| **ANALÍZIS 1.** | **I. VIZSGA** | **2016. január 11.** |
|---|---|---|
| Mérnök informatikus szak | $\beta$-variáns | Munkaidő: 90 perc |

**1. feladat (10 pont)** Adja meg az $z^4-(1+2i)z^2+i-1=0$ egyenlet összes megoldását.

---

$\dfrac{1+2i+\sqrt{(1+2i)^2-4i+4}}{2}=\dfrac{1+2i+\sqrt{1}}{2}$, vagyis $z^2 \overset{\mathbf{1p}}{=} i \overset{\mathbf{1p}}{=} \left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$ vagy $z^2 \overset{\mathbf{1p}}{=} 1+i \overset{\mathbf{2p}}{=} \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, vagyis $z_1 \overset{\mathbf{1p}}{=} \left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, $z_2 \overset{\mathbf{1p}}{=} \left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$, $z_3 \overset{\mathbf{2p}}{=} \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right)$, $z_4 \overset{\mathbf{1p}}{=} \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{8}+i\sin\frac{9\pi}{8}\right)$.

---

---

**2. feladat (8+7 pont)**

a) Igazolja, hogy ha $a_n\to\infty$ esetén $\frac{1}{a_n}\to 0$. Igaz-e, hogy $a_n\to 0$ esetén $\frac{1}{a_n}\to\infty$?

b) Adja meg az alábbi határértékeket:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+2}{n^2-1}\right)^{n^3}, \qquad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2+2}\right)^{n^3}$$

---

a) $a_n>0$, ha $n>N_1$ (**1p**), vagyis $\varepsilon>\left|\frac{1}{a_n}-0\right|=\frac{1}{a_n}$ pontosan akkor, ha $a_n>\frac{1}{\epsilon}$ (**2p**). Mivel $a_n\to\infty$, így létezik $N_2>N_1$, hogy $n>N_2$ esetén ez teljesül (**2p**), ez lesz tehát az $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ sorozat $\varepsilon$-hoz tartozó küszöbszáma (**1p**). A másik állítás nem igaz, például $a_n=\frac{(-1)^n}{n}\to 0$,de $\frac{1}{a_n}=(-1)^n n\not\to\infty$ (**2p**).

b) $\left(\dfrac{n^2+2}{n^2-1}\right)^{n^2} \overset{\mathbf{1p}}{=} \dfrac{\left(1+\frac{2}{n^2}\right)^{n^2}}{\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}} \overset{\mathbf{1p}}{\to} e^3$,vagyis minden $\varepsilon>0$ számhoz létezik $N$, hogy $n>N$ esetén

$$\left(\frac{n^2+2}{n^2-1}\right)^{n^3} \overset{\mathbf{1p}}{>} (e^3-\varepsilon)^n \overset{\mathbf{1p}}{\to} \infty,$$

ha $e^3-\varepsilon > 1$, vagyis a speciális rendőrelv értelmében $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+2}{n^2-1}\right)^{n^3} \overset{\mathbf{1p}}{=} \infty$.

A második sorozat ennek reciproka, így $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-1}{n^2+2}\right)^{n^3} = 0$ (**2p**).

---

---

**3. feladat (7 pont)**
Adja meg az alábbi sorozat torlódási pontjainak halmazát, limesz szuperiorját és limesz inferiorját. Konvergens a sorozat?

$$a_n = \sqrt[n]{3^{2n} + (-9)^n + n^3}.$$

---

Páros $n$ esetén

$$9 \leftarrow 9\sqrt[n]{2} = \sqrt[n]{2\cdot 9^n} \le a_n = \sqrt[n]{2\cdot 9^n + n^3} \le \sqrt[n]{3\cdot 9^n} = 9\sqrt[n]{3} \to 9, \qquad (\mathbf{3p})$$

páratlan $n$ esetén

$$a_n = \sqrt[n]{n^3} = \left(\sqrt[n]{n}\right)^3 \to 1, \qquad (\mathbf{1p})$$

vagyis a torlódási pontok halmaza $\{1, 9\}$ (**1p**), és

$$1 = \liminf a_n \neq \limsup a_n = 9, \qquad (\mathbf{1p})$$

vagyis a sorozat nem konvergens (**1p**).

