1. feladat (4+10=14 pont)
a) Ismertesse az algebra alaptételét!
b) Határozza meg a $z^4 + 8z = 0$ egyenlet gyökeit.

Mo. *a*) Minden legalább elsőfokú komplex polinomnak van gyöke.
b) $0 = z^4 + 8z = z(z^3 + 8)$, ha $z = 0$ vagy $z^3 = 8 = 8(\cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi)$. Így az egyenlet gyökei: $z_1 = 0$, $z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right) = 1 + \sqrt{3}\mathrm{i}$, $z_3 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{3}\right) = -2$, $z_3 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{3}\right) = 1 - \sqrt{3}\mathrm{i}$.

---

2. feladat (10 pont)
Hol konvex, illetve konkáv az $f(x) = \ln(x^2 - 6x + 10)$ függvény? Adja meg a függvény inflexiós pontjait!

Mo. $x^2 - 6x + 10 = (x-3)^2 + 1 > 0$, tehát $D_f = \mathbb{R}$. $f'(x) = \dfrac{2x-6}{x^2-6x+10}$,

$$f''(x) = \frac{2(x^2-6x+10) - (2x-6)^2}{(x^2-6x+10)^2} = \frac{-2x^2+12x-16}{(x^2-6x+10)^2} = 0,$$

ha $x^2 - 6x + 8 = 0$, vagyis $x_{1,2} = \dfrac{6 \pm \sqrt{36-32}}{2} = 3 \pm 1$, vagyis f konvex a $(2,4)$ intervallumon, konkáv a $(-\infty, 2)$ és $(4, \infty)$ intervallumokon, és az $x = 2$, $x = 4$ pontokban inflexiós pontja van.

---

3. feladat (6+10=16 pont)
a) Ismertesse és bizonyítsa a parciális integrálás módszerét.
b) Számolja ki az $\displaystyle\int e^{-2x}\sin(3x)\,\mathrm{d}x$ integrált!

Mo. *a*) A szorzatfüggvény deriválási szabálya alapján

$$f(x)g(x) = \int (f(x)g(x))'\,\mathrm{d}x = \int f'(x)g(x) + g'(x)f(x)\,\mathrm{d}x,$$

amiből a derivált linearitása miatt kapjuk, hogy

$$\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int g'(x)f(x)\,\mathrm{d}x.$$

$$\begin{aligned} I &= \int \underbrace{e^{-2x}}_{u}\underbrace{\sin(3x)}_{v'}\,\mathrm{d}x = -\frac{e^{-2x}\cos(3x)}{3} - \frac{2}{3}\int \underbrace{e^{-2x}}_{u}\underbrace{\cos(3x)}_{v'}\,\mathrm{d}x = \\ &= -\frac{e^{-2x}\cos(3x)}{3} - \frac{2e^{-2x}\sin(3x)}{9} - \frac{4}{9}\cdot I, \end{aligned}$$

így $I = \dfrac{9}{13}\left(-\dfrac{e^{-2x}\cos(3x)}{3} - \dfrac{2e^{-2x}\sin(3x)}{9}\right) = \left(\dfrac{-3\cos(3x)}{13} - \dfrac{2\sin(3x)}{13}\right)e^{-2x}$

4. feladat (14 pont)
Oldja meg az alábbi kezdetiérték-feladatot

$$y' = \cos^2 y \cdot \sin^2 x, \qquad y(0) = \frac{\pi}{4}.$$

Mo. Szétválasztható változójú differenciálegyenlet, $\cos^2 y \equiv 0$, vagyis $y \equiv \dfrac{(2k+1)\pi}{2}$ megoldás .

$$\operatorname{tg} y = \int \frac{1}{\cos^2 y}\,\mathrm{d}y = \int \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \int \frac{1-\cos(2x)}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + c.$$

A kezdeti feltételből $1 = \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4} = c$, tehát a megoldás

$$\operatorname{tg} y = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + 1$$

---

5. feladat (5+12=17 pont)

a) Igazolja, hogy $1 < \alpha$ esetén a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ sor konvergens

b) Adja meg a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{\sqrt{n^3}}$ sor konvergenciatartományát!

Mo. *a*) Az integrálkritérium alapján $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konvergenciája ekvivalens a $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ improprius integrál konvergenciájával , és

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x = \lim_{\omega\to\infty}\left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^{\infty} = \frac{1}{1-\alpha} < \infty.$$

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{n^3}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^{3/2}} = 1 = \frac{1}{R} \quad\Longrightarrow\quad R = 1$, tehát $|x+1| < 1$ esetén a sor konvergens

$x = -2 : \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^3}}$ Leibniz, tehát konvergens

$x = 0 : \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}}$ konvergens

KT (konvergenciatartomány): $[-2, 0]$

6. feladat (6+11=17 pont)
a) Számolja ki a gömbi koordinátákra való áttérés Jacobi-determinánsát.
b) Számolja ki az

$$f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+y^2+z^2}}$$

függvény integrálját a $Q = \{(x,y,z) : 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 64\}$ tartományon.

Mo. *a*) Az $x = r\cos\varphi\sin\vartheta$, $y = r\sin\varphi\sin\vartheta$, $z = r\cos\vartheta$ parciális deriváltjaiból

$$\begin{vmatrix} \cos\varphi\sin\vartheta & -r\sin\varphi\sin\vartheta & r\cos\varphi\cos\vartheta \\ \sin\varphi\sin\vartheta & r\cos\varphi\sin\vartheta & r\sin\varphi\cos\vartheta \\ \cos\vartheta & 0 & -r\sin\vartheta \end{vmatrix} =$$
$$= \left|\cos\vartheta\left(-r^2\left(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi\right)\right)\sin\vartheta\cos\vartheta) - r\sin\vartheta\left(r\cos^2\varphi\sin^2\vartheta + r\sin^2\varphi\sin^2\vartheta\right)\right| =$$
$$= \left|-r^2\left(\sin^2\vartheta+\cos^2\vartheta\right)\sin\vartheta\right| = r^2\sin\vartheta$$

b) Gömbi kooordinátákkal:

$$\iiint_Q f(x,y,z)dV = \int_1^8\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt[3]{r^2}}\cdot r^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r =$$
$$= 2\pi\left[\frac{r^{7/3}}{\frac{7}{3}}\right]_1^8 [-\cos\vartheta]_0^{\pi} = \frac{12\pi}{7}(128-1)$$

---

7. feladat (4+5+3=12 pont)
a) Írja fel az f függvény Fourier-transzformáltjának ismeretében az $x \mapsto xf(x)$ függvény Fourier-transzformáltját.
b) Számolja ki az

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$$

függvény Fourier-transzformáltját.
c) Az a) és b) feladatrészek segítségével adja meg a

$$g(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$$

függvény Fourier-transzformáltját.

Mo. *a*) $(F(x \mapsto xf(x)))(\omega) = \mathrm{i}(\mathcal{F}(f))'(\omega)$

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-\mathrm{i}\omega x}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{1/2}\cos(\omega x)\,\mathrm{d}x = 2\left[\frac{\sin(\omega x)}{\omega}\right]_0^{1/2} = 2\frac{\sin\frac{\omega}{2}}{\omega}$

c) $\displaystyle(\mathcal{F}(g))(\omega) = 2\mathrm{i}\left(\frac{\sin\frac{\omega}{2}}{\omega}\right)' = 2\mathrm{i}\cdot\frac{\frac{1}{2}\cos\frac{\omega}{2} - \sin\frac{\omega}{2}}{\omega^2}$