SZABTECH 4. GYAKORLAT ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEINEK KIDOLGOZÁSA

① $i_T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t-nT)$ $\leftarrow$ Tudjuk: $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$ és $\mathcal{L}\{f(t-T)\} = e^{-sT}$

(Eltolási-tétel)

$\downarrow$

$$I_T(s) = \mathcal{L}\{i_T(t)\} = \sum_{n=0}^{\infty} 1 \cdot e^{-s \cdot nT} = \boxed{\frac{1}{1-e^{-s \cdot T}} = I_T(s)}$$

$\uparrow$

Geometriai sor összegképlete: $S = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \ldots = \frac{a_1}{1-q}$

Pólusok: $1 - e^{-sT} = 0 \implies 1 = e^{-sT} = \underbrace{1 \cdot e^{j2k\pi}}_{\text{„1" exponenciális alakban}}$

$$-sT = j2k\pi$$

Végtelen sok pólusa van! $\longrightarrow$ $\boxed{s = -j\frac{2k\pi}{T}}$, ahol $k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$

② $f^*(t) = f(t) \cdot i_T(t)$ $\leftarrow$ $i_T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t-nT)$

$\Downarrow$

Komplex konvolúciós tétel miatt:

$$F^*(s) = \frac{1}{2\pi \cdot j} \cdot \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(\sigma) \cdot \frac{1}{1-e^{-(s-\sigma) \cdot T}} \, d\sigma$$

A Residuum-tétel szerint (negatív irányítást figyelembe véve):

$$F^*(s) = -\sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{Res}_{\sigma_k} \left\{ F(\sigma) \cdot \frac{1}{1-e^{-(s-\sigma)T}} \right\}$$

$\swarrow$

L'Hospital szabályt felhasználva!

$$\mathrm{Res}_{\sigma_k} = \lim_{\sigma \to \sigma_k} (\sigma - \sigma_k) \cdot F(\sigma) \cdot \frac{1}{1-e^{-(s-\sigma)T}} = -\frac{F(\sigma)}{T}$$

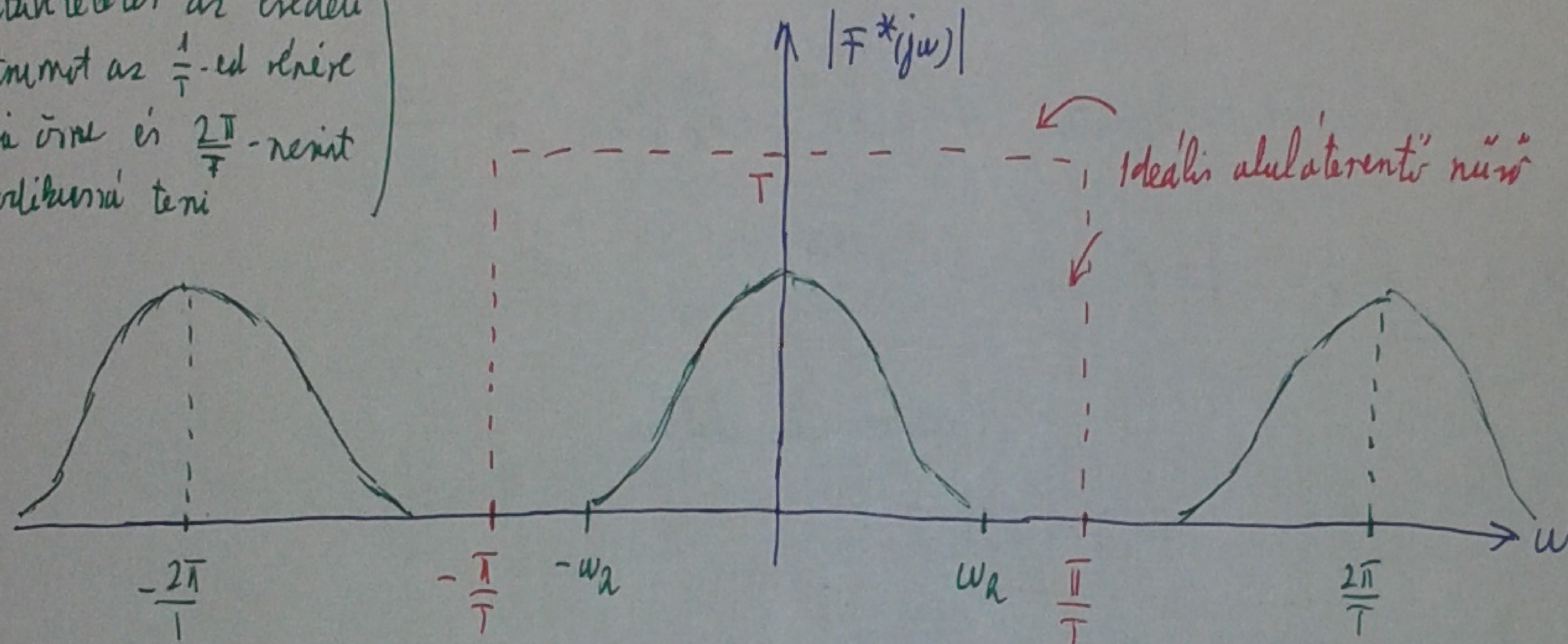
Tehát $F^*(s)$ és speciálisan $F^*(j\omega)$ periodikus és az alábbi alakú:

$$\boxed{F^*(j\omega) = \frac{1}{T}\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty} F\left(j\cdot\left(\omega + k\cdot\frac{2\pi}{T}\right)\right)}$$ ← Levezetését nem kötelező megtanulni!

$\Downarrow$ t periódus hossza : $\frac{2\pi}{T}$

(3) Ha az analóg jel sávkorlátozott és határ-körfrekvenciája $\omega_h = 2\pi f_h$, továbbá a mintavételi idő kielégíti a $T \leq \frac{\pi}{\omega_h} = \frac{1}{2f_h}$ feltételt, akkor az analóg jel rekonstruálható a matematikailag mintavételezett jelből (az analóg jel mintáiból) egy T erősítésű ideális aluláteresztő szűrővel, amelynek határ-körfrekvenciája $\omega_N = \frac{\pi}{T}$ >> Nyquist-körfrekvencia

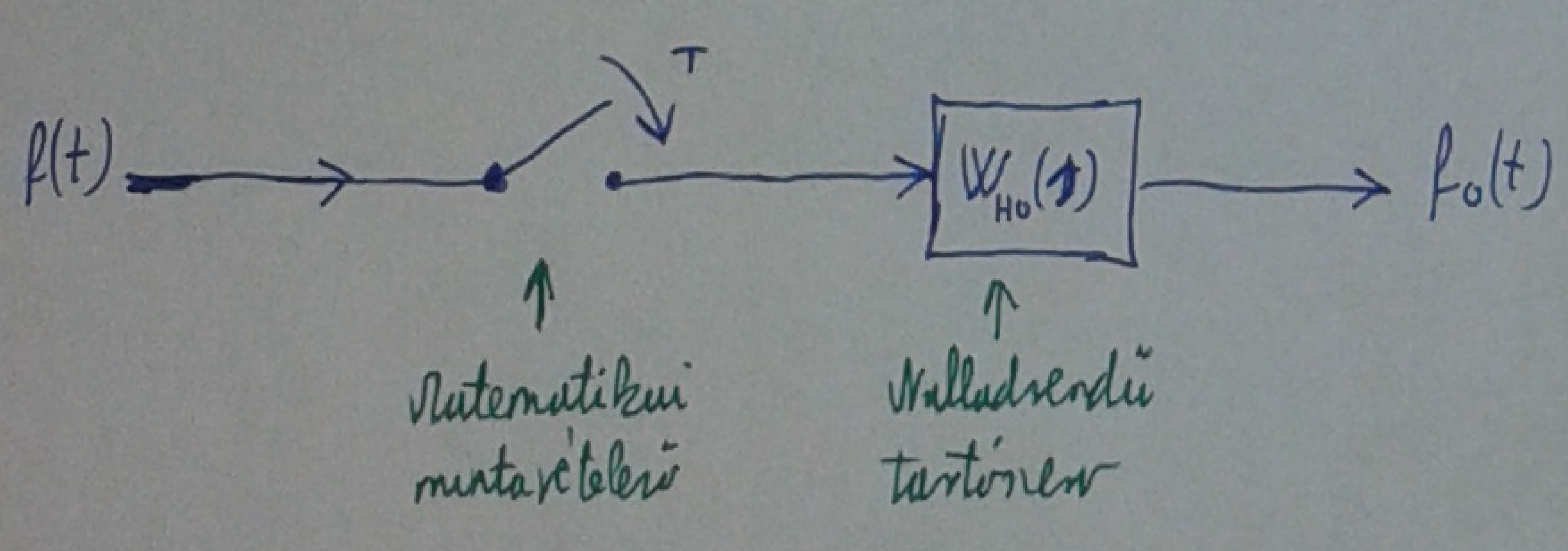
(* mintavételezés az eredeti spektrumot az $\frac{1}{T}$-ed részére nyomja össze és $\frac{2\pi}{T}$-nként periodikussá teszi)

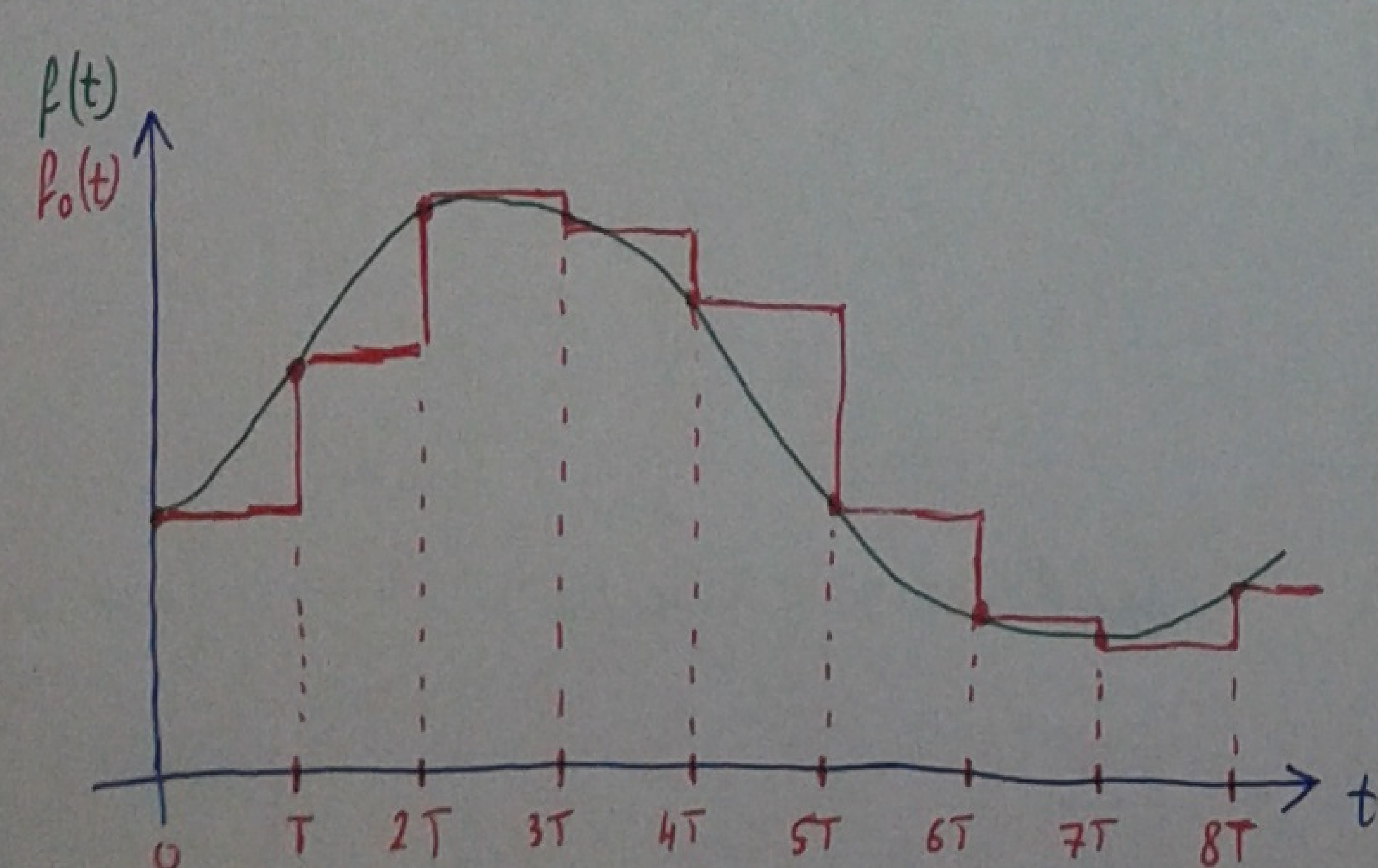


FAPADOSAN: Ha a periodikus spektrum egy periódusa szűkebb mint $\frac{2\pi}{T}$, akkor a szűrő ki tudja vágni! Ha viszont szélesebb, akkor átlapolódik és a szűrő nem tud egyetlen periódust kivágni!

