erő

$$F_{\text{Cor}} = -2m(\omega \times v')$$

$$\sum F' = ma'$$

$$F_{\text{valódi}} + F_{\text{cr}} + F_{\text{Cor}} = ma'$$

Ez a testre ható valamennyi valódi erőnek az összege; ilyenek pl. az érintkezési erő, a rugóerő, a gravitációs erő, az elektromos és a mágneses erő. Ezek a valódi erők inerciarendszerben is jelen vannak.

A centrifugális erő a forgástengelytől mért R távolságtól függ. A tengelytől mindig merőlegesen kifelé mutat. Inerciarendszerben nincs jelen. Vektoriális alakban:

$$F_{\text{cr}} = -m[\omega \times (\omega \times r')]$$

A Coriolis erő *eltérítő* erő. Mindig merőleges az m tömegű test v' sebességére. Ha a testnek a forgó vonatkoztatási rendszerben nincs sebessége, akkor nincs Coriolis erő. Inerciaerő, inerciarendszerekben nincs jelen. A negatív előjelre ügyelni kell.

14-5 PÉLDA

Egy céllövő gyorsan mozgó célt követve a csövet vízszintesen tartva balról jobbra lendíti puskáját a függőleges tengely körül. A lövedék sebessége 800 m/s. a cső elhagyását közvetlenül megelőző pillanatban. (a) Ha ekkor a puska 1 rad/s szögsebességgel fordul, mekkora a 20 g tömegű lövedékre ható Coriolis erő nagysága? (b) Határozzuk meg annak az erőnek az irányát, amit a puskacső gyakorol a lövedékre!

MEGOLDÁS

(a) A forgó rendszer az oldalra lendülő puskacsővel együtt fordul. Ennek a rendszernek a szögsebessége (ω) függőlegesen lefelé mutat. A lövedékre ható Coriolis erő nagysága: $F_{\text{Cor}} = |-2m(\omega \times v')|$. A 14-12a ábra a lövedékre ható Coriolis erő irányát mutatja. Mithogy ω és v' iránya 90° -ot zár be, a vektoriális szorzatban $\sin 90^\circ = 1$ szerepel, vagyis

$$F_{\text{Cor}} = 2m\omega v' = (2)(0,020 \text{ kg}) \left(1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}\right) \left(800 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) = 32 \text{ N.}$$

(b) A lövedék által a puskacsőre gyakorolt erő ellentétes irányú azzal, amit a puska gyakorol a lövedékre. A forgó rendszerben a lövedéknek nincs oldalirányú gyorsulása. Egyetlen gyorsulása radiális irányú. A 14-12b ábra vázolja a lövedékre ható erőket a cső elhagyását közvetlenül megelőző pillanatban.

- $F_1 =$ a táguló gáz által a lövedékre ható erő
- $F_{Cor} =$ a lövedékre ható Coriolis erő
- $F_{cf} =$ a lövedékre ható centrifugális erő
- $F_2 =$ a puskacsó által a Coriolis erő kiegyensúlyozására kifejtett, a lövedéket a θ irányban egyensúlyban tartó erő.

Ezért az F_2 erő, amit a puskacsó fejt ki a lövedékre, jobbra mutat. Nagysága a Coriolis erőével egyenlő (32 N), és csak akkor lép fel, ha a puskacsó a tüzelés pillanatában megtartja állandó ω szögsebességét. A gyakorlatban ez lényegében lehetetlen, hiszen a lövész képtelen az ilyen rendkívül rövid ideig tartó oldalirányú erő kifejtésére. De a lökést érezni fogja!

14-6 PÉLDA

Egy 200 gramm tömegű egér a 10 fordulat per perc sebességgel forgó ringlispil alaplapján radiális irányban szalad. Az egér sebessége a ringlispilre vonatkoztatva állandó 0,50 m/s. (a) Rajzoljuk meg az egér vektorábráját a ringlispil vonatkoztatási rendszeréből nézve! (b) Számítsuk ki azt az eredő súrlódási erőt, amit a felület gyakorol az egérrre a forgástengelytől 2 m távolságban!

MEGOLDÁS

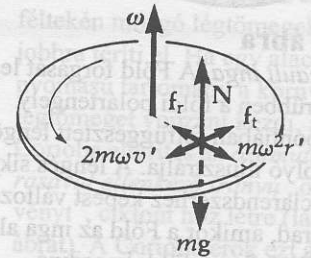
A feladat megoldása sokkal egyszerűbb forgó rendszerben, mert ebben az egér egyenesvonalú egyenletes mozgást végez. Mozgása gyorsulásmentes. Ezzel szemben egy inerciarendszerben az egér bonyolult spirálpályán mozog állandóan változó sebességgel és gyorsulással. Ezért a feladatot a forgó rendszerben oldjuk meg. De az egérrre még a forgó rendszerben is több erő hat. Ha ezeket egyenként vesszük figyelembe, a feladat közvetlenül megoldható a $\Sigma F = ma$ törvény alkalmazásával.

(a) Az erők nem komplanárisak (nem egy síkban fekvők), ezért háromdimenziós perspektivikus vázlatot kell készítenünk, lásd a 14-13a ábrát, ahol bejelöltük az önkényesen választott forgási irányt is. Az egérrre ható valódi erőkön kívül (amilyen a gravitációs erő és a súrlódási erő) még két tehetetlenségi erő is szerepel: A Coriolis erő és a centrifugális erő. Tehát a következő erőkkel kell számolnunk:

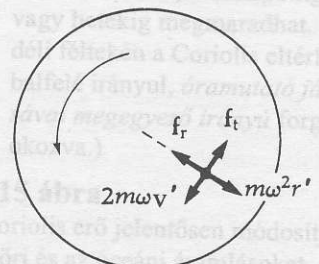
- $W = mg$, a lefelé mutató gravitációs erő.
- N = a ringlispil alaplapjától származó felfelé mutató normális erő.
- $2m\omega v'$ = $|-2m(\omega \times v')|$, a Coriolis erő, amelynek irányát a vektoriális szorzatra vonatkozó jobbkezes-szabály adja meg.
- $mr'\omega^2$ = $|-m[\omega \times (\omega \times r')]|$, a centrifugális erő, amely a forgástengelytől radiálisan kifelé mutat.

Mintthogy az egér egyenesvonalú egyenletes mozgást végez, ezért ebben a rendszerben dinamikai egyensúlyban van (a rá ható erők eredője zérus). Ezért a két vízszintes erő (a Coriolis és a centrifugális erő) más, ugyancsak vízszintes erővel, a súrlódási erővel, tart egyensúlyt. Célszerű a súrlódási erőt két komponensre, radiálisra és tangenciálisra bontani:

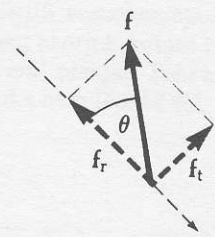
- f_r = a súrlódási erő radiális (befelé mutató) komponense, amely a kifelé mutató centrifugális erőt egyensúlyozza ki.
- f_t = a súrlódási erő tangenciális komponense, amely a Coriolis erőt egyensúlyozza ki.



(a) Az egérrre ható erők, ahogyan ezek a forgó rendszerben látszanak. A vázlat háromdimenziós perspektívában ábrázolja az erőket; az erők egymásra kölcsönösen merőlegesek. N és mg egyenlőek és ellentétes irányúak, így könnyen kiejthetők.



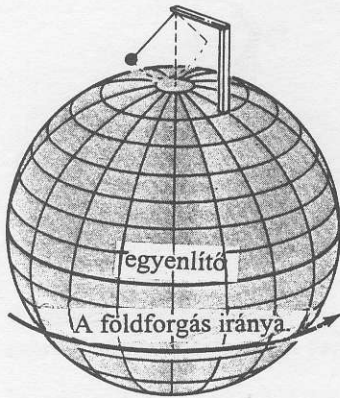
(b) Az egér felülről lefelé merőlegesen nézve (úgy, ahogyan a forgó vonatkoztatási rendszerben látszik).