---

---

**4. feladat (11 pont)**
Milyen $a$ és $b$ esetén lesz az

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(ax)}{\operatorname{sh} 3x}, & \text{ha } x < 0 \\ b, & \text{ha } x = 0 \\ (\operatorname{ch} x)^{\frac{1}{x}}, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$

függvény az értelmezési tartomány minden pontjában folytonos?

---

$f$ az $x \neq 0$ pont kivételével folytonos függvények összetétele, illetve hányadosa, vagyis folytonos (**1p**).

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} \frac{\sin(ax)}{\operatorname{sh} 3x} = \lim_{x\to 0-} \frac{a\cos(ax)}{3\operatorname{ch} 3x} = \frac{a}{3}, \qquad \textbf{(2p)}$$

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} (\operatorname{ch} x)^{\frac{1}{x}} \overset{\textbf{2p}}{=} e^{\lim_{x\to 0+} \frac{\ln \operatorname{ch} x}{x}} \overset{\textbf{1p}}{=} 1,$$

mert

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\ln \operatorname{ch} x}{x} \overset{\textbf{1p}}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}}{1} \overset{\textbf{1p}}{=} 0.$$

$f$ folytonos a 0 pontban, ha

$$\frac{a}{3} = \lim_{x\to 0-} f(x) = f(0) = \lim_{x\to 0+} f(x) = b = 1, \qquad \textbf{(2p)}$$

vagyis ha $a = 3$, $b = 1$ (**1p**).

---

---

**5. feladat (9 pont)**

Adja meg az

$$f(x) = \frac{\operatorname{th}^2(5x)}{2\operatorname{arctg}(3x) + 1}$$

függvény érintőegyenesének egyenletét az $x_0 = 0$ pontban.

---

$f(0) = 0$ (**1p**), és

$$f'(x) = \frac{5\frac{2\operatorname{th}(5x)}{\operatorname{ch}^2(5x)}(2\operatorname{arctg}(3x)+1) - \operatorname{th}^2(5x)\frac{6}{9x^2+1}}{(2\operatorname{arctg}(3x)+1)^2}, \qquad \textbf{(6p)}$$

vagyis $f'(0) \overset{\textbf{1p}}{=} 0$, így az érintőegyenes egyenlete $y = 0$ (**1p**).

---

---

**6. feladat (6+7 pont)**

a) Ismertesse Weierstrass első és második tételét.

b) Adja meg az $f(x) = \operatorname{sh}(x^3 - 9x^2 + 24x + 100)$ függvény minimumát illetve maximumát az $[1, 3]$ intervallumon.

a) Weierstrass I: korlátos és zárt intervallumon folytonos függvény korlátos. (**3p**)
Weierstrass II: korlátos és zárt intervallumon folytonos függvény felveszi a maximumát és a minimumát. (**3p**)

b) $f(1) = \operatorname{sh} 116$, $f(3) = \operatorname{sh} 118$ (**1p**), és

$$f'(x) \overset{\mathbf{2p}}{=} (3x^2 - 18x + 24)\operatorname{ch}(x^3 - 9x^2 + 24x + 100) = 0$$

ha $3x^2 - 18x + 24 = 0$, vagyis ha $x = 4 \notin [1, 3]$, vagy $x = 2 \in [1, 3]$ (**2p**). $f(2) = \operatorname{sh} 124$, tehát az sh függvény szigorú monoton növekedése miatt a minimum $\operatorname{sh} 116$, a maximum pedig $\operatorname{sh} 124$ (**2p**). (Ugyanezen monotonitás miatt elég lenne a belső függvény minimumát, illetve maximumát keresni, az is teljes értékű megoldás.)