$\frac{\pi}{T} = \omega_N$ ← Nyquist-körfrekvencia

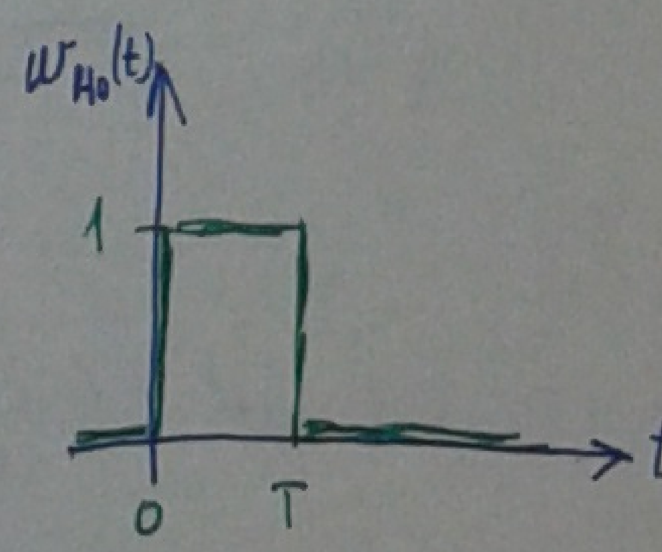
(4)





Nulladrendű tartószerv:

$$w_{H0}(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon(t-T)$$



$$W_{H0}(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s}\cdot e^{-sT} = \frac{1-e^{-sT}}{s}$$

$$W_{H0}(j\omega) = \frac{1-e^{-j\omega T}}{j\omega} = T \cdot \underbrace{\frac{e^{j\omega \frac{T}{2}} - e^{-j\omega\frac{T}{2}}}{2j}}_{\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)} \cdot \frac{1}{\frac{\omega T}{2}} \cdot e^{-j\omega\frac{T}{2}} =$$

$$= T \cdot \frac{\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\frac{\omega T}{2}} \cdot e^{-j\omega\frac{T}{2}}$$

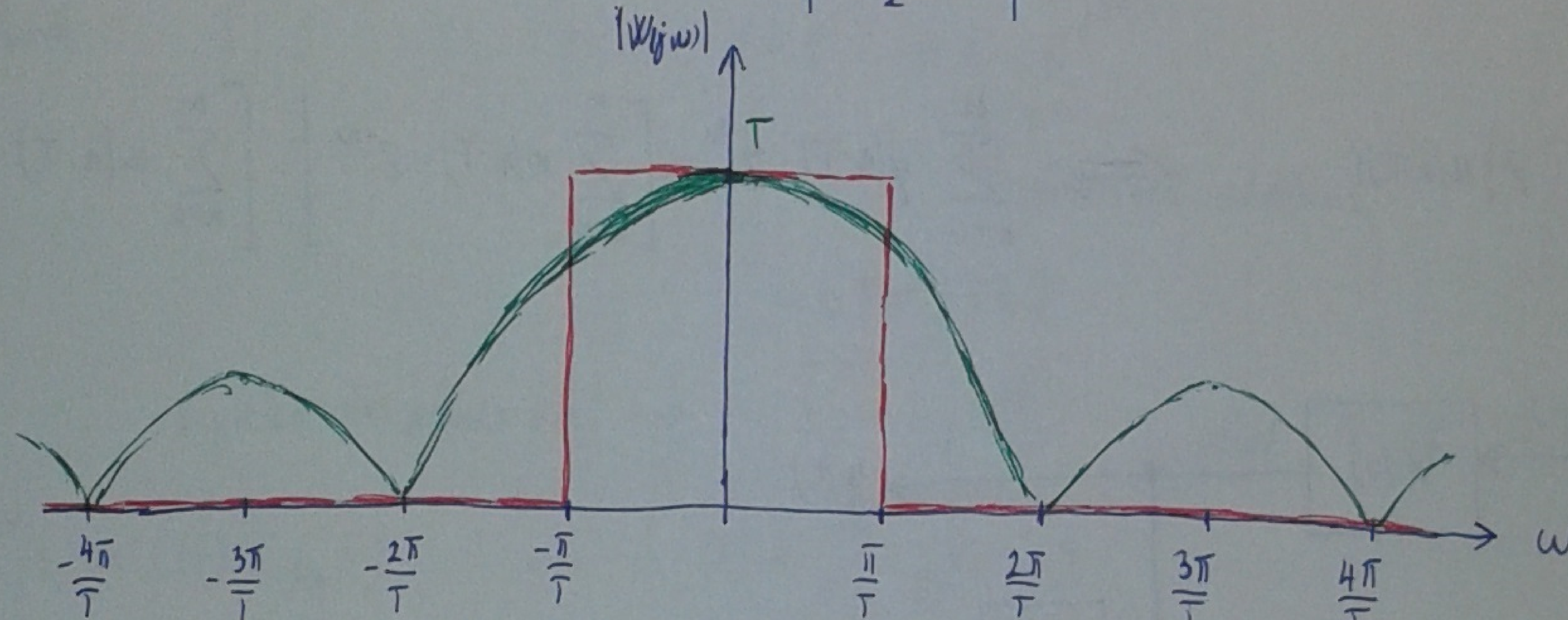
kicsi T esetén

$$|W_{H0}(j\omega)| = T \cdot \left| \frac{\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\frac{\omega T}{2}} \right| \approx T$$

Ha $-\frac{2\pi}{T} < \omega < \frac{2\pi}{T}$ akkor a második tag konstans nulla.

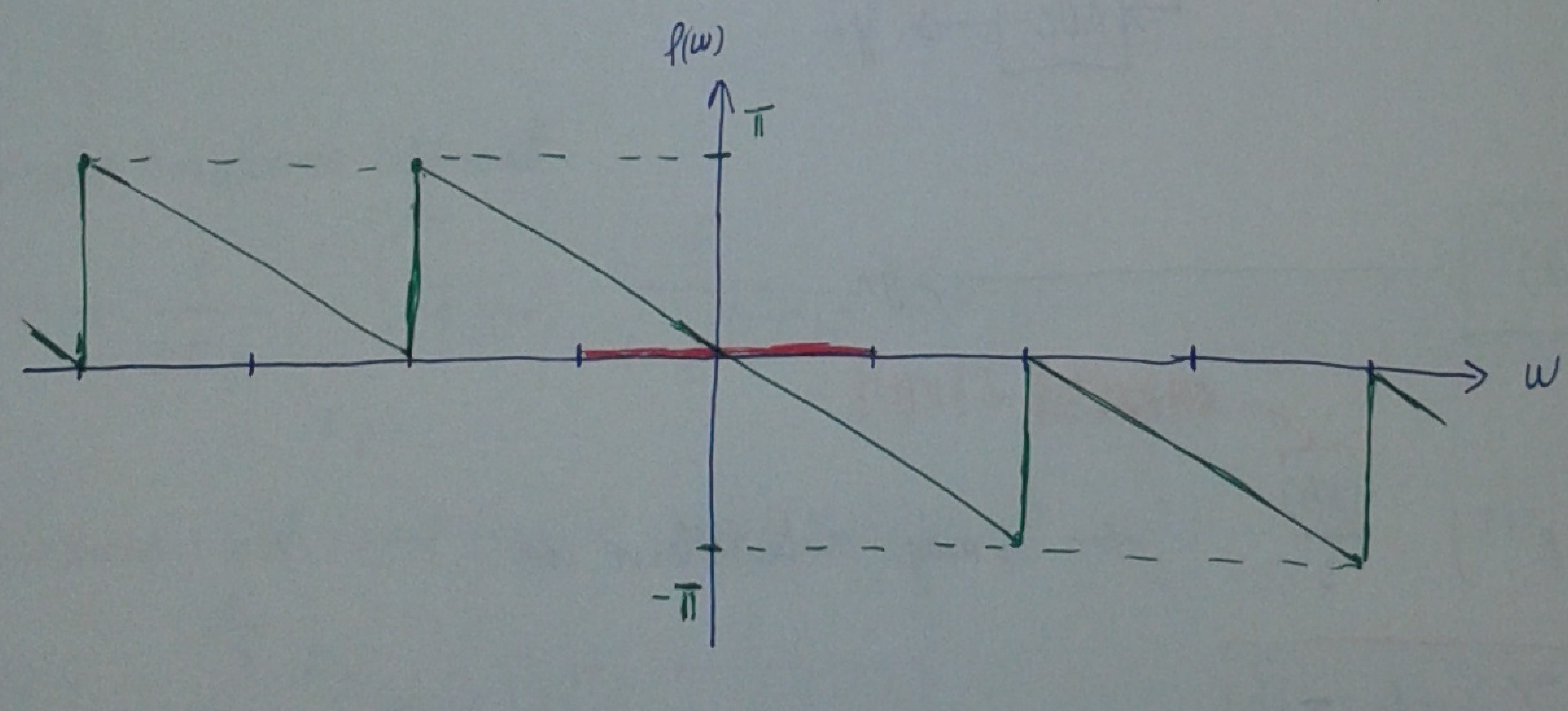
$$\varphi_{H0}(\omega) = -\omega \cdot \frac{T}{2} + \arg\left(\frac{\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\frac{\omega T}{2}}\right) \approx -\omega\frac{T}{2}$$

5) $W_{H0}(s) = \frac{1-e^{-sT}}{s} \Rightarrow |W_{H0}(j\omega)| = T \cdot \left| \frac{\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\frac{\omega T}{2}} \right|$ és $\varphi(\omega) = -\frac{\omega T}{2} + \arg \frac{\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\frac{\omega T}{2}}$



Piros – Ideális aluláteresztő

Zöld – Nulladrendű tartószerv



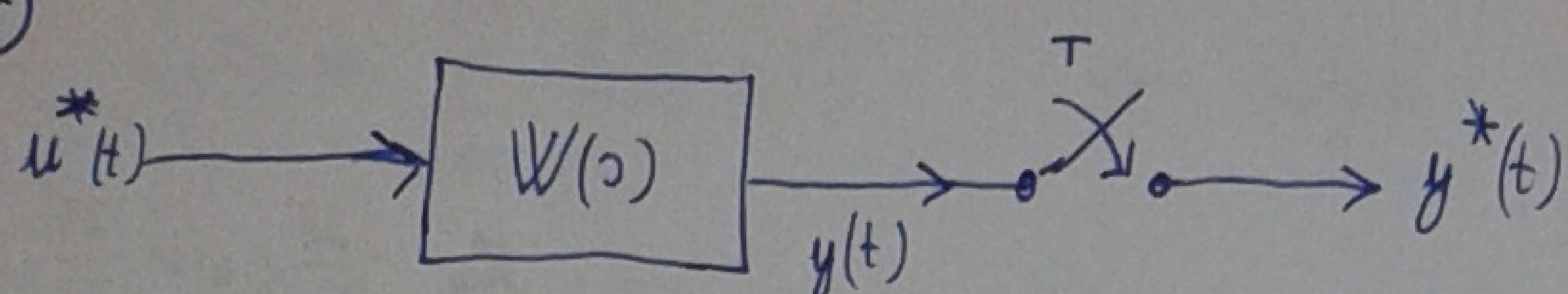
Az ideális aluláteresztő szűrő nem kauzális, ugyanis viselkedésekor jövőbeli értékeket is figyelembe vesz. Ez azonban nem realizálható! A nulladrendű tartószerv ezzel szemben realizálható, továbbá nagyon kicsi T esetén megközelítőleg azonos tulajdonságokkal bír mint az ideális aluláteresztő szűrő. $|W_{H0}(j\omega)| \approx T$ és mivel T kicsi így $\varphi_{H0}(\omega)$ is nagyon kis meredekségű lesz.