Kifelé mutató radiális irány.

(c) Az eredő f súrlódási erő f_t és f_r komponensei.

14-13 ábra
A 14-6 példához.



14-14 ábra

A Foucault inga. A Föld forgását leg-egyszerűbben a földi polártengely egyik pontjában felfüggesztett lengő inga-golyó illusztrálja. A lengés síkja az inerciarendszerhez képest változatlan marad, amikor a Föld az inga alatt elfordul. A forgó földi koordinátarendszerből nézve a lengés síkja naponta egyszer megfordul. (Más szélességi körön a helyzet sokkal összetettebb. Az elfordulás sebessége $\omega \sin\theta$, ahol ω a Föld forgási szögsebessége, θ a földrajzi szélesség.)

Megjegyezzük, hogy itt nyugalmi súrlódásról van szó, mert az egér nem csúszik. De nem tudjuk, hogy az egér a megcsúszás határán van-e, vagy nem, ezért $f_s \neq \mu_s N$.

(b) A súrlódási erő kiszámítására csak a vízszintes erőkomponenseket feltüntető vázlatot (14-13b ábra) készítünk.

Radiális komponens **Tangenciális komponens**

$$\sum F'_r = 0 \quad (\text{egyensúly}) \qquad \sum F'_t = 0 \quad (\text{egyensúly})$$

$$f_r = mr'\omega^2 \qquad f_t = 2m\omega v'$$

A numerikus értékeket SI egységekre átszámítva:

$$m = 0,020 \text{ kg}$$

$$r = 2 \text{ m}$$

$$v' = 0,50 \text{ m/s}$$

$$\omega = \left(10 \frac{\text{ford}}{\text{perc}} \right) \left(\frac{1 \text{ perc}}{60 \text{ s}} \right) \left(\frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ ford}} \right) = \frac{\pi \text{ rad}}{3,0 \text{ s}}$$

(átszámítási tényező)

A számértékeket a fenti egyenletbe helyettesítve:

$$f_r = mr'\omega^2 = (0,20 \text{ kg})(2 \text{ m}) \left(\frac{\pi \text{ rad}}{3,0 \text{ s}} \right)^2 = 0,438 \text{ N}$$

$$f_t = 2m\omega v' = (2)(0,20 \text{ kg}) \left(\frac{\pi \text{ rad}}{3,0 \text{ s}} \right) \left(0,50 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) = 0,209 \text{ N}$$

Az eredő f súrlódási erő nagysága:

$$f = \sqrt{f_r^2 + f_t^2} = 0,485 \text{ N}$$

A súrlódási erő irányát a következőképpen kapjuk:

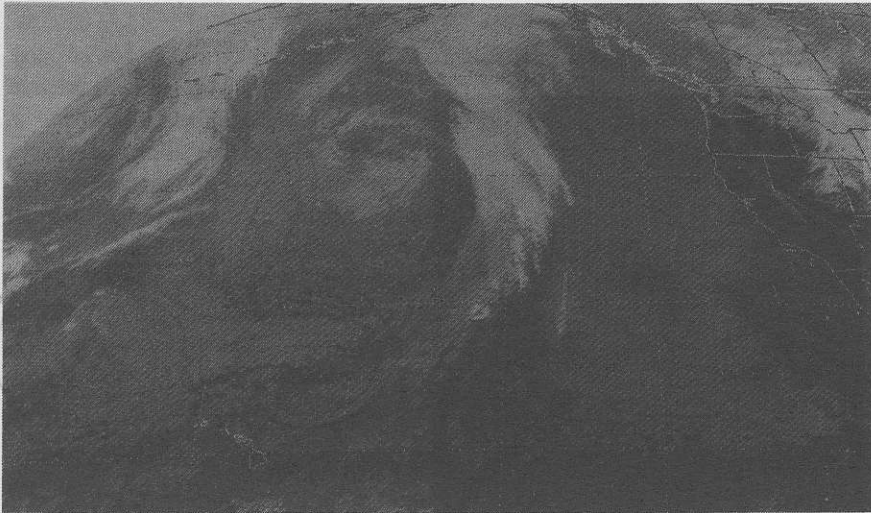
$$\theta = \arctg\left(\frac{f_t}{f_r}\right) = \arctg\left(\frac{0,209 \text{ N}}{0,438 \text{ N}}\right) = 25,5^\circ$$

A θ szög jelentésére nézve lásd a 14-13c ábrát.

Megjegyezzük, hogy ha a ringlispil nem forogna, az egérré egyáltalán nem hatna vízszintes irányú erő. Azonban az állandó sebességű forgás következtében van egy radiálisan kifelé mutató erő, ami a távolsággal növekszik (ez a centrifugális erő), valamint az állandó oldalirányú erő (a Coriolis erő). A radiálisan kifelé irányuló sebesség állandó értéken tartására az egérnek „jól le kell tennie a talpát”, hogy e két inercia erő ellenében kellően nagy súrlódási erőt biztosítson. Ahhoz, hogy e két inercia erő létezéséről meggyőződjünk, próbáljunk egy forgó ringlispil alaplapján végigsétálni (de nagyon óvatosan!). Ha nem vigyázunk, ezek az úgynevezett fiktív erők felborítanak! (A szerzők a sérülésekért felelősséget nem vállalnak.)

14.6 Megjegyzések

Amint láttuk, a tehetetlenségi erők kizárólag abból adódnak, hogy vonatkoztatási rendszernek gyorsuló rendszert választunk, és abból, hogy meg akarjuk őrizni Newton második törvényének $\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$ alakját. Hajlamosak vagyunk az észlelt gyorsulást a testre ható erők eredőjének tulajdonítani. De lehet, hogy mélyebb a rejtély és a tehetetlenségi erők egyáltalán nem a képzelet szüleményei. Gyorsuló koordinátarendszerben könnyen meggyőződhetünk



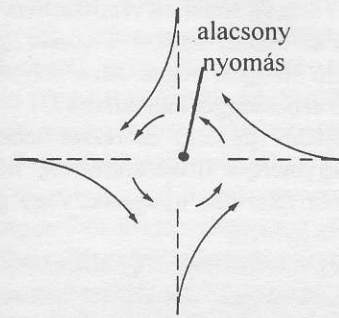
(a) Ez az 1988. március 14-én készült műholdas meteorológiai felvétel a középpontjával az Észak-nyugati Csendes Óceánban elhelyezkedő alacsony nyomású rendszert mutat. A spirális felhőrendszer az óramutató járásával ellenkező irányban forog.

arról, hogy a tehetetlenségi erők valóban léteznek; ezek reális, fizikailag mérhető effektusokat hoznak létre. Mi több: a tehetetlenségi erő jelenlétét kísérletileg *pontosan* ugyanolyan módon igazoljuk, mint a gravitációs erő jelenlétét. Az egyetlen különbség csupán annyi, hogy a tehetetlenségi erőt nem tudjuk valami más fizikai objektumtól származtatni úgy, amint azt a gravitáció és más valódi erők esetében szokásosan meg tesszük. Ezért a tehetetlenségi erők nem engedelmessékednek Newton harmadik törvényének.

Sok feladatot gyorsuló koordináta-rendszerben lehet a legkényelmesebben megoldani. Például a Foucault inga mozgását azokkal a tehetetlenségi erőkkel értelmezhetjük, amelyek akkor lépnek fel, amikor az ingát forgó rendszerből nézzük (14-14 ábra). A nagysebességű centrifugák tanulmányozása is egyszerűbb abban a vonatkoztatási rendszerben, amelyikben a folyadék nyugszik, mint abban, amelyikben rögzített megfigyelő nézi a forgó tartályt.

