Matematikai logika

Tételek, definíciók – 2014

1. Formális nyelvek

Tétel:

A prefix írásmóddal írt formulák olvasata egyértelmű

Definíció:

$\mathcal{L}$ típusú struktúra

$\mathcal{A} = < f_1^{\mathcal{A}}, f_2^{\mathcal{A}}, \dots; P_1^{\mathcal{A}}, P_2^{\mathcal{A}}, \dots >$

Spec esetek:

- modell → nincs függvényjel (f)
- algebra → nincs relációjel (P)

Formula igazsága struktúrán

A $\mathcal{L}$ típusú struktúra α(x,y,z)

x,y,z helyettesítése $\mathcal{A}$ értékeivel

α-ban helyettesítés: $\alpha^{\delta^{a_1}}, \alpha^{\delta^{a_2}}$

Definíció

α^{δ} igaz az $\mathcal{A}$-n ➔ $\mathcal{A} \vDash \alpha^{\delta}$ (azaz $\mathcal{A}$ kielégíti α^{δ}-t)

2. Nevezetes logikailag ekvivalens formulák

2.1. Állításlogika

$\alpha\wedge(\beta\vee\gamma)$	$(\alpha\wedge\beta)\vee(\alpha\wedge\gamma)$	
$\alpha\vee(\beta\wedge\gamma)$	$(\boldsymbol{\alpha}\vee\boldsymbol{\beta})\wedge(\boldsymbol{\alpha}\vee\boldsymbol{\gamma})$	
$\neg(\beta\wedge\gamma)$	$\neg\boldsymbol{\alpha}\vee\neg\boldsymbol{\beta}$	De - Morgan
$\neg(\beta\vee\gamma)$	$\neg\boldsymbol{\alpha}\wedge\neg\boldsymbol{\beta}$	De - Morgan
$\neg\neg\alpha$	α	
$\neg(\alpha\rightarrow\beta)$	$\alpha\wedge\neg\beta$	
$\alpha\rightarrow\beta$	$\neg\alpha\vee\beta$	
$\alpha\rightarrow\beta\rightarrow\gamma$	$\alpha\rightarrow(\beta\rightarrow\gamma)$	
$\alpha\rightarrow(\beta\rightarrow\gamma)$	$\alpha\wedge\beta\rightarrow\gamma$	

2.2. Elsőrendű logika

$\forall x\forall y\alpha$	$\forall y\forall \boldsymbol{x\alpha}$	
$\exists x\exists y\alpha$	$\exists y\exists \boldsymbol{x\alpha}$	
$\forall x\alpha$	$\forall y\alpha(x\|y)$	(ha x cserélhető y-nal)
$\neg\forall x\alpha$	$\exists x\neg\alpha$	
$\neg\exists x\alpha$	$\forall x\neg\alpha$	
$\forall x(\alpha\wedge\beta)$	$\forall x\alpha\wedge\forall x\beta$	
$\exists x(\alpha\vee\beta)$	$\exists x\alpha\vee\exists x\beta$	
$\forall x(\alpha\vee\beta)$	$\forall x\alpha\vee\forall x\beta$	ha x nem szabad változó
$\exists x(\alpha\wedge\beta)$	$\exists x\alpha\wedge\exists x\beta$	ha x nem szabad változó
$\forall x\alpha$	α	ha x nem szabad változó
$\exists x\alpha$	α	ha x nem szabad változó

3. Az Igazság fogalma

Definíció

$\alpha\ igazsághalmaza: [\alpha] = \{\sigma = \ \alpha^{\sigma}\ igaz\ \mathcal{A} - n\}$

Tétel

$\alpha, \beta\ két\ formula, ekkor:$

$a)\ [\alpha\vee\beta] = [\alpha] \cup [\beta]$

$b)\ [\alpha\wedge\beta] = [\alpha] \cap [\beta]$

$c)\ [\neg\alpha] = \sim[\alpha]$

$$d)\ [\forall x\alpha] = \bigcap_{a\in\mathcal{A}} [\alpha^{\sigma_a^x}]$$

$$e)\ [\exists x\alpha] = \bigcup_{a\in\mathcal{A}} [\alpha^{\sigma_a^x}]$$

Definíció

Th A = {α : α mondat és α igaz A-n}

3.1. Logikai következmény

Jelölés

$\Sigma \vDash \alpha; ahol\ \Sigma\ formulahalmaz\ \text{és}\ \alpha\ egy\ rögzített\ formula$

$Jelentése: \Sigma - nak\ tétele$

Definíció

$\alpha\ logikai\ következménye\ \Sigma - nak\ (azaz\ \Sigma \vDash \alpha)$

$ha\ minden\ olyan\ \mathcal{A}\ struktúrára, \text{és}\ ezen\ \sigma\ \text{értékelésre}, melyre\ \Sigma\ valamennyi\ formulája\ igaz, \alpha\ is\ igaz$

Tétel

$\Sigma \vDash \alpha \iff \Sigma \cup \neg\alpha\ kielégíthetetlen$

Definíció

$\alpha\ \text{és}\ \beta\ logikailag\ ekvivalens\ \Sigma - ra\ nézve: \Sigma \vDash \alpha \leftrightarrow \beta$

Tétel (Dedukció)

$\beta \vDash \alpha \iff \vDash \beta \to \alpha$

4. Normálformák

4.1. Prenex normálforma

$Prenex\ alakú, ha\ \alpha = Q_1 x_1 Q_2 x_2 Q_n x_n \varphi$

$ahol\ Q_i\ vagy\ \exists\ vagy\ \forall\ (a\ formula\ prefixuma)$

$\varphi\ kvantormentes\ (a\ formula\ magja)$

Tétel

Az elsőrendű logika bármely formulája ekvivalens valamely prenex alakú formulával (de nem egyértelmű)

4.2. Skolem normálforma

Olyan prenex forma, melyben nem fordul elő ∃ kvantor.
Prenex alakhoz Skolem forma hozzárendelése egyértelmű.