⑥ A ZOH alkalmazása olyan, mintha egy $\frac{T}{2}$-es holtidő lenne a rendszerben.

Tehát a ZOH $\frac{\omega_c \cdot T}{2}$-vel csökkenti a fázistartalékot (radiánban)

$$\frac{\omega_c \cdot T}{2} \le 5^\circ \cdot \frac{2\pi}{360^\circ} \implies \boxed{\omega_c \cdot T \le \frac{\pi}{18}}$$

⑦



$$\boxed{Y^*(s) = W^*(s) \cdot U^*(s)} \iff \sum_{n=0}^{\infty} y(n\cdot T)\cdot e^{-snT} = \left[\sum_{n=0}^{\infty} w(n T)\cdot e^{-snT}\right]\cdot\left[\sum_{n=0}^{\infty} u(n\cdot T)\cdot e^{-snT}\right]$$

$$\mathcal{L}^{-1} \Updownarrow \mathcal{L}$$

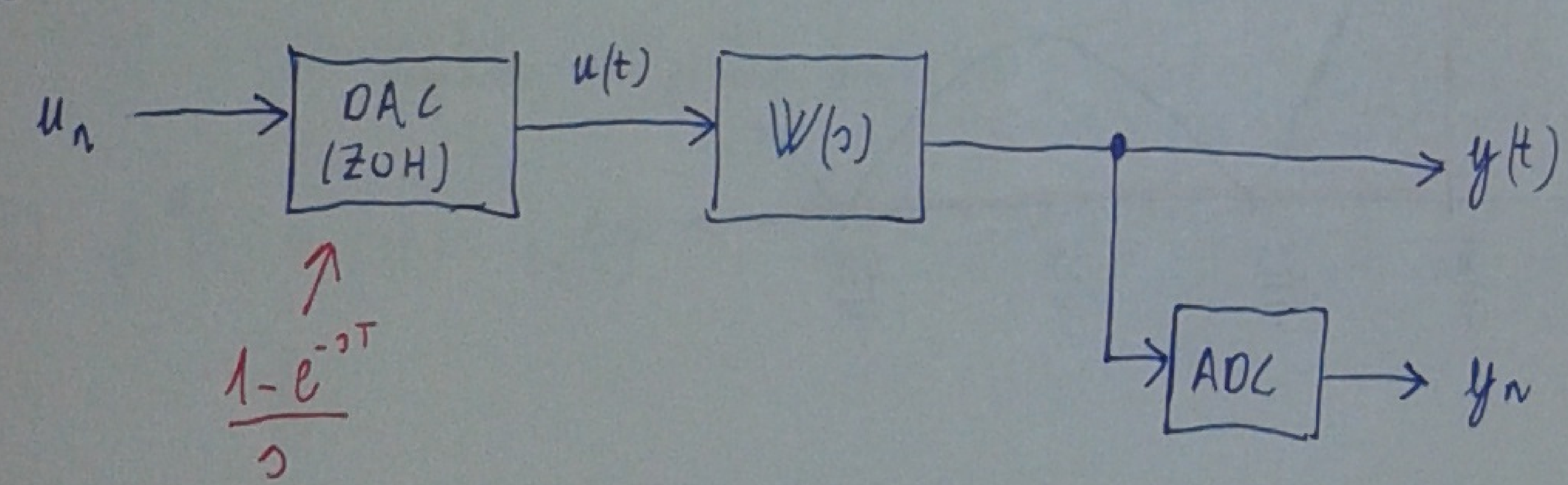
$$y(n T) = w(n\cdot T) * u(n\cdot T)$$

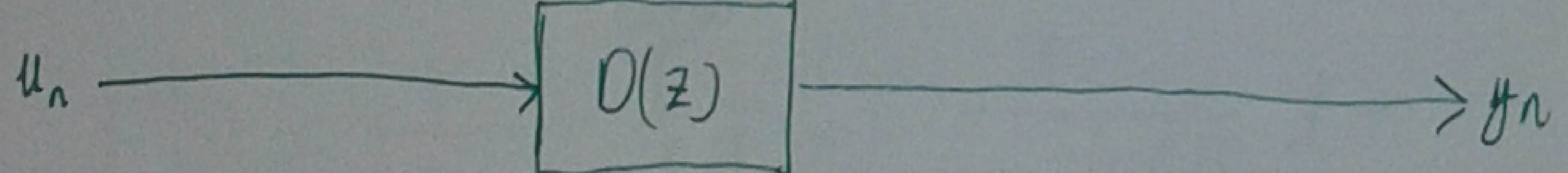
$$\text{Ha: } \boxed{z = e^{sT}}$$

$$\mathcal{Z}^{-1} \Updownarrow \mathcal{Z}$$

$$\mathcal{Z}\{y(n\cdot T)\} = \mathcal{Z}\{w(n\cdot T)\}\cdot \mathcal{Z}\{u(n\cdot T)\} \iff \sum_{n=0}^{\infty} y(n\cdot T)\cdot z^{-n} = \left[\sum_{n=0}^{\infty} w(n\cdot T)\cdot z^{-n}\right]\cdot\left[\sum_{n=0}^{\infty} u(n\cdot T)\cdot z^{-n}\right]$$

⑧





$$\frac{1-e^{-sT}}{s}\cdot W(s) = (1-e^{-sT})\cdot \underbrace{\frac{W(s)}{s}}_{\mathcal{L}\{v(t)\}} \quad \leftarrow \text{Ez még mintavételezve van!}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{D(z) = (1 - z^{-1})\cdot \mathcal{Z}\{v(n\cdot T)\}}$$

MATLAB-ban: $W(s) \longrightarrow D(z)$, c2d() függvénnyel!

Például: D = c2d(W, 0.1, 'zoh') ← 0.1 a mintavételi idő

Ilyenkor $W(s)$ minden s_i pólusa leképződik $D(z)$-nek egy z_i pólusába, melyre: $z_i = e^{s_i T}$

A zérusokra nem áll fenn ilyen összefüggés!

(9)

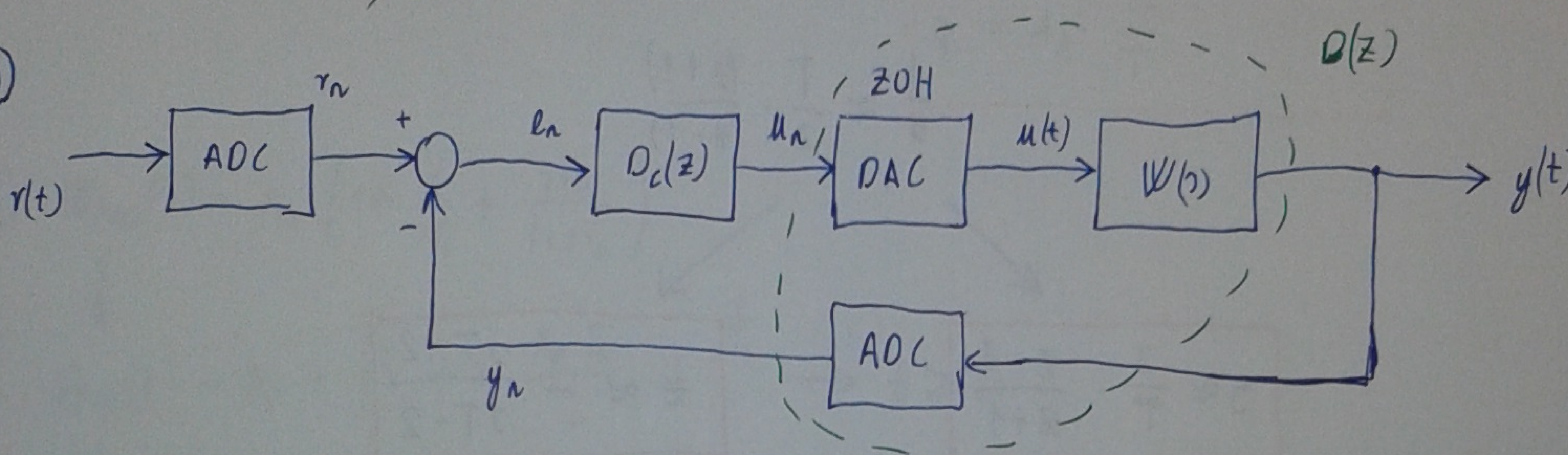
$$U(z) = \frac{u_0}{1-z^{-1}}$$

$$Y(z) = D(z)\cdot U(z) = D(z)\cdot\frac{u_0}{1-z^{-1}}$$

$$y(\infty) = \lim_{z\to 1}\left(1-z^{-1}\right)\cdot Y(z) = \lim_{z\to 1}\left[\cancel{\left(1-z^{-1}\right)}\cdot D(z)\cdot\frac{u_0}{\cancel{1-z^{-1}}}\right] = \lim_{z\to 1}\left(D z\cdot u_0\right) = D(1)\cdot u_0$$

$$A = \frac{y(\infty)}{u_0} = \frac{D(1)\cdot\cancel{u_0}}{\cancel{u_0}} = D(1)$$

(10)



$$D(z) = \left(1-z^{-1}\right)\cdot \mathcal{Z}\{v(n\cdot T)\}$$ ← Lásd 8-as feladat

$$D_{yr}(z) = \frac{D_c(z)\cdot D(z)}{1+D_c(z)\cdot D(z)} \qquad D_{ur}(z) = \frac{D_c(z)}{1+D_c(z)\cdot D(z)}$$

(11) s differenciáló operátor közelítése z-ben.

BWD: $s \approx \frac{z-1}{T\cdot z}$

FWD: $s \approx \frac{z-1}{T}$

$\frac{1}{s}$ integráló operátor közelítése z-ben.