Példák a Coriolis erőre

A Coriolis erő sok jelenségben megnyilvánul. A legtöbb ciklon az északi féltekén az óramutató járásával ellenkező irányban forog, a déli féltekén pedig az óramutató járásával megegyező irányban (lásd a 14-15 ábrát). Hasonlóképpen azt is a Coriolis erő segíti elő, hogy mind az alacsony, mind a magas atmoszférikus nyomású tartományok körül kialakuló levegő-cirkuláció stabil időjárási képződmény. Minthogy a Coriolis erő az egyenlítő közelében a leggyengébb, az időjárási rendszerek és a velük kapcsolatos szelek gyakran disszipálódnak az egyenlítő közelében, létrehozva az ún. *doldrumokat*, azokat a trópusi óceáni tartományokat, ahol csak könnyű szelek fújnak, vagy teljes szélcsend van. A Coriolis erő érdekes hatással van a forgó mozgást végző sokatomos molekulák rezgő atomjaira is. A Coriolis erő a nagy hatótávolságú rakéták mozgását is döntően befolyásolja.⁸ A tehetetlenségi erők segítségével képesek a biológiai rendszerek



(b) Stabil időjárási örvényrendszer-alakzat az eredménye a Coriolis erőnek. A Coriolis erő az északi féltekén mozgó légtömegeket jobbra téríti el. Ha egy alacsony nyomású tartomány a környező légtömeget vonzani kezdi, a Coriolis eltérítés az óramutató járásával ellenkező irányú „örvényyt”, ciklont hoz létre (lásd az ábrát). A Coriolis erők ezt a körben mozgó levegőt most az alacsony nyomású tartománytól a nagyobb nyomású tartomány felé térítik el. Ha a nyomáskülönbségből adódó befelé mutató erők a kifelé ható Coriolis erőkkel egyensúlyban vannak, akkor dinamikailag stabil örvénylő rendszer keletkezik, ami napokig, vagy hetekig megmaradhat. (A déli féltekén a Coriolis eltérítés balfelé irányul, óramutató járásával megegyező irányú forgást okozva.)

14-15 ábra

A Coriolis erő jelentősen módosítja a légköri és az óceáni áramlásokat.

⁸ Az első világháború kezdetén egy flottabevetés alkalmával Délamerika csücske mellett a Falkland szigeteken brit tüzérek meglepetéssel látták, hogy pontosan célzott sorozatlövésük a német hajóktól 100 méterrel balra csapódtak be. A löelemképző eszköz tervezői tisztában voltak a Coriolis erő hatásával, és ezt számításba is vették, de minden bizonnyal arra számítottak, hogy majd minden tengeri ütközetet az 50° északi szélesség közelében



(a) A közönséges házi légynek és rokonainak olyan páros szerve van (pálcika, végén kis kidudorodással), amely a repülés közben adott síkban rezeg. A fényképen egy lószúnyog (*Tipula oleracea*) látható. Amikor a légy fordul, ez a szerv ugyanúgy meg akarja tartani rezgési síkját, mint a Foucault inga, ezáltal informálja a legyet a fordulás mértékéről. Ha a légy egyenes vonalban gyorsul, a pálcikák végén lévő tömegek tehetetlenségük miatt lemaradnak, így olyan jelzést adnak, ami lineáris gyorsulásként értelmezhető. Ha ezt a szervet rögzítik, vagy eltávolítják, a rovar nem tud egyenes vonalban repülni, ehelyett össze-vissza véletlenszerű kis körökben repül.

14-16 ábra

A biológiai szervezeteknek inerciális tájékozódási szervük van. Ezekkel a különféle mozgásokat tehetlenségi inerciarendszerre vonatkoztatva tudják érzékelni. Ezt itt két példa illusztrálja.

(b) Az emberi fül három félkörös ívjáratában folyadék van. Amikor a fej fordul, a folyadék tehetetlenségénél fogva hátramarad. A folyadéknak az ívjáratokhoz viszonyított mozgását a csöbe nyúló idegvégződések érzékelik; ezek az idegszálak tudósítják az agyat, ha fordulás történik. Az ívjáratok három, nagyjából egymásra merőleges síkban helyezkednek el, így módon bármely adott tengely körüli elfordulás észlelhetővé válik. A haladási gyorsulás a „saccule”-nak nevezett kicsiny hólyagban lévő, zselatinszerű anyagba szuszpendált szilárd kalciumkarbonát részecskék mozgása által érzékelhető. Ha a fej egyenes mentén gyorsul, a szilárd részecskék hátramaradnak. A saccule falából kiálló idegszálak érzékelik a részecskék falhoz viszonyított mozgását. Ha a forgó vonatkoztatási rendszerben lévő személy a fejét fordítja, az elmozduló folyadékokra ható Coriolis erő effektus váratlan jeleket produkál az agyban, helytelenül valami más tengely körül végzett forgást jelez. Az ezzel járó zavar szédülést és hányingert okoz. Mindez komoly hatással lehet a felállítandó ürállomásokra, amelyeket majd kellő forgásba kell hozni, hogy ezáltal mesterséges gravitáció jöjjön létre.

fognak megvívni, és sohasem az 50° déli szélesség környékén. Emiatt a brit lövedékek a Coriolis erő eltérítésének kétszeresével tértek el a céltól. (Lábjegyzet átvéve: Jerry B. Marion, *Classical Dynamics of Particles and Systems*, 2nd ed., New York: Academic Press, 1965, p.346.)

saját haladó és forgó mozgásukat valamely inerciarendszerhez viszonyítva észlelni (lásd a 14-16 ábrát).

Némelykor makacsul állítják, hogy a fürdőkádból kifolyó víz örvénylésének a Coriolis erő következtében kitért forgásiránya van. Az esetek többségében azonban a Coriolis erő elhanyagolható más, nagyobb effektusok mellett – különösképpen az olyanok mellett mint a fürdőkád alakjából, vagy a kád feltöltési körülményeinek következtében fellépő maradék forgatónyomatéktól származó hatások. Az ilyen effektusok néha napokig megmaradnak, és maga a Coriolis erő nehezen mutatható be. De szimmetrikus tartályban gondosan végzett kísérletek azt mutatják, hogy a „fürdőkád-örvény”, valóban a Coriolis erőnek tulajdoníthatóan, az északi és a déli féltekén ellentétes forgásirányra hajlamos.

Összefoglalás

Állandó a_R haladó gyorsulással mozgó vonatkoztatási rendszerben:

Megőrizzük Newton második törvényének $\Sigma F' = ma'$ alakját azáltal, hogy a valódi $\Sigma F_{\text{valódi}}$ erőkhöz az m tömegű testre ható $-ma_R$ tehetetlenségi erőt is hozzáadjuk.

Tehetlenségi erő
(egyenes vonalú
gyorsuló rendszerben)

$$F_{\text{tehetetl.}} = -ma_R$$

Tömegpontrendszerre ható forgatónyomaték számítására az $F_{\text{tehetetl.}}$ erőt a tömegközéppontban támadó erőnek képzeljük.

Állandó ω szögsebességgel forgó vonatkoztatási rendszerben:

Megőrizzük Newton második törvényének $\Sigma F' = ma'$ alakját azáltal, hogy a valódi $\Sigma F_{\text{valódi}}$ erőkhöz az m tömegű testre ható két tehetlenségi erőt, a centrifugális erőt és a Coriolis erőt is hozzáadjuk.

Newton második törvénye
(módosítva forgó vonatkoztatási rendszerekre)

$$\Sigma F' = ma'$$

$$F_{\text{valódi}} + F_{\text{cf}} + F_{\text{Cor}} = ma'$$

Valódi erő

$$\Sigma F_{\text{valódi}}$$

Ez a testre ható valamennyi valódi erőnek, mint amilyen az érintkezési erők, a rugóerő, a gravitációs erő, az elektromos és a mágneses erő összege. Ezek a valódi erők inerciarendszerben is jelen vannak.

