

1. feladat (7+9=16 pont)

a) Írja föl az elsőrendű, homogén, lineáris, függvény együtthatós differenciálegyenlet általános alakját, és oldja meg az egyenletet!

b) Határozza meg a következő kezdetiérték-probléma explicit megoldását!

$$y'(x) = \frac{x+2}{x^2+1}y(x), \quad y(0) = 2.$$

2. feladat (5+6=11 pont)

a) Igazolja, hogy egy homogén lineáris differenciálegyenlet megoldásai lineáris teret alkotnak!

b) Határozza meg az $y^{(4)} + 8y'' + 16y = 0$ egyenlet általános megoldását!

3. feladat (8+2=10 pont)

Adja meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-5)^{n+2}}{5^{2n}\sqrt{n}}(x+2)^n$ hatványsor konvergenciatartományát! Adjon meg egy olyan intervallumot, ahol a sor egyenletesen konvergens!

4. feladat (5+7=12 pont)

$$f(x, y) = \frac{2x^2 + 3y^2}{4x^2 + y^2}, \quad \text{ha } (x, y) \neq (0, 0); \quad f(0, 0) = c.$$

a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = ?$

b) Milyen $c \in \mathbb{R}$ érték mellett létezik, és mennyi a függvény iránymenti deriváltja az origóban az $\mathbf{f} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ irányban?

5. feladat (5+6=11 pont)

Határozza meg az alábbi két függvény Taylor-sorát és a sorok konvergenciasugarát a megadott középpont körül!

$$f(x) = e^{3x}, \quad x_0 = -4; \quad g(x) = \sin(x) \cos(x), \quad x_0 = 0.$$

6. feladat* (5+6=11 pont)

Legyen T az $A(0, 0)$, $B(4, 0)$, $C(4, 3)$, $D(1, 3)$ pontok által meghatározott trapéz. Alakítsa kétféleképpen kétszeres integrállá az $I = \iint_T e^{6x-y} dT$ kettős integrált, és az egyik módon számolja ki!

7. feladat* (4+10=14 pont)

a) Adja meg a komplex vonalintegrál definícióját integrál-közelítőösszeg határértékeként!

b) Legyen L a 0-ból a $2 + 4i$ pontba mutató, $y = x^2$ egyenletű parabolaív.

$$\int_L (\cos(2z) + \bar{z}) dz = ?$$

8. feladat* (3+12=15 pont)

$$a) \oint_{|z-3|=2} \frac{\sin(2z)}{z^2(z-1+i)} dz = ? \quad b) \oint_{|z-3|=5} \frac{\sin(2z)}{z^2(z-1+i)} dz = ?$$

A görbéket egyszer járjuk körbe pozitív irányban. A végeredményt algebrai alakban adja meg!