LSR: $\frac{1}{s} \approx \frac{T}{z-1} \Rightarrow s \approx \frac{z-1}{T}$

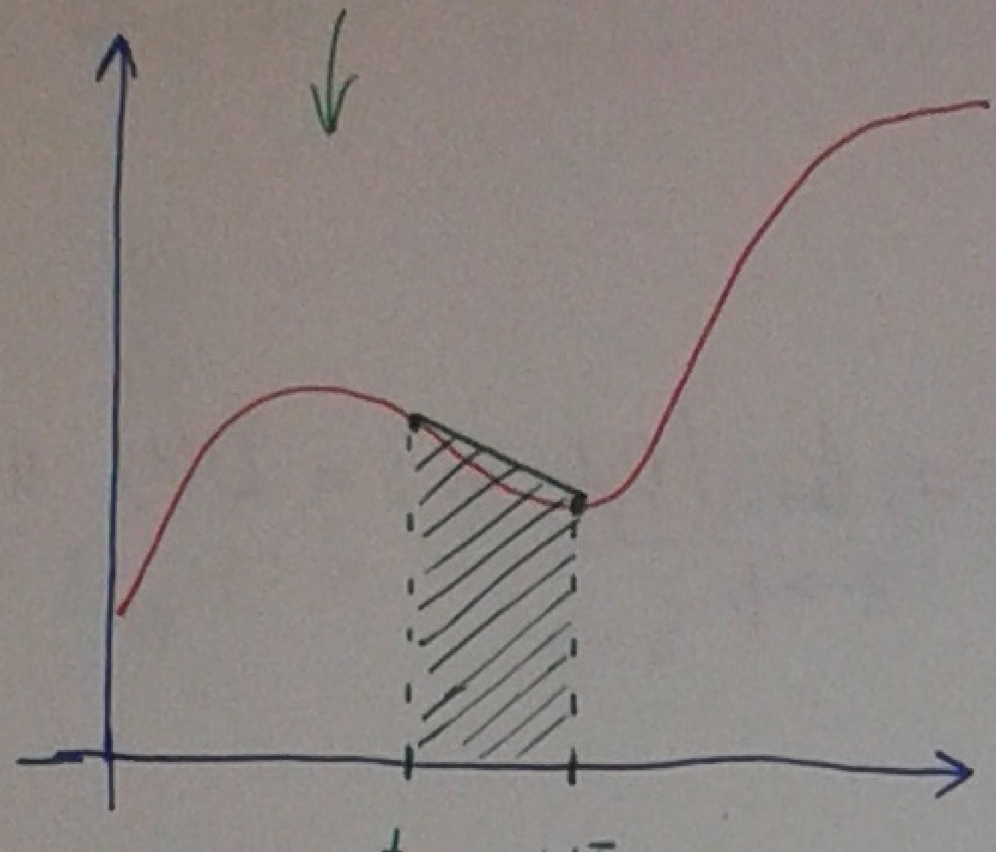
RSR: $\frac{1}{s} \approx \frac{T\cdot z}{z-1} \Rightarrow s \approx \frac{z-1}{T\cdot z}$

Hasonlóságok: RSR $\equiv$ BWD

LSR $\equiv$ FWD

(12)

Trapéz - szabály



$$\int_0^{t+T} y(\tau)\,d\tau \approx \int_0^{t} y(\tau)\,d\tau + \left[y(t)+y(t+T)\right]\cdot\frac{T}{2}$$

$\Downarrow$ $X = \mathcal{L}\{y(t)\}$ és $\frac{1}{s}\cdot X = \mathcal{L}\left\{\int_0^t y(\tau)\,d\tau\right\}$

$$z\cdot\frac{1}{s}\cdot\cancel{X} \approx \frac{1}{s}\cdot\cancel{X} + (\cancel{X}+z\cancel{X})\cdot\frac{T}{2}$$

$$(z-1)\cdot\frac{1}{s} \approx (1+z)\cdot\frac{T}{2}$$

$$\frac{1}{s} \approx \frac{T}{2}\cdot\frac{(z+1)}{(z-1)}$$

$$\boxed{s \approx \frac{2}{T}\cdot\frac{z-1}{z+1}} \qquad \boxed{z \approx -\frac{sT+2}{sT-2}}$$

$$W(s) \xrightarrow[\text{'tustin'}]{c2d} D(z) \qquad D(z) \xrightarrow[\text{'tustin'}]{d2c} W(s)$$

Példa: D = c2d(W, T_s, 'tustin')   W = d2c(D, 'tustin')

(13) $$\underbrace{\mathcal{Z}\{v(n\cdot T)\}}_{\text{kimenet Z transzformáltja}} = \underbrace{D(z)}_{\text{átviteli függvény}}\cdot\underbrace{\frac{1}{1-z^{-1}}}_{\text{bemenet (egységugrás Z transzformáltja)}}$$

$\Downarrow$

$$D(z) = (1-z^{-1})\cdot\mathcal{Z}\{v(n\cdot T)\}$$

MATLAB-ban: c2d() függvény 'zoh' paraméterrel!
A nulladrendű tartószerv lesz egyenértékű az egységugrás ekvivalenciával!

(14) $$W_{PID}(s) = A_P\cdot\left(1+\frac{1}{sT_i}+sT_D\right) \qquad s\approx\frac{z-1}{T\cdot z} \quad (BWD \equiv RSK)$$

$$D_{PID}(z) = A_P\cdot\left(1+\frac{1}{T_i}\cdot\frac{T\cdot z}{z-1}+\frac{z-1}{T\cdot z}\cdot T_D\right) =$$

$$= A_P + A_P\cdot\frac{1}{T_i}\cdot\frac{T}{1-z^{-1}} + \frac{A_P\cdot T_D}{T}\cdot(1-z^{-1}) = \frac{A_P\cdot(1-z^{-1}) + \frac{A_P\cdot T}{T_i} + \frac{A_P\cdot T_D}{T}(1-2z^{-1}+z^{-2})}{1-z^{-1}}$$

$$D_{PID}(z) = \frac{A_p \cdot \left(1 + \frac{T}{T_i} + \frac{T_D}{T}\right) + (-A_p) \cdot \left(1 + \frac{2T_D}{T}\right) \cdot z^{-1} + A_p \cdot \frac{T_D}{T} \cdot z^{-2}}{1 - z^{-1}}$$

$$\Updownarrow$$

$$D_{PID}(z) = \frac{q_0 + q_1 \cdot z^{-1} + q_2 \cdot z^{-2}}{1 - z^{-1}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} q_0 &= A_p \cdot \left(1 + \frac{T}{T_i} + \frac{T_D}{T}\right) \\ q_1 &= -A_p \cdot \left(1 + \frac{2T_D}{T}\right) \\ q_2 &= A_p \cdot \frac{T_D}{T} \end{aligned}}$$

(15) $$W_{PID}(s) = A_p \cdot \left(1 + \frac{1}{sT_i} + \frac{sT_D}{1 + sT_c}\right)$$

$$\downarrow$$

$$v_{PID}(t) = A_p + \frac{A_p}{T_i} \cdot t + \frac{A_p \cdot T_D}{T_c} \cdot e^{-\frac{t}{T_c}} \longrightarrow t \geq 0$$

$$\downarrow$$

$$v_{PID}(n \cdot T) = A_p + \frac{A_p \cdot T}{T_i} \cdot n + \frac{A_p \cdot T_D}{T_c} \cdot e^{-\frac{T}{T_c} \cdot n} \Rightarrow n \geq 0$$

$\downarrow$ egységugrás ekvivalencia miatt

$$D_{PID}(z) = (1 - z^{-1}) \cdot \mathcal{Z}\{v_{PID}(nT)\} = (1 - z^{-1}) \cdot \left[A_p \cdot \frac{1}{1 - z^{-1}} + \frac{A_p \cdot T}{T_i} \cdot \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} + \frac{A_p \cdot T_D}{T_c} \cdot \frac{1}{1 - z^{-1} \cdot e^{-\frac{T}{T_c}}}\right] =$$

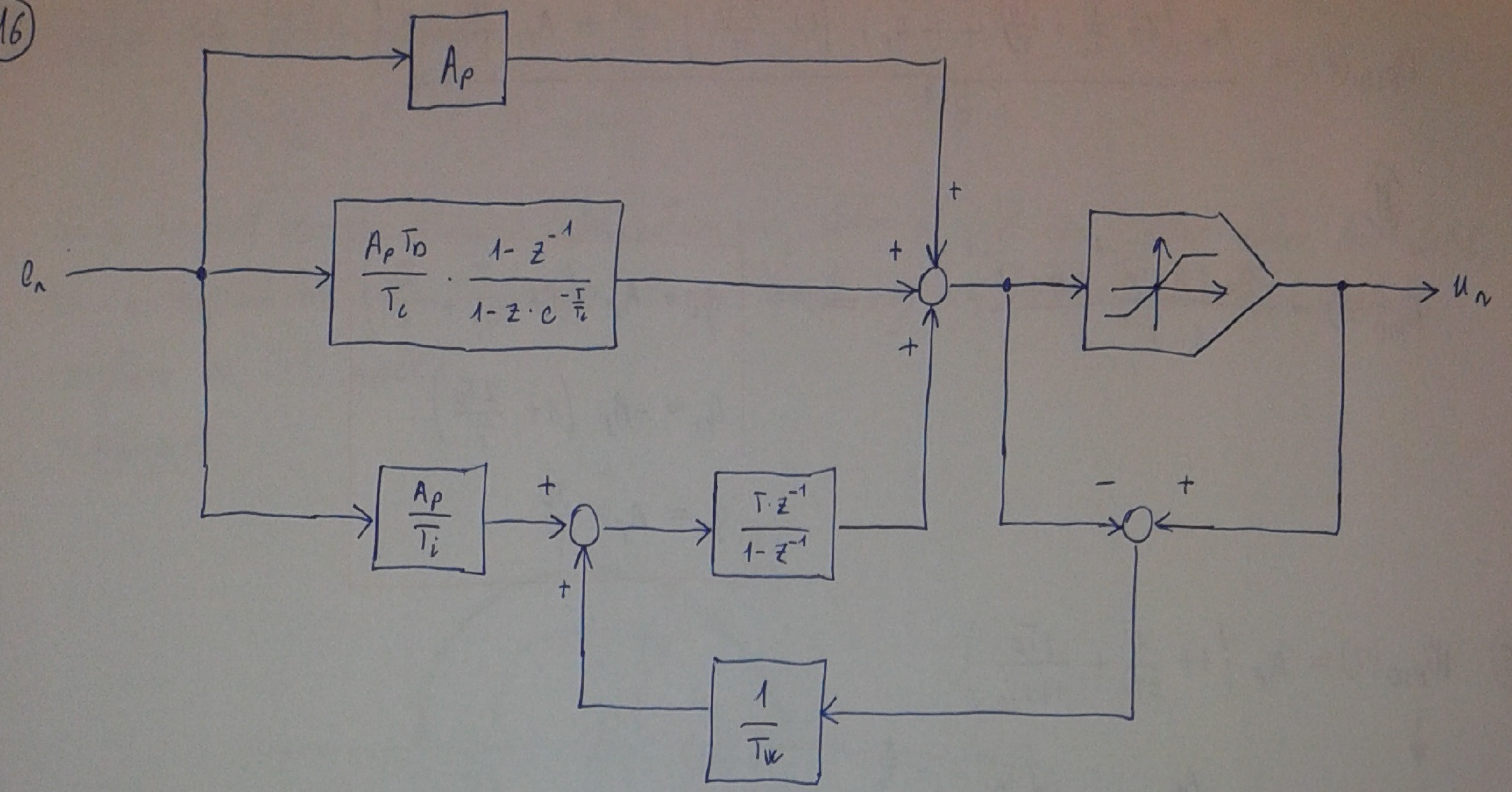
Nevezetes $\mathcal{Z}$ transzformáltakat felhasználva (16-os feladatban meg vannak adva)

$$= A_p + \frac{A_p \cdot T}{T_i} \cdot \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}} + \frac{A_p \cdot T_D}{T_c} \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 - z^{-1} \cdot e^{-\frac{T}{T_c}}} =$$

$$= \frac{A_p \cdot (1 - z^{-1}) \cdot \left(1 - z^{-1} \cdot e^{-\frac{T}{T_c}}\right) + \frac{A_p \cdot T}{T_i} \cdot z^{-1} \cdot \left(1 - z^{-1} \cdot e^{-\frac{T}{T_c}}\right) + \frac{A_p T_D}{T_c} \cdot (1 - z^{-1})^2}{(1 - z^{-1}) \cdot \left(1 - z^{-1} \cdot e^{-\frac{T}{T_c}}\right)} \equiv \frac{q_0 + q_1 \cdot z^{-1} + q_2 \cdot z^{-2}}{p_0 + p_1 \cdot z^{-1} + p_2 \cdot z^{-2}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} q_0 &= A_p \cdot \left(1 + \frac{T_D}{T_c}\right) \\ q_1 &= -A_p \cdot \left(1 + e^{-\frac{T}{T_c}} - \frac{T}{T_i} + \frac{2T_D}{T_c}\right) \\ q_2 &= A_p \left(e^{-\frac{T}{T_c}} - \frac{T}{T_i} \cdot e^{-\frac{T}{T_c}} + \frac{T_D}{T_c}\right) \end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned} p_0 &= 1 \\ p_1 &= -\left(1 + e^{-\frac{T}{T_c}}\right) \\ p_2 &= e^{-\frac{T}{T_c}} \end{aligned}}$$