Centrifugális erő

A centrifugális erő a forgástengelytől mért R tá-

$$|F_{\text{cf}}| = m\omega^2 R$$

volságtól függ. A tengelytől mindig merőlegesen kifelé mutat. Inerciarendszerben nincs jelen. (Vektoriális alakban:

$$F_{\text{cf}} = -m [\omega \times (\omega \times r')].$$

Coriolis erő

$$F_{\text{Cor}} = -2m(\omega \times v')$$

A Coriolis erő eltérítő erő. Mindig merőleges az m tömegű test v' sebességére. Ha a testnek a forgó vonatkoztatási rendszerben nincs sebessége, akkor nincs Coriolis erő. Tehetlenségi erő, inerciarendszerekben nincs jelen. A negatív előjelre ügyelni kell.

Gyorsuló rendszerben a tehetlenségi erők – melyeket „fiktív” erőknek is neveznek – éppen annyira valóságosak, mint a gravitációs erő. Valóban, jelenlétük kísérleti igazolását *pontosan* úgy végezzük, mint a gravitációs erő jelenlétének igazolását. Gyorsuló rendszerben a megfigyelők számára úgy tűnik, mintha egy járulékos gravitációs mező „bekapcsolása” okozná ezeket a tehetlenségi erőket. De a tehetlenségi erők eredetét egyetlen más objektumnak sem tulajdoníthatjuk úgy, mint ahogyan ezt a gravitáció vagy más „valódi” erő esetében megtehetjük, ezért a tehetlenségi erők nem engedelmessékednek Newton harmadik törvényének. Inkább arról van szó, hogy a tehetlenségi erők azért jelennek meg, mert gyorsuló vonatkoztatási rendszerben akarunk dolgozni, és meg akarjuk tartani Newton második törvényének $\Sigma F' = ma'$ alakját. Tehetlenségi erők inerciarendszerekben soha nem lépnek fel.

Kérdések

1. Egy függőleges helyzetű szélvédővel felszerelt teherautó v_w sebességgel halad. Ha az esőcseppek függőlegesen v_r állandó végsebességgel hullanak, hány fokos szögben csapódnak a szélvédőre?

2. Egy vasúti kocsi szélső ülésén utazó lány labdát dob át a túloldalon ülő barátjának. A vonat állandó sebességgel halad. Írjuk le a labda mozgását a vasúti kocsihoz rögzített vonatkoztatási rendszerben és

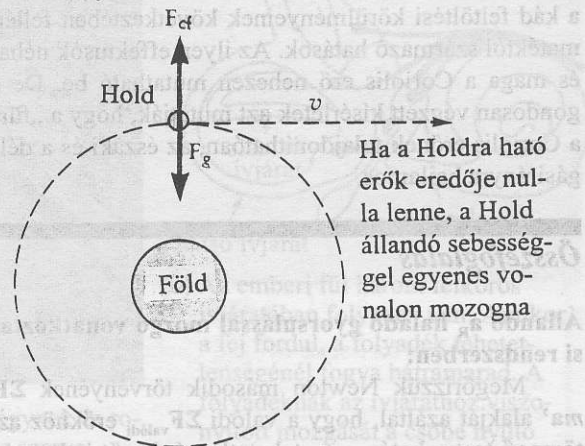
- a Földhöz rögzített rendszerben. Ismételjük meg arra az esetre, amikor a vonat egyenesvonalú gyorsuló mozgást végez. Mi a helyzet, ha a vonat állandó sebességgel kanyarodik?
- Miféle (pontos) méréssel lehetne eldönteni egy nagyméretű liftszelektényben, hogy a lift vajon a Föld felszínén nyugszik, vagy gravitáció híján fel-felé gyorsul?
 - Tegyük fel, hogy egy ablaktalan szobában vagyunk nincs nálunk semmilyen műszer. Honnan tudnánk megmondani, hogy vajon forog-e a szoba a függőleges tengely körül, vagy nem? Hogyan tudnánk eldönteni, hogy a forgástengely a szoba belsejében van-e, vagy a szobán kívül? Hogyan lehetne a forgásirányt meghatározni?
 - Milyen eszközök birtokában tudnánk az előző kérdésben szereplő szoba szögsebességének numerikus értékét meghatározni?
 - Tegyük fel, hogy az egyenlítőn egy (elhagyott) bánya aknájába beejtünk egy követ. Tekintettel a Föld forgására, az akna melyik fala felé fog a kő eltérülni?
 - A fejtámasszal felszerelt gépkocsiülés megakadályozza, hogy ha a kocsit hátulról lökés éri, az utas ún. „ostorszj” sérülést szenvedjen. Fejtsük ki, hogy a kocsiüléshez rögzített rendszerből nézve mi történik egy ostorszj balesetnél.
 - Írjuk le a (forgó) Föld vonatkoztatási rendszeréből nézve az összes erőt, ami földrajzilag meghatározott helyünkön az asztalon fekvő könyvre hat.
 - Egy teherautó vízzel töltött kádát szállít lefelé a domboldalon, kikapcsolt motorral, fékezés nélkül gyorsulva. Tekintsünk el az induláskor fellépő lötytenéstől, csak a tranziens mozgás lecsengését követő „állandósult” állapotot figyeljük! Kérdés: a víz felszíne vajon a Föld felszínével, vagy a lejtő felszínével párhuzamos? Indokoljuk meg állásfoglalásunkat.
 - Néha azt bizonygatják, hogy a Hold azért nem zuhan földkörüli keringése során a Földre, mert „a Holdra ható kifelé irányuló centrifugális erő éppen egyensúlyban van a befelé irányuló gravitációs erővel”. De ha ez igaz lenne, akkor a Holdra ható erők összege *zérus* lenne, és a Hold egyenesvonalú pályán haladna (14-17a ábra). Milyen vonatkoztatási rendszerben lenne az idézett mondat helytálló? (Ez nem a földi rendszer – miért nem?) Vagy nincs is ilyen rendszer?

Feladatok

14-3 Egyenesvonalú gyorsuló koordináta-rendszerek

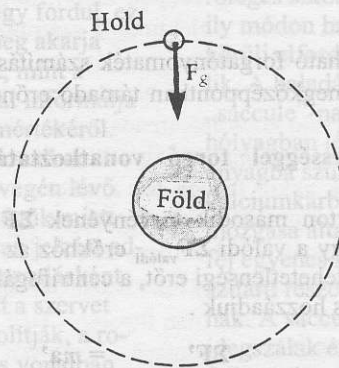
14A-1 Liftszelektényben álló személy rugós erőmérőn 2,50 kg feliratú testet tart. A rugós erőmérő 30 newtonot mutat. Mekkora a lift gyorsulása? Alkalmazzuk a lifthez rögzített vonatkoztatási rendszert, és vegyük a gravitáció által okozott helyi gyorsulást $9,8 \text{ m/s}^2$ -nek.

- Tekintsük a 14-15b ábrát! Tegyük fel, hogy a közeli széljárás egy alacsonynyomású tartomány körül olyan légáramlást létesít, amelyik „helytelen” irányban (azaz az északi féltekén az óramutató járásával megegyező irányban) forog. Magyarázzuk meg, miért nem lesz tartós ez az alacsonynyomású képződmény!



Ha a Holdra ható erők eredője nulla lenne, a Hold állandó sebességgel egyenes vonalon mozogna

- (a) A Holdra ható erők *helytelen* vektorábrája inerciarendszerből nézve. (Inerciarendszerben nem lépnek fel tehetetlenségi erők.)