4.3. Erős Skolem normálforma

Ha a magja konjunktív alakú (a fő kapcsolódási pontok ∧ - ek)

5. Bizonyításelmélet

5.1. Definíciók

$\Sigma\, ellentmondásos$	$\exists\alpha: \Sigma \vdash \alpha \text{ és } \Sigma \vdash \neg\alpha$
$\Sigma\, ellentmondástalan$	$\nexists\alpha: \Sigma \vdash \alpha \text{ és } \Sigma \vdash \neg\alpha$
$\alpha\, független\, \Sigma - tól$	$\Sigma \nvdash \alpha \text{ és } \Sigma \nvdash \neg\alpha$
$\Sigma\, komplett/teljes$	$\nexists\alpha, ami\, független\, \Sigma - tól$
$\Sigma\, aximatizálható$	$\exists\, rekurzív\, \Gamma, hogy\, \Sigma = Ded\, \Gamma$

5.2. Tételek

$Ha\, \Sigma \vdash \alpha, akkor\, \Sigma \vDash \alpha$

Kompaktsági tétel:

$\Sigma \vdash \alpha \Leftrightarrow \exists\Sigma' \subseteq \Sigma, ahol\!: \Sigma' \vdash \alpha$

Gödel teljességi tétele:

$\Sigma \vDash \alpha \Leftrightarrow \Sigma \vdash \alpha$

$Következmény\!: logikai\, axiómák\, esetén\!: \vDash \alpha \Leftrightarrow \vdash \alpha$

$\Rightarrow\, \vDash axiomatizálható$

Gödel teljességi tétele (2. alak):

$\Sigma\, kielégíthető\, (azaz\, van\, modellje) \Leftrightarrow \Sigma\, ellentmondástalan$

Szemantikai kompaktsági tétel:
$Tfh.\ \Sigma\, zárt\, formulák\, összessége$

1) Σ kielégíthetetlen $\Leftrightarrow \Sigma -$ nak van véges kielégíthetetlen része
2) Σ kielégíthető $\Leftrightarrow \Sigma\, \forall$ véges része kielégíthető

Az infinitezimális egzisztencia tétele

$Az\, \mathbb{R}\, elméletének\, \exists\, modellje, amelyben\, \exists\, inf.mennyiség, és\, \mathbb{R}\, izomorf\, beágyazható\, \mathcal{A} - ba$

Ellentmondástalanság fajtái

1) abszolút: önmagában (pl. természetes számok)
2) relatív: egy másik formulahalmazhoz képest (Gödel II ezt használja!)

6. Analitikus fák

Bizonyítási rendszerek:

1) levezetési (Hilbert)
2) cáfolati (Hilbert + indirekt)

$\mathcal{L}$ egyenlőségmentes → formulahalmazai végesek

3 lépés:

1) alapötlet (heurisztika)
2) kvázi-algoritmus (nem determinisztikus)

3) Implementáció

Definíció

Axióma-szerű elem:

1) Konjunktív-ekvivalensek:
   a. $\neg(\alpha \vee \beta)$ és $\neg\alpha \wedge \neg\beta$
   b. $\neg(\alpha \rightarrow \beta)$ és $\alpha \vee \neg\beta$
2) Diszjunktív-ekvivalensek:
   a. $\neg(\alpha \wedge \beta)$ és $\neg\alpha \vee \neg\beta$
   b. $(\alpha \rightarrow \beta)$ és $\neg\alpha \vee \beta$
3) Negáció-ekvivalensek:
   a. $\neg\neg\alpha$ és α
   b. $\neg\forall x\alpha$ és $\exists x \neg\alpha$
   c. $\neg\exists x\alpha$ és $\forall x \neg\alpha$

Definíció

Egy fa/ág állapotai:

1) Egy ág zárt, ha ott valamelyik csúcson ellentétpár található
2) Egy fa zárt, ha MINDEN ága zárt
3) Egy ág lebontott (nyílt), ha csak logikai formulákból áll (nincs kvantor, illetve egyéb operátorok)
4) Egy fa nyílt: LÉTEZIK nyílt ága

6.1. Cáfolati rendszerek bizonyítási elmélete

Definíció

Λ cáfolható analitikus fával, ha Λ-nak VAN zárt analitikus fája

Teljességi tétel

Λ kielégíthető $\Leftrightarrow$ Λ $\exists$ nyílt analitikus fája $\rightarrow$ ebből leolvasható Λ egy modellje

Tétel

$Ha\ \Gamma\ elmélet\ axiomatizálható\ és\ komplett \Longrightarrow \Gamma\ eldönthető$

Löwenheim-Skolem tétel:

$Tfh. |\mathcal{L}|\ \chi. Ha\ \Lambda$ kielégíthető, akkor kielégithető valamely megszámlálható modellen is.

($\Lambda -$ nak van modellje $\Longrightarrow$ van megszámlálható modellje is)

Gödel I inkomplettségi tétele

$A\ \pi\ elmélet\ ellentmondástalan\ és\ axiomatikus\ kiterjesztései\ INKOMPLETTEK$

Köv: $\pi\ elmélet\ ellentmondástalan\ kiterjesztései\ VAGY\ axiomatizálhatók\ VAGY\ komplettek$

Gödel II inkomplettségi tétele

$Létezik\ a\ \pi_p\ elmélettől\ független\ olyan\ formula, amelynek\ jelentése\ maga\ \pi_p - nek\ az\ ellentmondástalansága$