(16)



Ez a megoldás a bemeneten fellépő tranziensek hatásának idejét csökkenti!
(A munkapont mindig a lineáris szakaszon és a telítésiszakaszon tartózkodásánál áll meg)

(17) Adott ξ, ω_0, $s_{0\infty}$ és $s_{c\infty}$ ← Áttérési szabály: $z_i = e^{s_i T}$

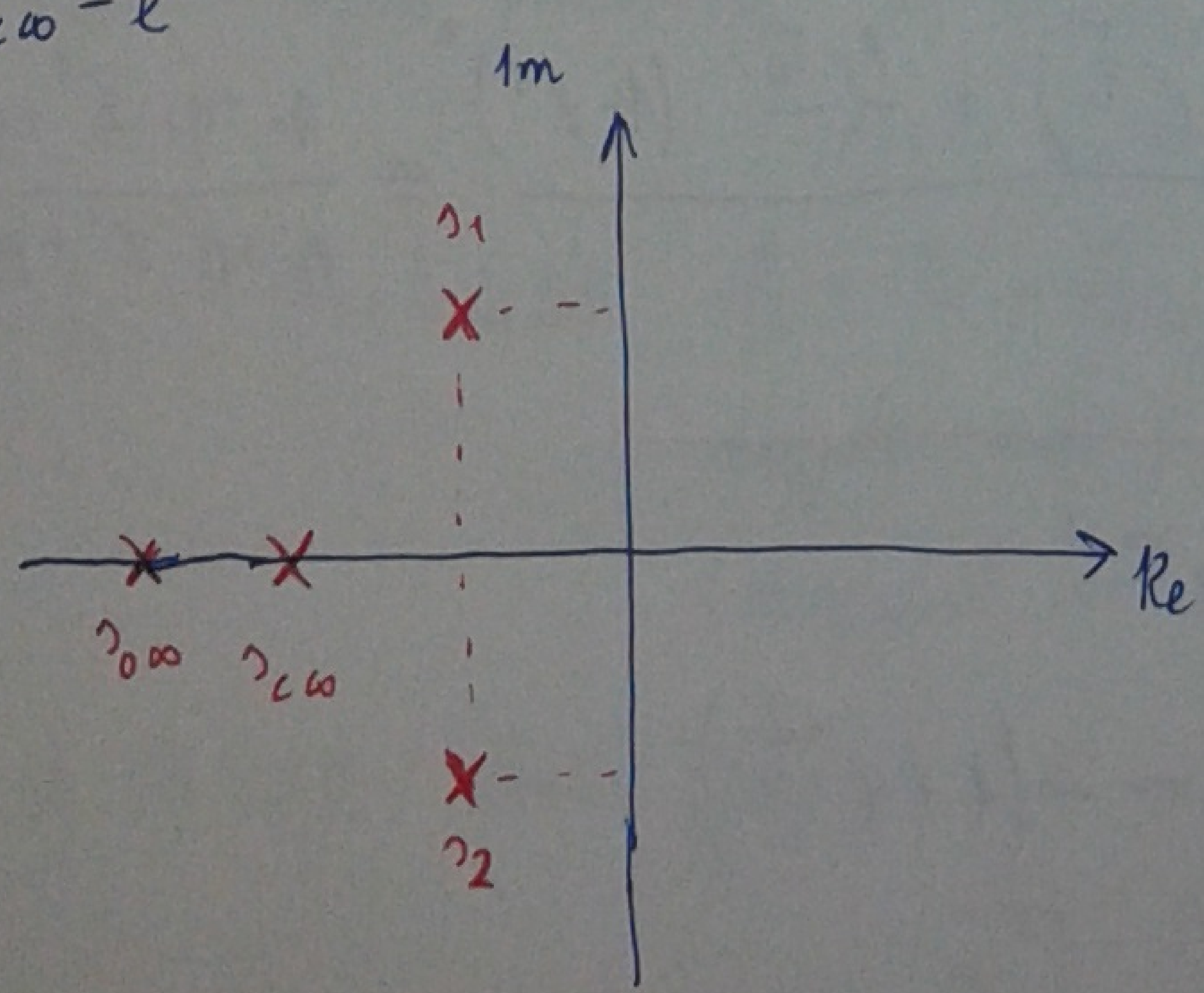
$$s_{1,2} = -\xi\cdot\omega_0 \pm j\omega_0\cdot\sqrt{1-\xi^2}$$

$$z_{1,2} = e^{\left(-\xi\omega_0 \pm j\omega_0\cdot\sqrt{1-\xi^2}\right)\cdot T} = e^{-\xi\omega_0 T}\cdot e^{\pm j\cdot\omega_0\cdot\sqrt{1-\xi^2}\,T} =$$

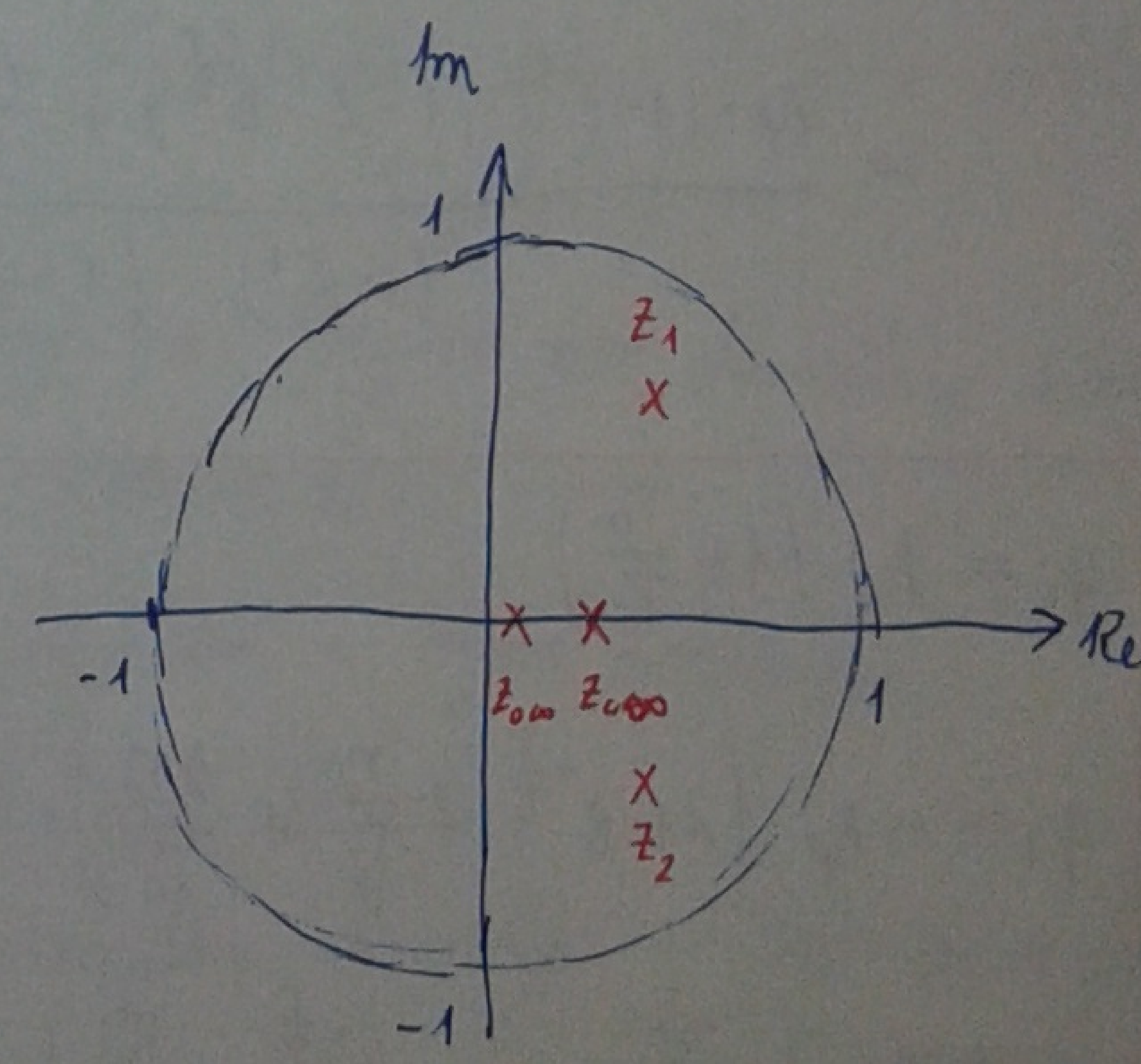
$$= e^{-\xi\omega_0 T}\cdot\left[\cos\left(\omega_0\sqrt{1-\xi^2}\cdot T\right) \pm j\sin\left(\omega_0\sqrt{1-\xi^2}\cdot T\right)\right]$$