- (b) A Holdra ható erők *helyes* vektorábrája inerciarendszerből nézve. A kiegyensúlyozatlan F_g gravitációs erő az a centripetális erő, ami a Holdat állandó sebességű körmozgása során folyamatosan a Föld felé „esésre” kényszeríti.

14-17 ábra

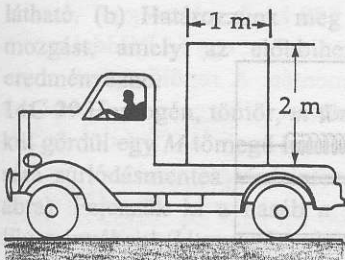
A10. kérdéshez.

14A-2 (3/4)g gyorsulással lefelé mozgó üvegfalú liftszelektény mennyezetéről labdát ejtenek le. Írjuk le a labda gyorsulását (a) a földön nyugvó megfigyelő és (b) a liftben utazó megfigyelő szempontjából! Készítsük el a megfelelő erővektorábrát is.

14A-3 Egy 5 kg-os terhet 7,5 kg teherbírású kötélen emelünk. Gyorsuló vonatkoztatási rendszerben vizsgálva a feladatot, határozzuk meg azt a maximális gyorsulást, amellyel az adott teher emelhető.

14A-4 Egy 80 kg-os ember 1,2 m/s² gyorsulással lefelé mozgó liftszelekrényben fürdőszoba mérlegen áll. Mekkora mutatja a skála az ember súlyát? Vizsgáljuk a feladatot (a) inercia rendszerből és (b) a liftszelekrényhez rögzített rendszerből!

14B-5 Áruszállító teherautóra ládát raktak a 14-18 ábrán látható elrendezésben. A vezető „kilő”, azaz nagy gyorsulással indít. A teherautó vonatkoztatási rendszeréből nézve számítsuk ki azt a maximális gyorsulást, amellyel indítva a láda nem borul fel! A láda tömegközéppontja a középpontjában van és a láda nem csúszik meg a teherautó rakterében.

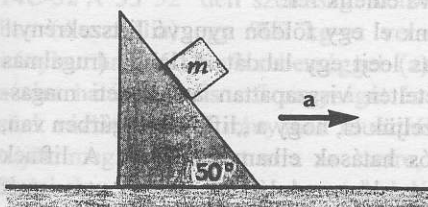


14-18 ábra

A 14B-5 feladathoz.

14B-6 Egy 600 N súlyú személy vízszintesen gyorsuló szekéren áll. Azért, hogy a gyorsuló vonatkoztatási rendszerben egyensúlyát megtartsa, a függőlegeshez viszonyítva 15°-os szögben meg kell dőlnie. (a) A gyorsulás irányához viszonyítva melyik irányban kell a személynek dőlni? A gyorsuló rendszerben számolva határozzuk meg a gyorsulás nagyságát. (c) Határozzuk meg azt az erőt, amellyel a személy a szekér alapdeszkájára hat. (Útbaigazító kérdés: a szóban forgó személy a gyorsuló vonatkoztatási rendszerben haladási egyensúlyban van? forgási egyensúlyban van?)

14B-7 Egy m tömegű hasáb sima éken nyugszik (14-19 ábra). Az ék jobbra gyorsul, és pedig oly módon, hogy a hasáb az ékhez viszonyítva nyugalomban marad. Számítsuk ki az a gyorsulást SI egységben.



14-19 ábra

A 14B-7 feladathoz.

14B-8 Egy 50 kg-os ember liftszelekrénybe helyezett rugós mérlegen méri a súlyát. Számítsuk ki, mit mutat a mérleg ha (a) a lift állandó 3 m/s sebességgel emelkedik (ez az ember „tényleges súlya”); (b) a lift 3 m/s sebes-

séggel süllyed; (c) a lift emelkedik, de sebességét 2 m/s²-tel csökkenti; (d) a lift az emelkedés közben sebességét 2 m/s²-tel növeli; (e) a lift süllyedés közben 2 m/s²-tel gyorsul és (f) a lift süllyedés közben 2 m/s²-tel lassul! Készítsünk minden egyes esetre az erővektorok *helyes relatív méreteit* feltüntető vektordiagramot!

14B-9 Egy 1,5 kg-os súly egy 3,6 m/s² gyorsulással mozgó vasúti mennyezetére zsinórral van felfüggesztve. A súly a kocsihoz viszonyítva nyugalomban van. Határozzuk meg (a) a zsinór függőleges iránnyal bezárt szögét és (b) a zsinórban ébredő erő nagyságát! A feladatot a kocsihoz rögzített vonatkoztatási rendszerben oldjuk meg!

14B-10 Állandó 2 m/s² gyorsulással felfelé mozgó liftben a padlótól 2 m magasról leesik egy tárgy. A tárgy kezdetben a lifthez viszonyítva nyugalmi helyzetben volt. Mennyi idő alatt esik le a padlóra? A feladatot a lifthez rögzített vonatkoztatási rendszerben oldjuk meg.

14B-11 A gravitáció hatására egy 2,5 kg-os test 9,8 m/s² gyorsulással esik. Mekkora többleterőnek kell a testre hatni ahhoz, hogy gyorsulása 12 m/s² legyen? Oldjuk meg a feladatot (a) inerciarendszerben és (b) a testhez rögzített vonatkoztatási rendszerben. (A Föld forgását ne vegyük figyelembe.)

14.5 A Coriolis erő és a centrifugális erő

14A-12 Egy 120 méter átmérőjű nagy, kerékalakú űrállomás a peremén lévő személyek 3 m/s² „mesterséges gravitációval” való ellátása céljából forgásban van. Határozzuk meg, mekkora (fordulat per perc egységben mért) fordulatszámmal lehet ezt a hatást elérni!

14A-13 Egy ringlispil alaplapján, a tengelytől 3,6 m távolságban kisméretű doboz nyugszik. A doboz és az alaplap között a nyugalmi súrlódási együttható 0,30. Számítsuk ki a ringlispil lapjának a maximális szögsebességét (fordulat per perc egységben), amelynél a doboz még nem csúszik meg! A feladatot kétféleképpen is oldjuk meg: (a) a ringlispilhez rögzített rendszerében és (b) inerciarendszerben.

14A-14 Műrepülőgép pilótája a súlytalanság állapotával kísérletezve hurokrepülést végez. A gép sebessége a hurok legfelső pontján 160 km/h. Mekkora a hurok sugara? Oldjuk meg a feladatot mind a repülőgép vonatkoztatási rendszerében, mind inerciarendszerben.

14A-15 Határozzuk meg a 60 méter sugarú versenypálya szakasz ideális dőlésszögét arra az esetre, ha a kocsi 96 km/h sebességgel veszik a kanyart. Oldjuk meg a feladatot egy gépkocsihoz rögzített koordinátarendszerben.

14B-16 Ha valaki az egyetem területén nyugati irányban fut, pontosan mi lesz a rá ható Coriolis erő iránya?

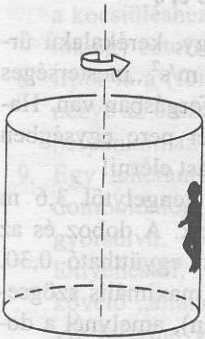
14B-17 A 30° északi szélességi körön fekvő New Orleans-ban egy vonat kelet felé halad. Határozzuk meg a vonatra ható Coriolis erő irányát!

14B-18 Előadási kísérlet során egy simán csúszó 0,5 kg tömegű korongot egy vízszintes, kör alakú, 1,2 m átmérőjű forgó lemez pereméről sugárirányban befelé löknek. A lemez szögsebessége 2 rad/s, és a forgásirány

felülről nézve óramutató járásával megegyező irányú. A forgó rendszerből nézve a korong sebessége 2 m/s . Határozzuk meg közvetlenül a korong elindítását követő pillanatban (a) a korongra ható centrifugális erőt és (b) a korongra ható Coriolis erőt, valamint ezen erők irányát!

