Valószínűségszámítás vizsga dolgozat megoldása
Műszaki informatika szak
2011. június 15., **1. csoport**

1. Mekkora valószínűséggel esik a legnagyobb kihúzott lottószám 80 és 90 közé (a 80-at és a 90-et is beszámítva)?
Megoldás: $p = \frac{\sum\limits_{k=80}^{90} \binom{k-1}{4}}{\binom{90}{5}}$

2. Az I. dobozban egy piros és egy fehér, a II. dobozban két piros és egy fehér golyó van. Feldobnak egy kockát. Ha a dobás eredménye nem nagyobb, mint kettő, a II. dobozból, különben az I. dobozból húznak ki két golyót visszatevéssel. Ha tudjuk, hogy mindkétszer pirosat húznak, akkor melyik dobozból húzásnak nagyobb a feltételes valószínűsége?
Megoldás: A : 1-et vagy 2-őt dobunk a kockával, $\mathbf{P}(A) = \frac{1}{3}$
B : visszatevéssel két pirosat húzunk, $\mathbf{P}(B \mid A) = \frac{4}{9}, \mathbf{P}\left(B \mid \overline{A}\right) = \frac{1}{4}$
Bayes-tétel: $\mathbf{P}(A \mid B) = \frac{\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}} = \frac{8}{17}, \mathbf{P}\left(\overline{A} \mid B\right) = \frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}} = \frac{9}{17}$
Az I. dobozból húztak nagyobb eséllyel.

3. Legyen $X \in U(0,1)$, azaz a 0-1 intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó. $Y = \sqrt{2X+1}$.
$$f_Y(t) = ?$$
Megoldás: $F_Y(t) = \mathbf{P}(Y < t) = \mathbf{P}\left(X < \frac{t^2-1}{2}\right) = \frac{t^2-1}{2}, t \in \left(1, \sqrt{3}\right)$
$f_Y(t) = t, t \in \left(1, \sqrt{3}\right)$

4. Legyen az X és Y együttes eloszlásfüggvénye:
$$F_{X,Y}(x,y) = xy^3,\ 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$$
Számolja ki az $\mathbf{E}(X \mid Y)$ regressziót!
Megoldás: X, Y függetlenek, $X \in U(0,1) \Longrightarrow \mathbf{E}(X \mid Y) = \mathbf{E}X = \frac{1}{2}$

5. Legyenek $X, Y \in N(0,1)$ független standard normális eloszlású valószínűségi változók!
$$\mathrm{R}(2X - Y, X - 3 + Y) = ?$$
Megoldás: $\mathrm{cov}(2X - Y, X - 3 + Y) = 2\boldsymbol{\sigma}^2 X - \boldsymbol{\sigma}^2 Y = 1$
$\boldsymbol{\sigma}^2(2X - Y) = 4\boldsymbol{\sigma}^2 X + \boldsymbol{\sigma}^2 Y = 5, \boldsymbol{\sigma}^2(X - 3 + Y) = \boldsymbol{\sigma}^2 X + \boldsymbol{\sigma}^2 Y = 2$
$\mathrm{R}(2X - Y, X - 3 + Y) = \frac{1}{\sqrt{10}}$

6. Mondja ki a centrális határeloszlás tételt!
Megoldás: Legyenek $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ azonos eloszlású, véges szórású, teljesen független valószínűségi változók. Jelölje m a közös várhatóértéket, D a közös szórást. Akkor

$$\mathbf{P}\left(\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - m}{D}\sqrt{n} < t\right) \longrightarrow \phi(t), (n \to \infty, t \in \mathbb{R})$$

, ahol $\Phi(t)$ a standard normális eloszlásfüggvény.

Valószínűségszámítás vizsga dolgozat megoldása

Műszaki informatika szak
2011. június 15., 2. csoport

1. Mekkora valószínűséggel esik a legkisebb kihúzott lottószám 10 és 20 közé (a 10-et és a 20-at is beszámítva)?
   Megoldás: $p = \frac{\sum\limits_{k=10}^{20} \binom{90-k}{4}}{\binom{90}{5}}$

2. Az I. dobozban egy piros és egy fehér, a II. dobozban két piros és egy fehér golyó van. Feldobnak egy kockát. Ha a dobás eredménye nem kisebb, mint öt, a II. dobozból, különben az I. dobozból húznak ki két golyót visszatevéssel. Ha tudjuk, hogy mindkétszer fehéret húznak, akkor melyik dobozból húzásnak nagyobb a feltételes valószínűsége?
   Megoldás: A : 5-öt vagy 6-ot dobunk a kockával, $\mathbf{P}(A) = \frac{1}{3}$
   B : visszatevéssel két fehéret húzunk, $\mathbf{P}(B \mid A) = \frac{1}{9}, \mathbf{P}\left(B \mid \overline{A}\right) = \frac{1}{4}$
   Bayes-tétel: $\mathbf{P}(A \mid B) = \frac{\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}} = \frac{2}{11}, \mathbf{P}\left(\overline{A} \mid B\right) = \frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}} = \frac{9}{11}$
   Az I. dobozból húztak nagyobb eséllyel.

3. Legyen $X \in U(0,1)$, azaz a 0-1 intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó. $Y = \sqrt{3X+2}$.
   $$f_Y(t) = ?$$
   Megoldás: $F_Y(t) = \mathbf{P}(Y < t) = \mathbf{P}\left(X < \frac{t^2-2}{3}\right) = \frac{t^2-2}{3}, t \in \left(\sqrt{2}, \sqrt{5}\right)$
   $f_Y(t) = \frac{2}{3}t, t \in \left(\sqrt{2}, \sqrt{5}\right)$

4. Legyen az X és Y együttes eloszlásfüggvénye:
   $$F_{X,Y}(x,y) = x^2 y,\ 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$$
   Számolja ki az $\mathbf{E}(Y \mid X)$ regressziót!
   Megoldás: X, Y függetlenek, $Y \in U(0,1) \Longrightarrow \mathbf{E}(Y \mid X) = \mathbf{E}Y = \frac{1}{2}$

5. Legyenek $X, Y \in E(1)$ független exponenciális eloszlású valószínűségi változók!
   $$\mathrm{R}(5X+Y, 2Y-X+3) = ?$$
   Megoldás: $\mathrm{cov}(5X+Y, 2Y-X+3) = -5\boldsymbol{\sigma}^2 X + 2\boldsymbol{\sigma}^2 Y = -3$

$\boldsymbol{\sigma}^2(5X+Y) = 25\boldsymbol{\sigma}^2 X + \boldsymbol{\sigma}^2 Y = 26, \boldsymbol{\sigma}^2(2Y - X + 3) = \boldsymbol{\sigma}^2 X + 4\boldsymbol{\sigma}^2 Y = 5$
$\mathrm{R}(5X+Y, 2Y-X+3) = \frac{-3}{\sqrt{130}}$

6. Mondja ki a Moivre-Laplace tételt!
   Megoldás: pl.:
   Ha $X_n \in B(n,p), Z_n = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$, *akkor*

$$\mathbf{P}(Z_n < t) \to \Phi(t), \forall t \in \mathbb{R}.$$

Azaz a binomiális eloszlás standardizáltja, ha n nagy, jól közelíthető a standard normális eloszlással.
($\Phi(t)$ a standard normális eloszlásfüggvény.)