$$z_{0\infty} = e^{s_{0\infty}\cdot T}$$

$$z_{c\infty} = e^{s_{c\infty}\cdot T}$$



⟹

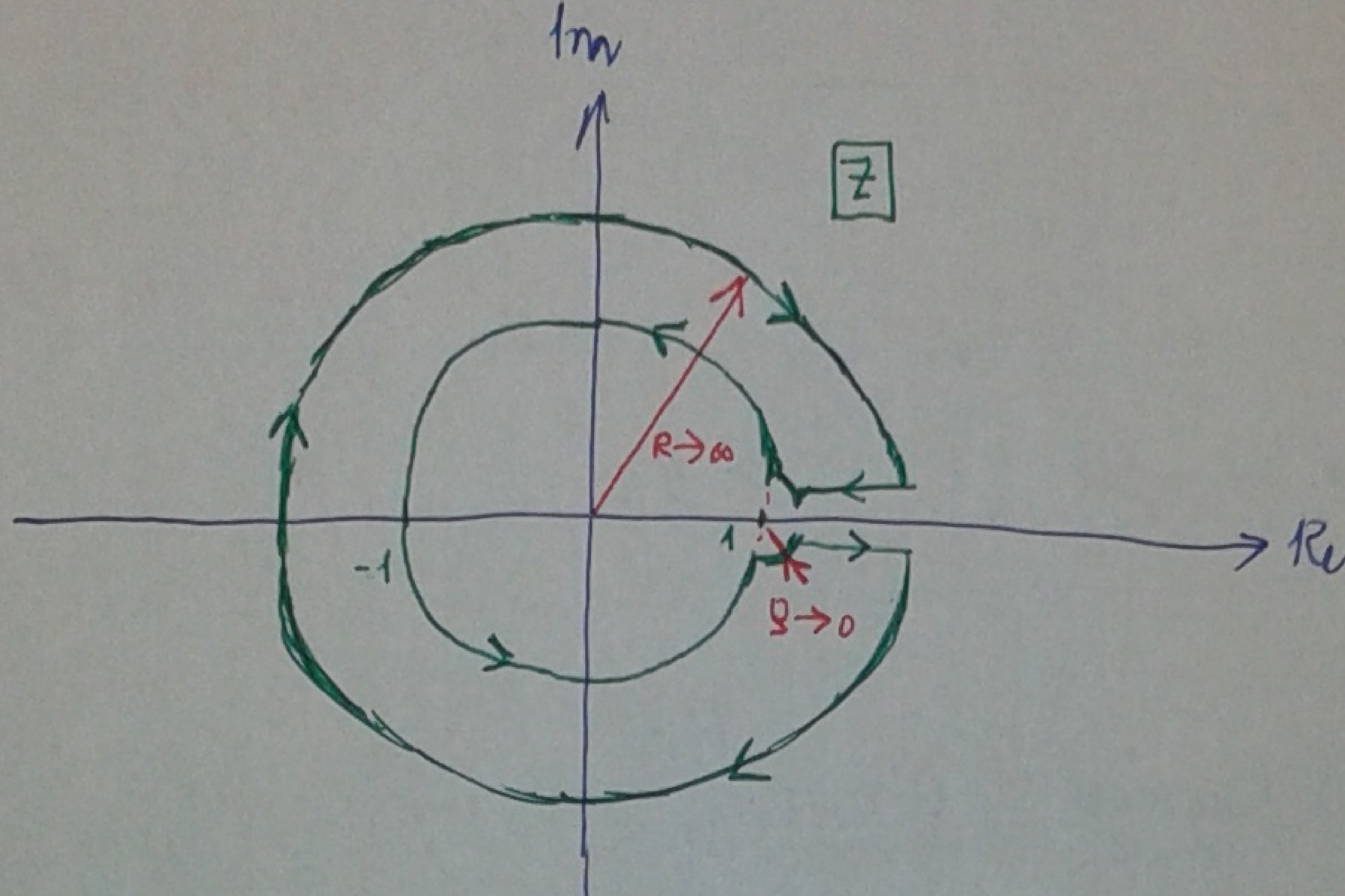


(18) Nyquist-féle stabilitási kritérium:

$$\boxed{EKVSZ\left(D_0\left(e^{j\omega T}\right), -1\right) = P}$$

Ha a felnyitott körnek P darab labilis pólusa van, akkor a zárt kör csakis akkor lesz stabil, ha a felnyitott kör nyquist görbéje P-szer kerüli meg az óramutató járásával ellentétes irányban a (-1) pontot!

Kontúrgörbe:



Vegyük észre, hogy a kontúrgörbén haladva az egységkörön $\boxed{z = e^{j\omega T}}$ választandó. Ha ω pozitív, akkor az egységkörnek a valós tengely feletti részén vagyunk, míg negatív omega esetén az alsó félen. (Ez utóbbi képe a $D_0(e^{j\omega T})$ leképezésnél az egységkör felső fele képének tükörképe a valós tengelyre.) A felső félkörön $\omega = 0$ esetén $z = 1$ pontból indulunk, az utolsó pont a felső félkörön pedig $z = -1 = e^{j\pi} = e^{j\omega T}$ esetén lesz $\Rightarrow$ $\omega T = \pi$. Tehát az $\omega_N = \frac{\pi}{T}$ Nyquist-frekvenciáig. $\boxed{0 \le \omega \le \frac{\pi}{T}}$

(19) Bode-féle stabilitási kritérium ← A felnyitott körnek nincsen labilis pólusa!

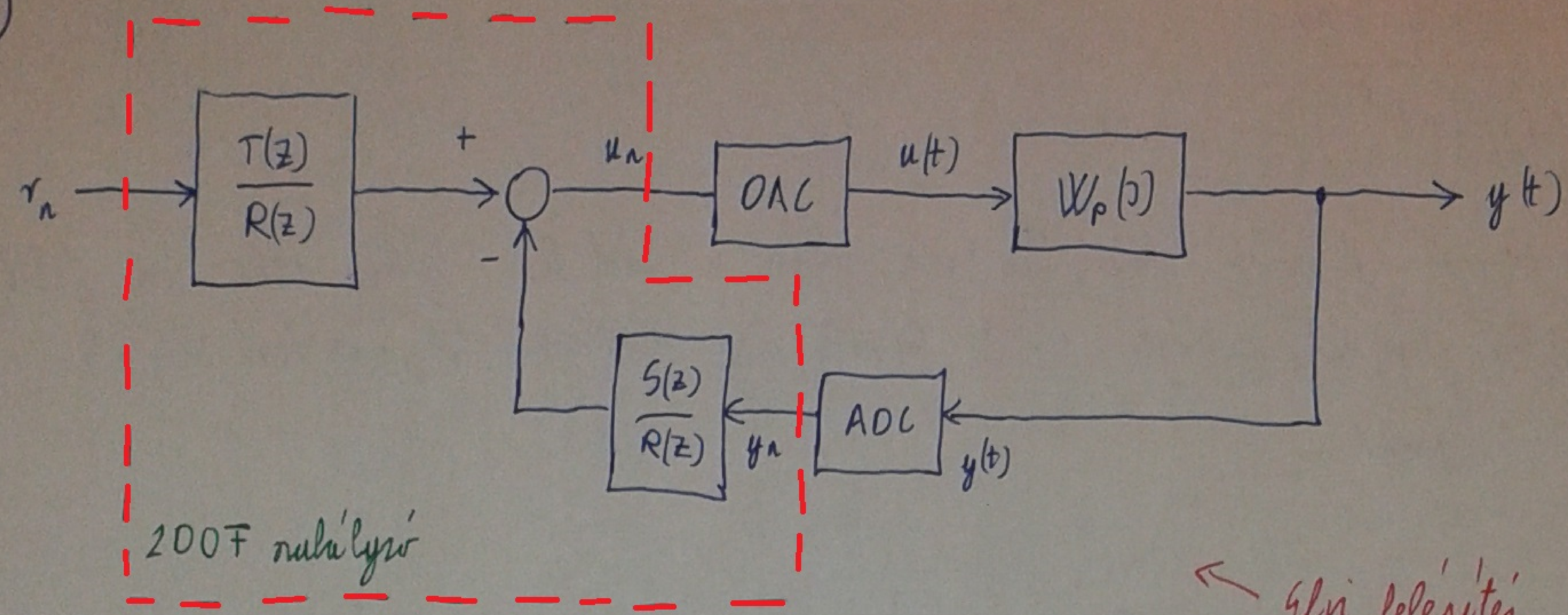
A zárt kör akkor és csak akkor stabil, ha a felnyitott kör φ_t fázistartaléka pozitív!

ω_c – Vágási frekvencia: az a frekvencia, melyen a felnyitott kör erősítése 0 dB-re csökken.
(Ahol az amplitúdómenet metszi az ω tengelyt!)

φ_t – Fázistartalék: $\varphi_t = 180° + \varphi(\omega_c)$ megadja, hogy a felnyitott kör fázistolása mennyivel nagyobb mint $(-180°)$ a vágási frekvencián.
(Mennyivel van a fázisgörbe $-180°$ felett a vágási frekvencián)

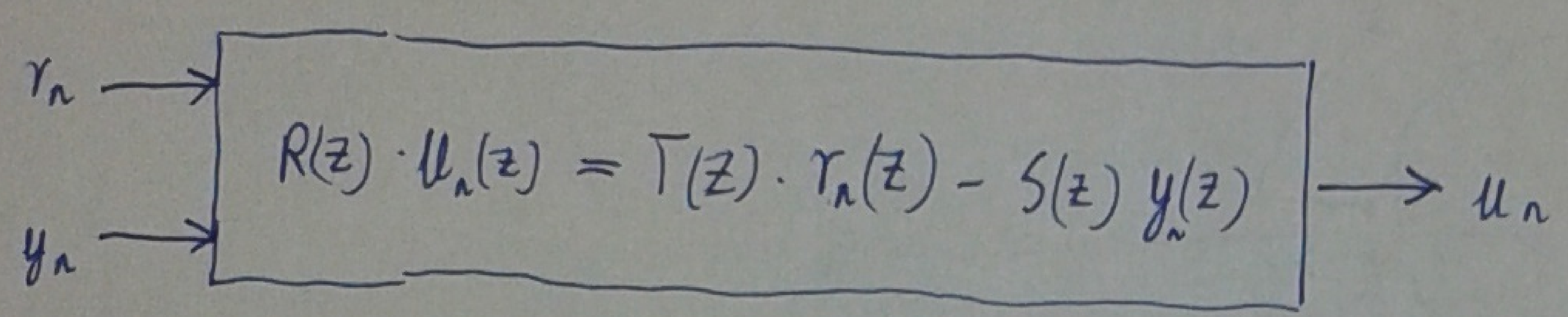
A MATLAB dbode függvénye a $z = e^{j\omega T}$ helyettesítéssel él és az $0 \le \omega \le \frac{\pi}{T}$ tartományban ábrázolja a Bode diagrammot!

20



← Elvi felépítés

↙ Célszerű megvalósítás



Szakasz diszkrétidejű átviteli függvénye: $D(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$

Zárt rendszer referencia modellje: $\frac{B_m(z)}{A_m(z)}$ és a megfigyelő polinom: $A_0(z)$

Legyen $B(z) = B^+(z)\cdot B^-(z)$

$B^+(z)$ – Szakasz számlálójának kiejthető gyökei: azok a gyökök melyek az egységkörön belülre esnek és nem tisztán negatív valós értékűek! ← Monic polinom

$B^-(z)$ – Szakasz számlálójának nem kiejthető gyökei: azok a gyökök, melyek az egységkörön kívülre esnek, vagy belülre esnek, de tisztán negatív valós értékűek! ← Nem monic

+ szabályzó integrátorainak száma: l

$$R(z) = B^+\cdot R' = B^+\cdot (z-1)^l\cdot R_1'$$

$$B_m(z) = B^-\cdot B_m'$$

$$T(z) = B_m'\cdot A_0$$

Diophantoszi egyenlet: $A\cdot(z-1)^l\cdot R_1' + B^-\cdot S = A_m\cdot A_0$ => $S(z)$ és $R_1'(z)$ meghatározása

↗

Ezek mind az eredeti egyenletből következnek: $D_{cl}(z) = \frac{B(z)\cdot T(z)}{A(z)R(z) + B(z)S(z)} = \frac{B_m(z)}{A_m(z)}\cdot\frac{A_0(z)}{A_0(z)}$

(21)

$$gr\,A_m = \begin{cases} 2, & \text{ha } gr\,B^- = 0 \\ 1 + gr\,B^-, & \text{egyébként} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad gr\,A_m = 1+2 = 3$$

$$gr\,S = gr\,A + l - 1 \quad \Rightarrow \quad gr\,S = 3+1-1 = 3$$

$$gr\,A_0 = gr\,A + l - 1 - \begin{cases} 1, & \text{ha } gr\,B^- = 0 \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad gr\,A_0 = 3+1-1-0 = 3$$

$$gr\,R_1' = gr\,B^- \quad \Rightarrow \quad gr\,R_1' = 2$$

Továbbá ismert: $B_m' = \dfrac{A_m(1)}{B^-(1)}$; $B^+ = 1$; $gr\,B^- = 2$; $gr\,A = 3$ és $l = 1$

Valamint adott: $z_{1,2}$ (domináns póluspár) ; $z_{c\infty}$ és $z_{0\infty}$

Az A_m és A_0 polinomokat a gyökeik segítségével adjuk meg + fokszámfeltételek

$$\boxed{A_0(z) = (z - z_{0\infty})^3}$$

mivel $gr\,A_0 = 3$

$$\boxed{A_m(z) = (z - z_1)\cdot(z - z_2)\cdot(z - z_{c\infty})}$$

egyszeres multiplicitással bejön ez a tag, mivel $gr\,A_m = 3$ kell hogy legyen!

