Valószínűségszámítás vizsga dolgozat
Műszaki informatika szak
2012. június 6.

1. Legyenek az A és B független események, C pedig mindkettőjüket kizáró esemény. $\mathbf{P}(A) = \frac{1}{6}, \mathbf{P}(B) = \frac{1}{2}, \mathbf{P}(C) = \frac{1}{3}$. $\mathbf{P}\left(\bar{A} + B + C\right) = ?$

   Megoldás: $\mathbf{P}\left(\bar{A} + B + C\right) = \mathbf{P}\left(\bar{A}\right) + \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(C) - \mathbf{P}\left(\bar{A}B\right) - \mathbf{P}(BC) - \mathbf{P}\left(\bar{A}C\right) + \mathbf{P}\left(\bar{A}BC\right) =$
   $= \mathbf{P}\left(\bar{A}\right) + \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(C) - \mathbf{P}\left(\bar{A}\right)\mathbf{P}(B) - 0 - \mathbf{P}(C) + 0 = \frac{5}{6} + \frac{1}{2} - \frac{5}{12} = \frac{11}{12}.$

2. Legyen $X \in N(1,1)$, $Y = 3X + 8$, $Z = 5 - 2X$. Számolja ki az $R(Y, Z)$ korrelációs együtthatót!

   Megoldás: $Y = -\frac{3}{2}Z + \frac{31}{2} \Longrightarrow R(Y, Z) = -1.$

3. Dobjunk 10-szer egy szabályos dobókockával! Jelölje X a hatosok, Y pedig a páros dobások számát! Számolja ki a $\mathbf{E}(Y \mid X)$ regressziót!

   Megoldás: $X \in B\left(10, \frac{1}{6}\right), Y \in B\left(10, \frac{1}{2}\right);$
   $\mathbf{P}(Y = k \mid X = l) = \binom{10-l}{k-l}\left(\frac{2}{5}\right)^{k-l}\left(\frac{3}{5}\right)^{(10-l)-(k-l)}, k \geq l \Longrightarrow$
   $\mathbf{E}(Y \mid X = l) = (10 - l)\frac{2}{5}. \Longrightarrow \mathbf{E}(Y \mid X) = (10 - X)\frac{2}{5}.$

4. Generáljunk 100 db $U(0,1)$ teljesen független véletlen számot: $X_1, X_2, ..., X_{100}$. Becsüljük meg a

   $$\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{100} X_i > 51\right)$$

   valószínűséget!

   Megoldás: Legyen $S_{100} = \sum\limits_{i=1}^{100} X_i$. $\mathbf{E}X_i = \frac{1}{2}, \boldsymbol{\sigma}X_i = \frac{1}{\sqrt{12}}$.
   A centrális határeloszlás tételből kapjuk, hogy

   $$\mathbf{P}\left(\frac{S_{100} - 50}{\sqrt{100} \cdot \frac{1}{\sqrt{12}}} > 0,346\right) \approx 1 - \Phi(0,346) \approx 0,3635.$$

5. Egy automata darabolónak 1200 mm hosszúságú acélszalagokat kell levágnia. Előzetes adatfelvételből ellenőriztük, hogy a gép által készített darabok hossza normális eloszlású valószínűségi változónak tekinthető $\sigma_0 = 3$ mm szórással. Ellenőrizni akarjuk a gép beállításának helyes voltát. Ezért a gyártmányokból 16 db szalagot véletlenszerűen kiválasztunk, és lemérünk. Az adatok az alábbiak voltak mm-ben:
$1193, 1196, 1198, 1195, 1198, 1199, 1204, 1193,$
$1203, 1201, 1196, 1200, 1191, 1196, 1198, 1191.$
Vizsgálja meg, hogy van-e szignifikáns eltérés az előírt mérettől!

   Megoldás: Mivel ismerjük a minta szórását, egymintás u-próbával dönthetünk a nullhipotézisről. Az átlagra: $\overline{x}_{16} = 1197$ adódik. Ha igaz a nullhipotézis, az átlagstatisztika eloszlása:

$$\overline{X}_{16} \in N\left(1200, \frac{3}{4}\right) \Longrightarrow T = \frac{\overline{X}_{16} - 1200}{0,75} \in N\left(0, 1\right).$$

   Döntsünk $\varepsilon = 0,05$ szignifikancia szinten a nullhipotézisről. A kritikus értéket a

$$2\Phi\left(u_{0,05}\right) - 1 = 0,95 \Longleftrightarrow \Phi\left(u_{0,05}\right) = 0,975$$

   Összefüggésből számoljuk: $u_{0,05} = 1,96$. A T próbastatisztika számított értéke:

$$T = \frac{1197 - 1200}{0,75} = -4$$

   Mivel abszolútértékben ez nagyobb a kritikus értéknél, ezen a szignifikancia szinten elvetjük a nullhipotézist, vagyis a szalagok hossza jelentősen eltér a beállítási értéktől, újra kell kalibrálni a vágógépet.

6. Ismertesse a Poincare-formulát!

   Megoldás: $\mathbf{P}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbf{P}\left(A_i\right) - \sum\limits_{i \neq j} \mathbf{P}\left(A_i \cdot A_j\right) + - \ldots \left(-1\right)^{n-1} \mathbf{P}\left(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n\right).$