14B-19 Egy kisméretű kocka alakú doboz tömegközéppontja a geometriai középpontban van. A dobozt egy vízszintes síkú forgóasztalra helyezük, úgy, hogy tömegközéppontja a forgástengelytől R távolságra legyen. A doboz egyik oldala merőleges a radiális irányra. Ha a súrlódási erő elég nagy ahhoz, hogy a doboz ne csúszjon meg, mekkora az a legkisebb ω szögsebesség, amelynél a doboz a külső éle körül már felbillen? Vizsgáljuk a kérdést a forgó vonatkoztatási rendszerben.

14B-20 Egy népszerű vidámparki mutatványnál a látogatók egy függőlegesen tengely körül forgó henger belső falának támaszkodnak (14-20 ábra). Ezután a padlót lesüllyesztik, és hagyják, hogy a látogatók a centrifugális erő által a falhoz „szögezve” és a súrlódási erő következtében a lecsúszástól védve a falon maradjanak. A henger R sugarának, az ω szögsebességnek és a g nehézségi gyorsulásnak függvényében határozzuk meg azt a legkisebb μ , nyugalmi súrlódási együtthatót, amely a lecsúszást megakadályozza. A feladatot a forgó vonatkoztatási rendszerben oldjuk meg.



14-20 ábra

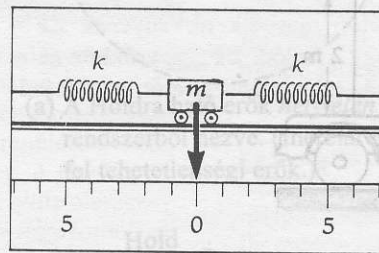
A 14B-20 feladathoz.

14B-21 Kicsiny, 2 g tömegű bogár egy felülről nézve az óramutató járásával ellentétes irányban 2 rad/s szögsebességgel forgó vízszintes korongon van, a középponttól 50 cm távolságban. A bogár a forgó rendszerből nézve nyugalomban van. Készítsünk (a forgó korongot felülről nézve) erődiagramot, amely a bogárra ható erőknek csak a vízszintes komponensét ábrázolja. Tüntessük fel ezek numerikus értékét is. Végezzük ezt el (a) inercia rendszerben és (b) a forgó korong rendszerében! Ezután tegyük fel, hogy a bogár állandó 10 cm/s sebességgel egy sugárirányban festett vonalon kifelé indul.

14B-22 Tegyük fel, hogy a Föld tökéletes forgó gömb (azzal ellentétben, hogy alakja inkább lapult sferoid). Egy eskimó az északi sarkon fürdőszoba mérlegre áll és úgy találja, hogy súlya pontosan 1000 N . Mennyivel tér el a leolvasott érték az előbbi 1000 N -től ha az egyenlítőn áll rá a mérlegre?

Vegyes feladatok

14C-23 Az *akcelerométer* olyan eszköz, amellyel gyorsulást lehet mérni. Az egyszerű szerkezetű akcelerométer működési elvét a 14-21 ábra érzékelteti. A súrlódásmentes kerekre szerelt m tömegű testet két azonos rugó feszíti. A test helyzetét a ráerősített mutató skálán jelzi. Ha az eszköz a rugók irányában állandó gyorsulásnak van kitéve, akkor az m tömegű test – tehetlenségi hatás következtében – középső egyensúlyi helyzetéből elmozdul. (Az ábrán fel nem tüntetett csillapító berendezés kiküszöböli az indulásnál és a megállásnál fellépő rezgést.) Mekkora az egyes rugók k rugóállandója, ha az $m = 0,1 \text{ kg}$ tömegű testre szerelt mutató 5 m/s^2 gyorsulás hatására 5 cm elmozdulást jelez? A feladatot kétféleképpen oldjuk meg: inerciarendszerben és az akcelerométer rendszerében.



14-21 ábra

A 14C-23 ábra.

14C-24 Zárt teherkocsi mennyezetére 1 kg tömegű test van felfüggesztve. A megfigyelő megállapítja, hogy a testet felfüggesztő zsinór a függőlegessel állandó 10° -os szöget alkot, és alsó vége a kocsi fara felé tér ki. A zsinórban ébredő erő pontos mérésével hogyan tudná a megfigyelő eldönteni, vajon a kocsi állandó sebességgel lejtőn felfelé halad, vagy pedig vízszintes pályán gyorsulva mozog.

14C-25 Egy 500 kg -os, $7,5 \text{ m}$ hosszú homogén acélgerenda fekszik a földön. Egyik végén 90 kg -os ember ül. (a) Az embertől mekkora távolságban kell felerősíteni az emelődaru kötelét, hogy a gerenda ne billenjen fel ha állandó sebességgel emelik? (b) Magyarazzuk meg, miért nem történik szerencsétlenség akkor sem, ha a gerendát gyorsulva emelik fel!

14C-26 Tekintsünk el egy földön nyugvó liftszelejt! A benne álló utas leejt egy labdát. A labda (rugalmas ütközéssel) ismételtelen visszapattan az eredeti magasságba. Most képzeljük el, hogy a „lift” a világűrben van, ahol a gravitációs hatások elhanyagolhatók. A liftnek „felfelé” g -vel egyenlő gyorsulást adunk. Az utas ismételtelen visszapattan a liftszelejt padlóján. Vázzuk a labda pályagörbét egy olyan inerciarendszerben, amelyik a labda elejtésének pillanatában a lift sebességével halad! (Útmutatás: Töljük el a pályagörbét oldalirányban úgy, hogy a labda felfelé és lefelé haladó pá-

lyája ne fedje egymást. Elegendően hosszú ideig várva hogyan változik a labda sebessége egyetlen visszapattnás során?) A pályagörbe mennyiségi jellemzőit a lehető legpontosabban készítsük el!

14C-27 Egy lejtő hajlásszöge θ . Amikor a lejtő áll, akkor a rajta fekvő hasáb éppen a csúszás határán van. Számítsuk ki a gyorsulásnak azt az értékét, amellyel a lejtőnek mozognia kell ahhoz, hogy a hasáb a *fel* felé csúszás határán legyen. Vizsgáljuk a feladatot a gyorsuló vonatkoztatási rendszerben. (Útmutatás: először állapítsuk meg μ_s értékét θ függvényében arra az esetre, amikor a lejtő nyugalomban van. Azután ezt az értéket használjuk fel a gyorsuló lejtőre vonatkozó feladatban.)

14C-28 Vízszintesen gyorsuló teherkocsi mennyezetről labdát ejtenek le. A labda a padlóról néhányszor visszapattn. (a) Készítsünk vázlatot a labda pályájáról, ahogyan az a teherkocsi vonatkoztatási rendszeréből látható. (b) Határozzunk meg olyan gyorsulásmentes mozgást, amely az előbbihez hasonló pályagörbét eredményezne.

14C-29 Homogén, tömör, m tömegű gömb csúszás nélkül gördül egy M tömegű hasábon, amely az F erő hatására súrlódásmentes vízszintes talajon gyorsul (14-22 ábra). Fejezzük ki a hasáb a gyorsulását F , m és M függvényében! (Útmutatás: vizsgáljuk a gömb mozgását a hasáb gyorsuló vonatkoztatási rendszerében.)



14-22 ábra

A 14C-29 feladathoz.