Az S és R_1' polinomok meghatározása:

$$\boxed{\begin{aligned} R_1'(z) &= z^2 + r_1\cdot z + r_2 \\ S(z) &= s_0\cdot z^3 + s_1\cdot z^2 + s_2\cdot z + s_3 \end{aligned}}$$

Megoldandó Diophantoszi egyenlet lineáris egyenletrendszer alakjában:

$$\boxed{\underbrace{A\cdot(z-1)^l}_{A}\cdot X + \underbrace{B^-}_{B}\cdot Y = \underbrace{A_m\cdot A_0}_{C}}$$

← Ez maga a diophantoszi egyenlet ahol jelen esetben $X = R_1'$ és $Y = S$

$$A = z^4 + a_1 z^3 + a_2 z^2 + a_3 z + a_4$$

$$B = b_0 z^2 + b_1 z + b_2$$

$$C = z^6 + c_1\cdot z^5 + c_2\cdot z^4 + c_3\cdot z^3 + c_4\cdot z^2 + c_5 z + c_6$$

$\Longrightarrow$ Felírható lineáris egyenletrendszer mátrixos alakban:

$$\underbrace{\left(\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & b_0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & b_1 & b_0 & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & b_2 & b_1 & b_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & 0 & b_2 & b_1 & b_0 \\ a_4 & a_3 & 0 & 0 & b_2 & b_1 \\ 0 & a_4 & 0 & 0 & 0 & b_2 \end{array}\right)}_{\text{Toeplitz-blokkok}} \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \hline s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 - a_1 \\ c_2 - a_2 \\ c_3 - a_3 \\ c_4 - a_4 \\ c_5 \\ c_6 \end{pmatrix}$$

Toeplitz - blokkok

(22) Megoldandó Diophantoszi egyenlet: $A \cdot (z-1) \cdot R_1' + B^- \cdot S = A_m \cdot A_0$ ← Keressük R_1' és S polinomokat!

Ez ezzel ekvivalens lineáris egyenletrendszer mátrixos alakban:
(Felhasználva a feladatkiírásban megadott adatokat és egyenleteket)

$$\underbrace{\left(\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & b_0 & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{a}_1 & 1 & b_1 & b_0 & 0 & 0 \\ \tilde{a}_2 & \tilde{a}_1 & b_2 & b_1 & b_0 & 0 \\ \tilde{a}_3 & \tilde{a}_2 & 0 & b_2 & b_1 & b_0 \\ \tilde{a}_4 & \tilde{a}_3 & 0 & 0 & b_2 & b_1 \\ 0 & \tilde{a}_4 & 0 & 0 & 0 & b_2 \end{array}\right)}_{\underline{\underline{X}}} \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \hline s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} c_1 - \tilde{a}_1 \\ c_2 - \tilde{a}_2 \\ c_3 - \tilde{a}_3 \\ c_4 - \tilde{a}_4 \\ c_5 \\ c_6 \end{pmatrix}}_{\underline{y}}$$

$[\mathrm{inv}(\underline{\underline{X}}) \cdot \underline{y}]$ egy 6 soros 1 oszlopos vektor melynek első két tagja adja R_1' polinom együtthatóit, utolsó 4 tagja pedig S polinom együtthatóit.

B_m' számítási szabálya: $1 = \dfrac{B_m' \cdot B^-(1)}{A_m(1)} = \dfrac{B_m(1)}{A_m(1)} \Longrightarrow B_m' = \dfrac{A_m(1)}{B^-(1)}$ ← Ez azért kell, hogy a modell végértéke egységugrás alapjelkövetésnél 1 legyen!

$T(z)$, $R(z)$ és $S(z)$: $\rightarrow S(z) = s_0 \cdot z^3 + s_1 \cdot z^2 + s_2 \cdot z + s_3$ ← Fenti lineáris egyenletrendszer megoldásából

$\rightarrow T(z) = B_m' \cdot A_0(z) = \dfrac{A_m(1)}{B^-(1)} \cdot (z - z_{0\infty})^3$

r_1 és r_2 a fenti egyenletrendszerből

$\rightarrow R(z) = B^+(z) \cdot (z-1)^1 \cdot R_1'(z) = \overbrace{\dfrac{B(z)}{B^-(z)}}^{=1,\ \text{mivel } B = B^-} \cdot (z-1) \cdot (z^2 + r_1 \cdot z + r_2) = z^3 + (r_1 - 1) \cdot z^2 + (r_2 - r_1) z - r_2$

(23) Bilineáris (Tustin) transzformáció:

$$\boxed{w = \frac{2}{T} \cdot \frac{z-1}{z+1}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{z = \frac{1 + w \cdot \frac{T}{2}}{1 - w \cdot \frac{T}{2}}}$$

$$D(z) = A_z \cdot \frac{\prod_{i=1}^{m} (z - z_{0i})}{(z-1)^{l} \cdot \prod_{i=1}^{n} (z - z_i)}$$ ← Ez volt megadva a feladatkiírásban

A fenti transzformációs képletet felhasználva:

$$z - z_i \longrightarrow \frac{1 + w\frac{T}{2}}{1 - w\frac{T}{2}} - z_i = (1 - z_i) \cdot \frac{1 + w\frac{T}{2} \cdot \frac{1+z_i}{1-z_i}}{1 - w\frac{T}{2}}$$

$$z - 1 \longrightarrow \frac{1 + w\frac{T}{2}}{1 - w\frac{T}{2}} - 1 = \frac{wT}{1 - w\frac{T}{2}}$$

A fenti összefüggéseket felhasználva:

$$D(z) \longrightarrow D(w) = A_w \cdot \frac{\left(1 - w\frac{T}{2}\right)^{l+n-m} \cdot \prod_{i=1}^{m} \left(1 + w\frac{T}{2} \cdot \frac{1+z_{0i}}{1-z_{0i}}\right)}{w^{l} \cdot \prod_{i=1}^{n} \left(1 + w\frac{T}{2} \cdot \frac{1+z_i}{1-z_i}\right)}$$

$$A_w = A_z \cdot \frac{\prod_{i=1}^{m} (1 - z_{0i})}{T^{l} \cdot \prod_{i=1}^{n} (1 - z_i)}$$

Mivel általában $n > m$, ezért mindig fellép legalább egy nem minimumfázisú (azaz a jobb félsíkon lévő) zérushely a $w = \frac{2}{T}$ helyen. (Általánosan $l+n-m$ ilyen zérus van!) Ezekhez a zérusokhoz $-\mathrm{arctg}\left(w\frac{T}{2}\right)$ negatív fázisszög tartozik, ami rossz irányba befolyásolja (azaz csökkenti) a fázistöbbletet!

(24)

$$W(s) \xrightarrow[\text{'zoh'}]{c2d} D(z) \xrightarrow[\text{'tustin'}]{d2c} D(w) \xrightarrow{fsolve} D_c(w) \xrightarrow[\text{'tustin'}]{c2d} D_c(z)$$

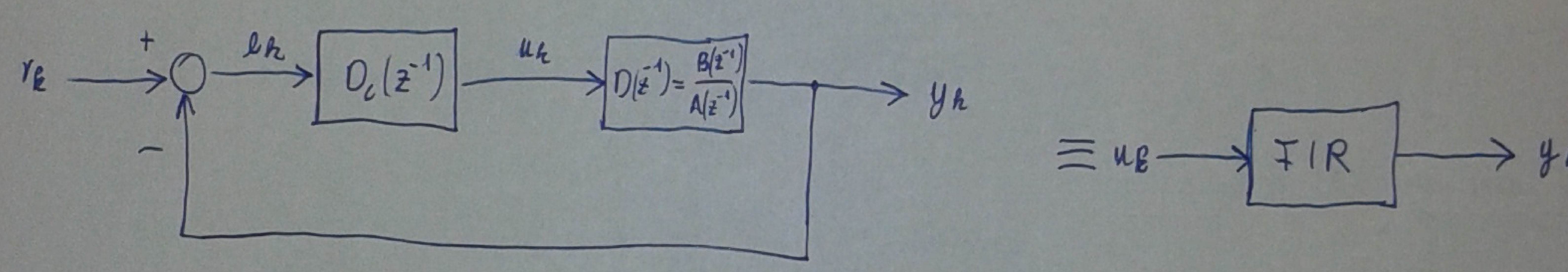
$D_c(w)$ szabályzó tervezéséhez szükséges egyenletrendszer:

$$\left.\begin{aligned} |D(j\omega_c)\cdot D_c(j\omega_c)| - 1 &= 0 \\ \pi + \arg D(j\omega_c) + \arg D_c(j\omega_c) - \varphi_t &= 0 \\ D_c\left(w = \tfrac{2}{T}\right) - u_{max} &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow F(x) = 0$$

ahol $x = (\omega_c, A_{cw}, T_c)^T$ a megválasztandó változók!

(25) Tervezési célkitűzések:

- Egységugrás alapjelváltozás esetén a hiba véges sok lépés után szűnjön meg $\Rightarrow$ a zárt rendszer átviteli függvénye z^{-1} véges fokszámú polinomja.
- $D_{wr}(z^{-1})$ is szintén z^{-1}-nek véges fokszámú polinomja legyen!



$$K(z^{-1}) = \frac{D_c(z^{-1})\cdot D(z^{-1})}{1 + D_c(z^{-1})\cdot D(z^{-1})} \quad \text{és} \quad M(z^{-1}) = \frac{D_c(z^{-1})}{1 + D_c(z^{-1})\cdot D(z^{-1})}$$

mindkettő FIR típusú kell hogy legyen

$D\cdot M = K \iff \frac{B}{A}\cdot M = K \Rightarrow \frac{B}{A} = \frac{K}{M} \Rightarrow$ létezik egy olyan L korrekciós polinom, hogy:
$B\cdot L = K$ és $A \cdot L = M$

$$\frac{D_c}{1 + D_c D} = M \Rightarrow D_c = M + M D_c D \Rightarrow D_c = \frac{M}{1 - D\cdot M} = \frac{L\cdot A}{1 - \frac{B}{A}\cdot L\cdot A} = \frac{L\cdot A}{1 - L\cdot B}$$

Tehát $D_c(z^{-1}) = \dfrac{L(z^{-1})\cdot A(z^{-1})}{1 - L(z^{-1})\cdot B(z^{-1})}$ alakú a szabályzónk!

$$\left[\begin{aligned} &\text{Mivel } gr\,L = p \text{ és } gr\,B = m \\ &\text{ezért } gr\,K = gr(L\cdot B) = m + p \end{aligned}\right] \Rightarrow K(z^{-1}) = k_0 + k_1 z^{-1} + \ldots + k_{m+p}\cdot z^{-(m+p)} = \frac{k_0\cdot z^{m+p} + \ldots + k_{m+p}}{z^{m+p}}$$

K egy FIR rendszer

A zárt rendszer MINDEN pólusa $z=0$-ban van!

