1. Feladat * (4+8+4=16 pont)

(a) Adja meg az f függvény Fourier-sorának definícióját!

(b) Számitsa ki az $f(x) = x^2$, ha $-\pi \le x < \pi$, 2π periodikus függvény Fourier-sorát!

(c) Az előző feladat segitségével adja meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ értékét!

2. Feladat * (10+10=20 pont)

(a) Számolja ki az $u(x, y) = x \cdot y$, $v(x, y) = y/x$ koordináta-transzformációhoz tartozó Jacobi-determinánst!

(b) Határozza meg a $V = \{2x \le y \le 3x, 3 \le xy \le 4\}$ sík tartomány területét az előző eredmény felhasználásával!

3. Feladat (6+4=10 pont)

(a) Mondja ki a Lagrange középérték tételt!

(b) Igazolja, hogy a ha $f(x)$ deriválható $[a, b]$-ben és a deriváltja ott azonosan 0, akkor $f(x)$ konstans függvény.

4. Feladat (4+7+7+7=25 pont)

(a) Mondja ki a numerikus sorokra vonatkozó gyök-kritérium egyik tanult alakját!

(b) Vizsgálja meg az alábbi számsorok konvergenciáját (abszolút, feltételes, divergens)!

(b.1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n + 1}$ (b.2) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{n^3 + 1}$ (b.3) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (n^{1/n} - 1)^{2n}$

5. Feladat (12 pont)

Oldja meg a következő differenciálegyenletet az adott kezdeti feltétellel!

$$xy' - y = x^3 + 1, \qquad y(2) = 5$$

6. Feladat (7+5+5=17 pont)

Határozza meg a következő hatványsorok konvergenciasugarát valamint az (a) és (b) esetben a konvergenciatartományt is!

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 2^n}{n} (x + 1)^n$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^2} (x - 5)^n$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} (x - 1)^n$

A $*$-al jelölt feladatokból legalább 10 pontot el kell érni!