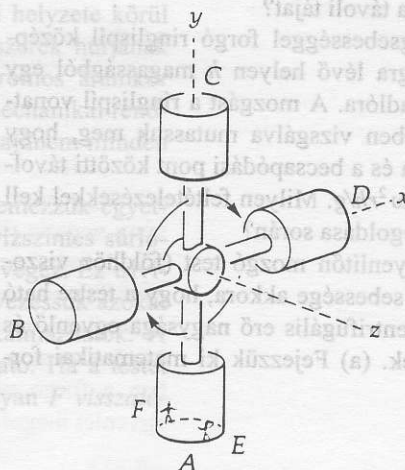
14C-30 Írjuk le, hogyan tudna egy személy a forgásban lévő ringlispil lapján járni úgy, hogy a rá ható Coriolis erő és a centrifugális erő egymással egyenlő nagyságú, de ellentétes irányú legyen! Készítsünk felülről nézve diagramot, (A ringlispil az óramutató járásával ellentétes irányban forog)

14C-31 Az általános esetre érvényes (14-12) egyenlet vektoriális szorzásának elvégzésével mutassuk meg, hogy a centrifugális erő mindig a forgástengelyre merőlegesen kifelé mutat.

14C-32 A $33^\circ 52'$ déli szélességi körön fekvő Sydneyben (Ausztrália) egy 900 kg-os versenyautó nyugati irányban hajt 160 km/h sebességgel. (a) Számítsuk ki az autóra ható Coriolis erő nagyságát és irányát! Készítsünk vázlatot az erő irányának illusztrálására! (b) Ismételjük meg a feladatot arra az esetre, amikor az autó Sydneyben ugyanezzel a sebességgel déli irányban hajt!

14C-33 Mesterlövész balról jobbra haladó célpontra céloz. A célt követő puskacső vízszintes síkban mozog. A puska szögsebessége $1,5 \text{ rad/s}$ abban a pillanatban, amikor az 5 gramm tömegű lövedék 500 m/s sebességgel éppen kilép a csőből. A forgó rendszerben mekkora Coriolis erő hat a lövedékre a cső elhagyásának pillanatában? Milyen irányú ez az erő?

14C-34 A 14-23 ábrán látható tervezett űrállomás négy henger alakú részből áll, ezek a középponti tengelyhez egy-egy aknával kapcsolódnak. Az űrállomást forgásba kell hozni, hogy centrifugális hatások révén a hengerekben dolgozó űrhajósok számára „mesterséges gravitáció” jöjjön létre. Az asztronauták végtelenített mozgólétra hasalva kapaszkodnak, így közlekednek az aknában. A hengerek átmérője 11 méter, hosszuk 13 méter. Az aknák mérete a hengerektől a középponti tengelyig 20 méter. Tekintsük azt az esetet, amikor az űrállomás, ahogyan az ábra mutatja, az xy síkban per centként 4 fordulattal forog. (a) Az A hengerből a középponti tengely felé radiálisan mozogva milyen irányba forduljon az űrhajós, hogy a Coriolis erő a létrához szorítsa, ne pedig ellökje vagy oldalra taszítsa a létrát? (Ha ez nem megoldható, magyarázzuk meg, miért nem!) (b) A hengerek legtávolabbi (sík) lapján lévő asztronauták a földi g nehézségi gyorsulás hányad részét érzékelik? (c) Az A hengerben az E , ill. az F helyen egy-egy asztronauta helyezkedik el (a z tengellyel párhuzamosan). Az E űrhajós egy narancsot dob F űrhajósnak. A dobást végző űrhajós vonatkoztatási rendszerében melyik irányban görbül a mozgás pályája (vagy talán egyenes)?



A henger

14-23 ábra

A 14C-34 feladathoz.

14C-35 Egy ringlispil felülről nézve az óramutató járásával ellentétes irányban $0,50 \text{ rad/s}$ állandó szögsebességgel forog. Egy 40 kg tömegű személy a forgástengelytől mért 2 m távolságban (a ringlispil forgásával megegyező irányban) körpályán halad és a ringlispilhez viszonyított 2 m/s állandó sebességgel körbejár. Határozzuk meg a forgó rendszerben (a) a személyre ható centrifugális erő, (b) a személyre ható Coriolis erő és (c) a személyre ható teljes súrlódási erő nagyságát és irányát; (d) mutassuk meg, hogy inerciarendszerben a (c) részfeladatban szereplő súrlódási erő mint egyetlen haterő elegendő a mozgás leírásához.

14C-36 Vízszintes forgó korongon egy R hosszúságú sugárirányú egyenes vonalra sima csövet erősítettek. A

csőben az $r = R/2$ helyen kicsiny m tömegű testet rögzítenek. A forgó korong állandó ω szögsebességű forgása közben a testet elengedik és hagyják, hogy szabadon kifelé csússzon. (a) A forgó rendszerből szemlélve készítsünk diagramot a kifelé mozgó testre ható erők vízszintes komponenseiről. (b) A forgó rendszerben számolva mekkora munkát végez a centrifugális erő az m tömegű testen, mialatt ez az $r = R/2$ helyről az $r = R$ helyre csúszik? (c) A forgó rendszerben mekkora kifelé mutató radiális v' sebességgel lép ki az m tömegű test a csőből?

14C-37 Egy R sugarú ringliszíp peremére sínt szereltek. A sínen m tömegű önjáró kocsis halad akkora sebességgel, hogy inerciarendszerből nézve helyben marad, mialatt a korong állandó ω szögsebességgel forog. Számítsuk ki a kocsira ható erőket úgy, hogy a feladatot (a) földi rendszerben vizsgáljuk és (b) a forgó koronghoz rögzített vonatkoztatási rendszerben vizsgáljuk.

14C-38 A percként tizet forduló ringliszíp szélén álló kislány 10 m/s vízszintes kezdősebességgel labdát dob a forgástengely felé. Úgy látja, hogy a labda pályagörbéje jobbra kanyarodik. (a) Számítsuk ki a pályagörbe kezdeti vízszintes görbületének sugarát! (b) Amikor a labdát dobó lány a ringliszíp közepe felé néz, jobbra, vagy balra látja elmozdulni a távoli tájat?

14C-39 Az ω szögsebességgel forgó ringliszíp közép-pontjától r távolságra lévő helyen h magasságból egy tárgyat ejtenek a padlóra. A mozgást a ringliszíp vonatkoztatási rendszerében vizsgálva mutassuk meg, hogy az elejtés talppontja és a becsapódási pont közötti távolság jó közelítéssel $\omega^2 r h / g$. Milyen feltételezésekkel kell élnünk a feladat megoldása során?

14C-40 A földi egyenlítőn mozgó test (földhöz viszonyított) pillanatnyi sebessége akkora, hogy a testre ható Coriolis erő és a centrifugális erő nagysága egyenlő és irányuk egybeesnek. (a) Fejezzük ki matematikai for-

mulával ennek a sebességnek a nagyságát azzal a feltételezéssel, hogy ez a lehetséges legkisebb sebesség, amely a mondott feltételt kielégíti. Defináljuk a kifejezésben előforduló összes szimbólumot. (b) Határozzuk meg a sebesség irányát, és készítsünk hozzá rajzos vázlatot.

14C-41 Az egyenlítőn egy kis modellvonat vízszintes körpályán v sebességgel halad. A szerelvény egyik platós kocsiján kicsiny mérleg, rajta m tömegű test nyugszik. (a) Számítsuk ki a mérleg által mutatott „lát-szólagos súly” teljes intervallumát, ami a forgó Föld rendszerében fellépő Coriolis erőnek a következménye! Fogalmazzuk meg válaszukat az egyenlítő R sugarának, a Föld ω szögsebességének, a g nehézségi gyorsulásnak, az m tömegnek és a v sebességnek a függvényében! (b) Milyen irányban mozog a platós kocsi, amikor legnagyobb a „súly”?

14C-42 Egy repülőgép 900 km/h sebességgel vízszintesen repül az Északi Sark felett, egy (a Földdel együtt forgó) hosszúsági kör mentén. A repülőgépben „nyugalomban lévő” függőön van felfüggesztve. Számítsuk ki a repülőgépben, valamint egy az Északi Sarkon felépített „igluban” (eszkimó jégkunyhóban) felfüggesztett függőön zsinórja által bezárt szöget. Tegyük fel, hogy g értéke a repülőgépben ugyanakkora, mint a kunyhóban.