(26) $L(z^{-1}) = l_0 + l_1 \cdot z^{-1}$

$y_{k=\infty} = \lim_{z \to 1} (z-1) \cdot K(z) \cdot \frac{z}{z-1} = K(1)$

Ha $r_k = \varepsilon_k \Rightarrow y_N = 1 \equiv K(1) = B(1) \cdot L(1)$

$1 = (l_0 + l_1) \cdot \sum b_i$

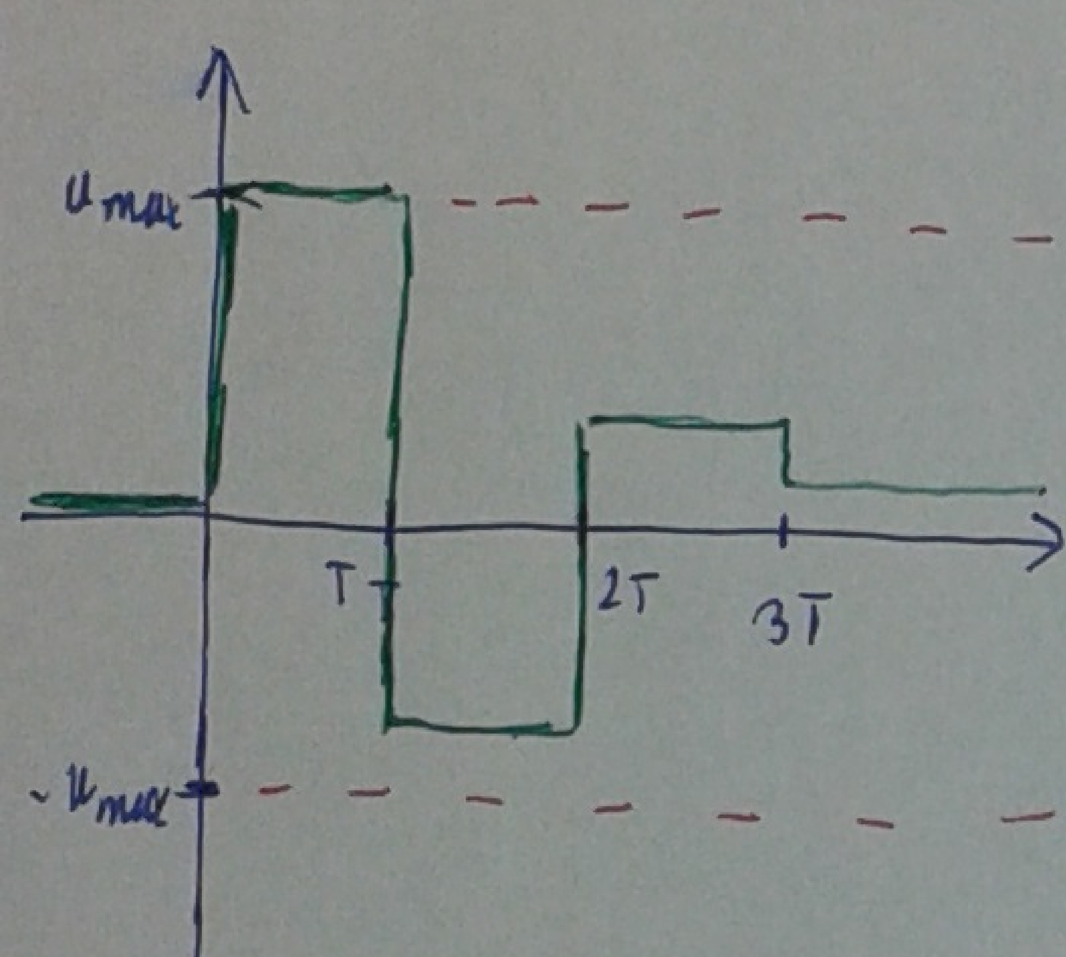
Ha $r_k = \delta_k \Rightarrow u_0 = u_{max} = \Pi(0) = a_0 \cdot l_0$

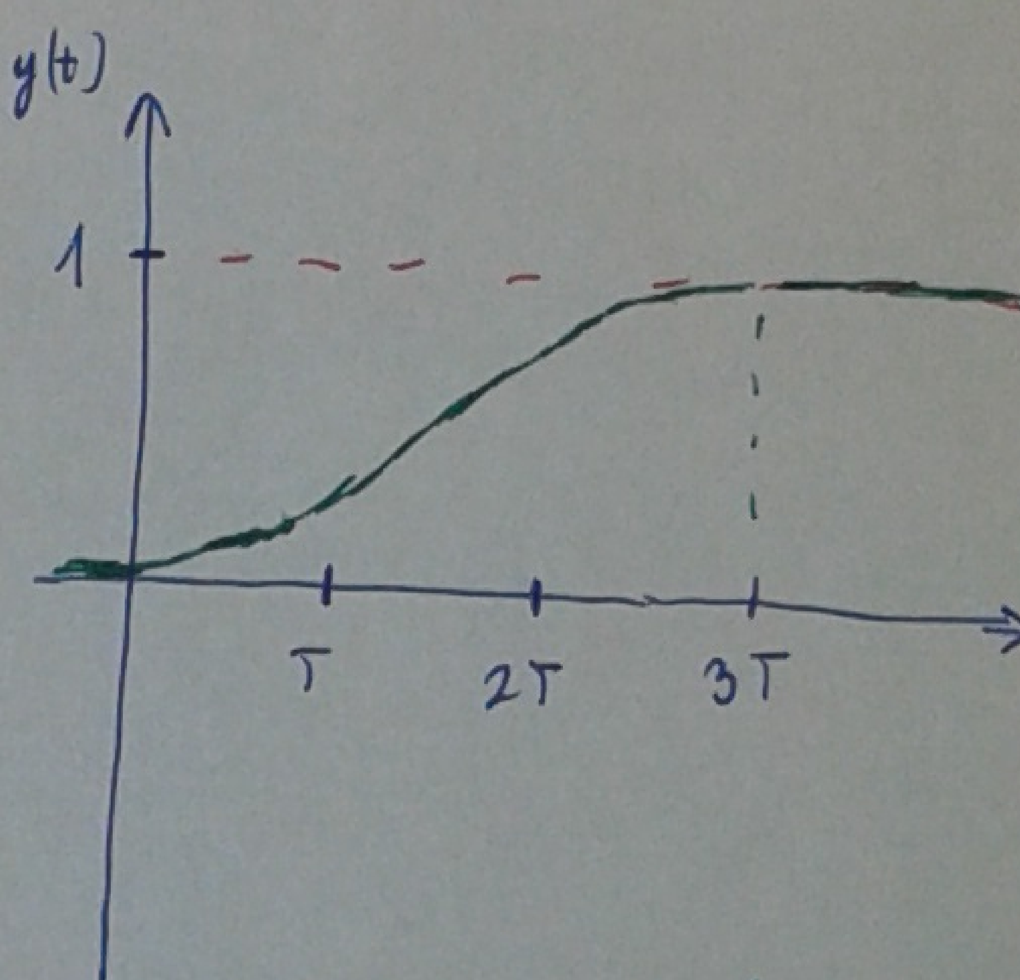
$\Rightarrow \boxed{l_0 = \frac{u_{max}}{a_0}}$, $\boxed{l_1 = \frac{1}{\sum_i b_i} - \frac{u_{max}}{a_0}}$

Mintavételi idő meghatározása:

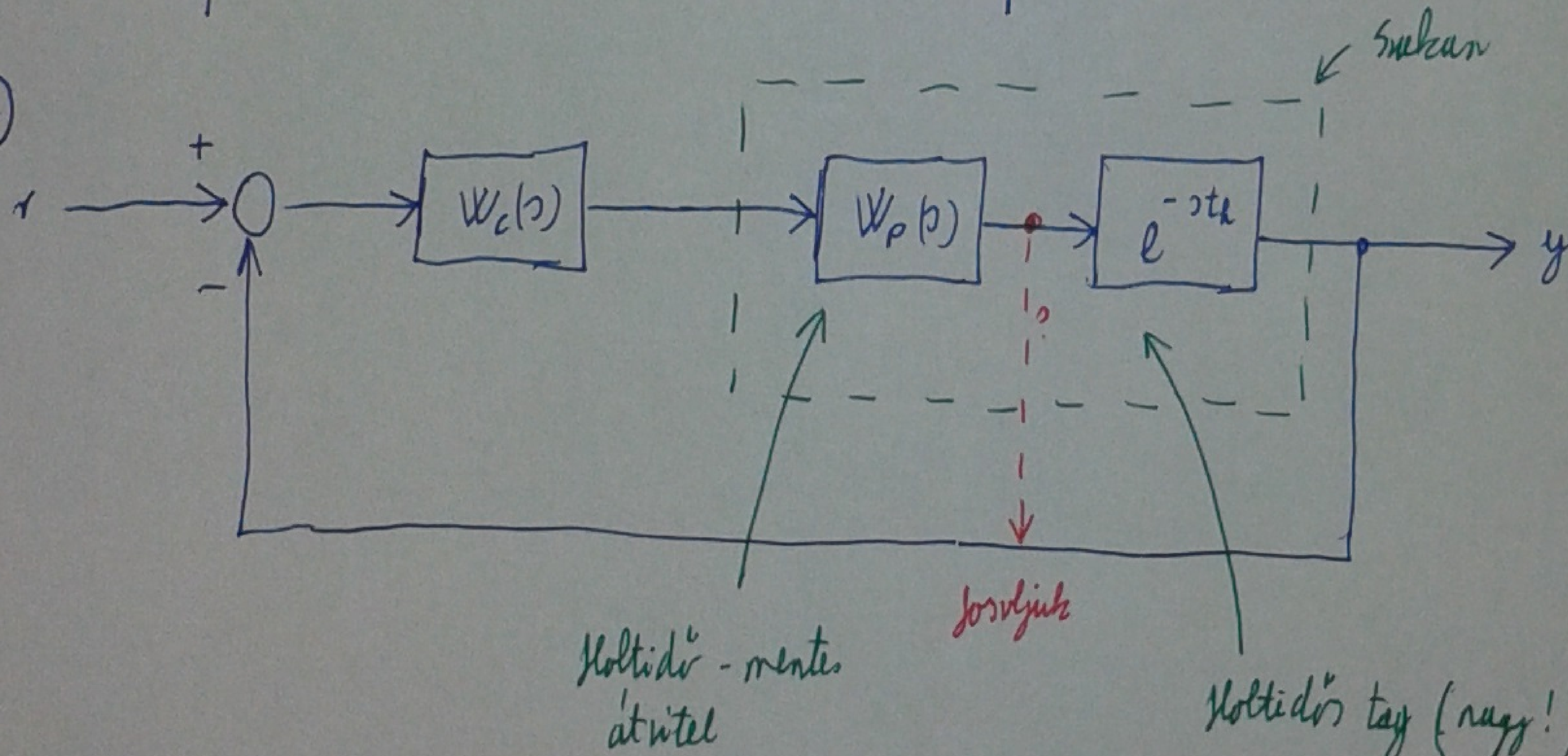
$$f(T) = \frac{\left| \max_{i=1..N} \{|u_i|\} - u_{max} \right|}{u_{max}} + \left| \max_{i=1..N} \{|y_i|\} - 1 \right|$$

A szakasz u_k bemenő és $y(t)$ kimenő jeleinek ideális alakja: pl: $n+p=3$





(27)



Ha jól meg tudjuk választani $W_p(s)$-t akkor készíthető olyan szabályozási kör, amely olyan, mintha csak a kimeneten lenne késleltetés!