---

---

**7. feladat*** **(5+5 pont)** Számolja ki az alábbi integrálokat

$$a)\ \int_{-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}} \operatorname{tg}(2x)dx, \qquad b)\ \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{ctg}(2x)dx.$$

---

a) Páratlan függvény integrálja origóra szimmetrikus intervallumon, vagyis az integrál értéke 0 (**5p**). Vagy így:

b) $$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{ctg}(2x) \overset{\mathbf{1p}}{=} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos(2x)}{\sin(2x)}dx \overset{\mathbf{2p}}{=} \left[\frac{1}{2}\ln\sin(2x)\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \overset{\mathbf{2p}}{=} \frac{1}{2}\left(\ln\frac{\sqrt{3}}{2} - \ln\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0.$$

---

---

**8 feladat*** **(11 pont)**
Megfelelő helyettesítéssel határozza meg az alábbi integrált:

$$\int \frac{1}{e^x + 6}dx.$$

---

$t \overset{\mathbf{1p}}{=} e^x$ helyettesítéssel $x \overset{\mathbf{1p}}{=} \ln t$, és $(\ln t)' \overset{\mathbf{1p}}{=} \frac{1}{t}$, vagyis

$$\int \frac{1}{e^x+6}dx \overset{\mathbf{1p}}{=} \int \frac{1}{t(t+6)}dt,$$

ahol

$$\frac{1}{t(t+6)} \overset{\mathbf{1p}}{=} \frac{A}{t} + \frac{B}{t+6} \overset{\mathbf{1p}}{=} \frac{A(t+6)+Bt}{t(t+6)},$$

így $B \overset{\mathbf{1p}}{=} \frac{1}{6}$, $A \overset{\mathbf{1p}}{=} -\frac{1}{6}$. Ebből következik, hogy

$$\int \frac{1}{e^x+6}dx \overset{\mathbf{1p}}{=} \frac{1}{6}\left(\int \frac{1}{t} - \int \frac{1}{t+6}dt\right) \overset{\mathbf{1p}}{=} \frac{\ln|t| - \ln|t+6|}{6} + c \overset{\mathbf{1p}}{=} \frac{\ln e^x - \ln|e^x+6|}{6} + c.$$

---

---

**9 feladat* (6+8 pont)**

a) Hogyan értelmezzük az $\int_a^b f(x)dx$ integrált, ha $\lim_{x\to a+} f(x) = \infty$?

b) Adja meg az

$$\int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)\sqrt[5]{\operatorname{arctg} x}}dx$$

integrál értékét, ha létezik.

---

a) $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$, ha $f \in \mathcal{R}(a+\varepsilon, b)$, illetve ha a határérték létezik (**6p**).

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)\sqrt[5]{\operatorname{arctg} x}}dx \overset{\mathbf{2p}}{=} \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{(x^2+1)\sqrt[5]{\operatorname{arctg} x}}dx$, és

$$\int \frac{1}{(x^2+1)\sqrt[5]{\operatorname{arctg} x}}dx \overset{\mathbf{1p}}{=} \int (\operatorname{arctg} x)' (\operatorname{arctg} x)^{\frac{1}{5}}\, dx \overset{\mathbf{1p}}{=} \frac{5}{4}(\operatorname{arctg} x)^{\frac{4}{5}} + c$$

így

$$\int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)\sqrt[5]{\operatorname{arctg} x}}dx \overset{\mathbf{1p}}{=} \frac{5}{4} \lim_{\varepsilon\to 0+} \left[(\operatorname{arctg} x)^{\frac{4}{5}}\right]_\varepsilon^1 =$$

$$\overset{\mathbf{1p}}{=} \frac{5}{4}\left((\operatorname{arctg} 1)^{\frac{2}{3}} - \lim_{\varepsilon\to 0+} (\operatorname{arctg} \varepsilon)^{\frac{4}{5}}\right) \overset{\mathbf{2p}}{=} \frac{5}{4}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{4}{5}}$$