14C-43 Tekintsünk egy testet, amely az egyenlítő kivételével a Föld egy tetszőleges pontján vízszintes irányú v sebességgel mozog. Mutassuk meg, hogy a testre ható Coriolis erő vízszintes komponense az adott helyen független a vízszintes sebesség irányától!

⁹ Átvéve Keith Simon *Mechanics* c. könyvének egy feladatából (Addison-Wesley, Reading, Mass 1979.)



14-20 ábra
A 14C-20 feladathoz.

14B-21 Kicsiny, 2 g tömegű bogár...
14-22 ábra
A 14C-34 feladathoz.

14C-35 Egy ringliszíp...
14C-36 Vízszintes forgó korongon egy...
14C-37 Egy R sugarú ringliszíp peremére...
14C-38 A percként tizet forduló ringliszíp...
14C-39 Az ω szögsebességgel forgó ringliszíp...
14C-40 A földi egyenlítőn mozgó test...
14C-41 Az egyenlítőn egy kis modellvonat...
14C-42 Egy repülőgép 900 km/h sebességgel...
14C-43 Tekintsünk egy testet, amely az egyenlítő...
14C-44 Egy repülőgép 900 km/h sebességgel...
14C-45 Egy repülőgép 900 km/h sebességgel...
14C-46 Egy repülőgép 900 km/h sebességgel...
14C-47 Egy repülőgép 900 km/h sebességgel...
14C-48 Egy repülőgép 900 km/h sebességgel...
14C-49 Egy repülőgép 900 km/h sebességgel...
14C-50 Egy repülőgép 900 km/h sebességgel...

XIV. Fejezet

- 14A-1 $2,2 \text{ m/s}^2$ felfelé
 14A-3 5 m/s^2
 14B-5 $g/2$
 14B-7 $11,7 \text{ m/s}^2$
 14B-9 a) $20,6^\circ$ b) 18 N
 14B-11 $5,5 \text{ N}$
 14A-13 $8,54$ fordulat per perc
 14A-15 $50,4$
 14B-17 délre 60° a vízszintes alatt
 14B-19 $\sqrt{g/R}$
 14B-21 a) a sugárirányban befelé mutató súrlódási erő $f_r = 4,00 \times 10^{-3} \text{ N}$
 b) a súrlódási erő és az $f_{cf} = 4,00 \times 10^{-3} \text{ N}$ centrifugális erő
 c) A korong rendszerében az a)-ban és b)-ben adott erő plusz az $f_{Cor} = 8,00 \times 10^{-4} \text{ N}$ Coriolis erő, a bogár haladási irányától jobbra, valamint egy ugyanakkora tangenciális, balfelé mutató súrlódási erő komponens
 $f_r = 8,00 \times 10^{-4} \text{ N}$
 d) inerciarendszerben: csak a két súrlódási erő összetevő hat: $f_r = 4,00 \times 10^{-3} \text{ N}$ sugár irányban befelé és $f_t = 8,00 \times 10^{-4} \text{ N}$ érintőirányban a bogártól balra.
 14C-23 5 N/m
 14C-25 a) $3,17 \text{ m}$
 14C-27 $gtg\ 2\theta$
 14C-29 $F/(M + 2m/7)$
 14C-31 A válasz adott.
 14C-33 $7,5 \text{ N}$ balra
 14C-35 a) 20 N sugár irányban kifelé
 b) 80 N sugár irányban kifelé
 c) 180 N sugár irányban befelé
 14C-37 a) nulla b) $m\omega^2 R$ befelé
 14C-39 A válasz adott.
 14C-41 a) $4m\omega v$ b) nyugat felé

XV. Fejezet

- 15A-1 a) $0,020 \text{ m}$ b) $0,942 \text{ m/s}$ a középpontban
 c) $17,8 \text{ m/s}^2$ a szélső helyzetekben
 15B-3 $0,0356 \text{ m}$
 15B-5 $4\pi^2 f^2 A/g$
 15B-7 a) $0,910 \text{ s}^{-1}$ b) $0,588 \text{ N}$
 15A-9 a) $0,50 \text{ s}$ b) $128 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ c) $1,5 \text{ m/s}$
 d) $18,9 \text{ m/s}^2$ e) 9 J f) $0,75 \text{ m/s}$
 g) $9,45 \text{ m/s}^2$
 15A-11 a) $1,19 \text{ Hz}$ b) $0,210 \text{ s}$ c) $0,784 \text{ N}$ lefelé
 15B-13 a) $8,17 \text{ cm}$ b) $1,42 \text{ s}^{-1}$

- 15B-15 a) $0,0280 \text{ J}$ b) $1,03 \text{ m/s}$ c) $0,0158 \text{ J}$
 d) $0,0123 \text{ J}$
 15B-17 a) $0,10 \text{ m}$ b) $-0,0654 \text{ m}$ c) $0,262 \text{ s}$
 d) $0,0160 \text{ J}$ e) $0,0160 \text{ J}$
 15A-19 a) $0,136 \text{ Hz}$ b) $7,37 \text{ s}$
 15B-21 A válasz adott.
 15A-23 $19,9 \text{ s}$
 15B-25 $1,58 \text{ s}$
 15B-27 $0,790 \text{ Hz}$
 15B-29 a) $3,559 \text{ Hz}$ b) $3,554 \text{ Hz}; 1,38 \text{ s}$
 15A-31 $1,104 \text{ cm}^3$
 15A-33 952 N/m^2
 15B-35 AY/L_0
 15C-37 a) $3k, 1,5k$ b) $\sqrt{2}:1$
 15C-39 $4mg/l$
 15C-41 A válasz adott.
 15C-43 A válasz adott.
 15C-45 A válasz adott.
 15C-47 $\pi b A^2 \omega$
 15C-49 a) $0,149 \text{ m}$ b) 132°
 15C-51 b) $(v/2)(\Delta L/L)^2$

XVI. Fejezet

- 16A-1 a) $3,32 \times 10^{-5} \text{ N}$ b) $5,92 \times 10^{-3} \text{ N}$
 16A-3 $g/9$
 16A-5 $35,0 \text{ N}$
 16A-7 $30,3 \text{ km/s}$
 16A-9 $2,41$
 16B-11 $4\pi^2/Gm, 3,00 \times 10^{-19} \text{ s}^2/\text{m}^3$
 16B-13 a) $84,4$ perc b) $7,90 \text{ km/s}$
 16B-15 $\frac{128}{81} G\pi^2 R^4 \rho^2$
 16B-17 $8,74 \times 10^7 \text{ m}$
 16B-19 $1,62 \times 10^{27} \text{ kg}$
 16B-21 $1,91 \text{ Gm/l}^2$ az átmérő mentén ellentétes sarok felé
 16A-23 A válasz adott.
 16B-25 a) $1,32 \times 10^{12} \text{ m/s}^2$ b) $9,21 \times 10^{13} \text{ N}$
 c) $7,70 \times 10^{-11} \text{ J}$
 16B-27 $\sqrt{(GM/R)(2-\sqrt{2})}$
 16A-29 2380 m/s
 16A-31 $4R/3$
 16B-33 $3Gm^2/l$
 16B-35 $\sqrt{2Rg(1+R/r)}$
 16B-37 A válasz adott.
 16B-39 A válasz adott.
 16C-41 $\sqrt{125\pi/3G\rho}$
 16C-43 b) $2\pi\sqrt{D^3/3GM}$
 16C-45 b) $6,54 \times 10^{-3}$
 16C-47 $Gm^2/3L^2$
 16C-49 $2\sqrt{R^3/GM}$