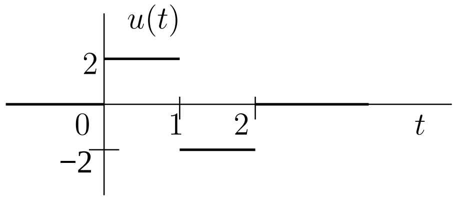
Folytonos idejű jelek és rendszerek

1. Egy lineáris, invariáns Kirchhoff hálózat sajátértékei: $\lambda_1 = -200s^{-1}$, $\lambda_{23} = (-100 \pm j200)s^{-1}$. Mekkora a legnagyobb időállandó?

$$\tau_{max} = \tau_{23} = -\frac{1}{Re\lambda_{23}} = 10ms.$$

(A szabad összetevő: $y_f(t) = M_1e^{\lambda_1 t} + M_2e^{\lambda_2 t} + M_3e^{\lambda_3 t}$, $M_2 = Ae^{j\gamma}$, $M_3 = Ae^{-j\gamma}$ jelöléssel $y_f(t) = M_1e^{\lambda_1 t} + 2Re\left(Ae^{(Re\lambda_2)t}e^{j(Im\lambda_2)t+\gamma}\right) = M_1e^{\lambda_1 t} + 2Ae^{(Re\lambda_2)t}\cos\left[(Im\lambda_2)t + \gamma\right])$

2. Egy rendszer ugrásválasza: $g(t) = 5\varepsilon(t)e^{-2t}$. Határozza meg a rendszer válaszjelét az alábbi gerjesztőjelre!



A rendszer lineáris és invariáns, ezért $y(t) = 2g(t) - 4g(t-1) + 2g(t-2) =$
$= 10\varepsilon(t)e^{-2t} - 20\varepsilon(t-1)e^{-2(t-1)} + 10\varepsilon(t-2)e^{-2(t-2)}$.

3. Adja meg a 2. feladatban ugrásválaszával adott rendszer impulzusválaszát!

   (a) Az impulzusválasz az ugrásválasz általánosított deriváltja:
   $h(t) = g(+0)\delta(t) + \varepsilon(t)\frac{\mathrm{d}g(t)}{\mathrm{d}t} = 5\delta(t) - 10\varepsilon(t)e^{-2t}$.

   (b) $G(s) = \frac{5}{s+2} = \mathbf{L}\left(\varepsilon(t)\right)H(s) = \frac{1}{s}H(s)$, $H(s) = sG(s) = \frac{5s}{s+2} = \frac{5(s+2)-10}{s+2} = 5 - \frac{10}{s+2}$,
   $h(t) = ...$

4. Egy R rezisztenciájú ellenállást és egy C kapacitású kondenzátort sorba kötünk, és az így létrejött kétpólusra a $t = 0$ pillanatban U_0 egyenfeszültséget kapcsolunk. Adja meg a kondenzátor áramának időfüggvényét!
$I_C(s) = \mathbf{L}\left(\varepsilon(t)U_0\right)\frac{1}{R+1/(sC)} = \frac{U_0}{s}\frac{sC}{sCR+1} = \frac{U_0}{R}\frac{1}{s+1/(CR)}$, $i_C(t) = \varepsilon(t)\frac{U_0}{R}e^{-t/(CR)}$

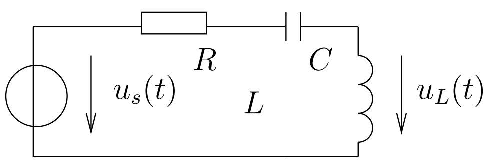
5. Számítsa ki a $h(t) = 2\delta(t) + \varepsilon(t)e^{-5t}$ impulzusválaszú rendszer válaszjelét az $u(t) = 10\varepsilon(t)e^{-4t}$gerjesztőjelre!
$Y()s) = U(s)H(s) = \frac{10}{s+4}\left(2 + \frac{1}{s+5}\right) = \frac{10}{s+4}\frac{2s+11}{s+5} = \frac{30}{s+4} + \frac{-10}{s+5}$; $y(t) = \varepsilon(t)\left(30e^{-4t} - 10e^{-5t}\right)$

6. Adja meg az 5. feladat rendszerének ugrásválaszát!

   (a) $g(t) = \varepsilon(t)\int_0^t h(\tau)d\tau = \varepsilon(t)\int_0^t\left[2\delta(\tau) + e^{-5\tau}\right]d\tau = 2 + \left[\frac{e^{-5\tau}}{-5}\right]_0^t = \varepsilon(t)\left(2 + \frac{1}{5} - \frac{1}{5}e^{-5t}\right) =$
   $\varepsilon(t)\left(2,2 - 0,2e^{-5t}\right)$.

   (b) $\mathbf{L}g(t) = \frac{1}{s}H(s) = \frac{1}{s}\left(2 + \frac{1}{s+5}\right) = \frac{2s+1}{s(s+5)} = \frac{2,2}{s} + \frac{-0,2}{s+5}$; $g(t) = ...$

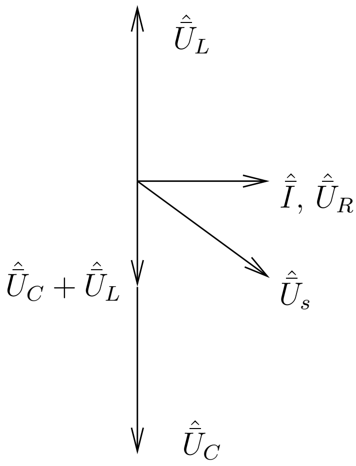
7. Határozza meg a tekercs feszültségének komplex amplitúdóját, effektív értékét és időfüggvényét!



$u_s(t) = \left(230\sqrt{2}\cos\omega t\right)V$, $R = 5\Omega$, $\omega L = 10\Omega$, $\frac{1}{\omega C} = 15\Omega$.

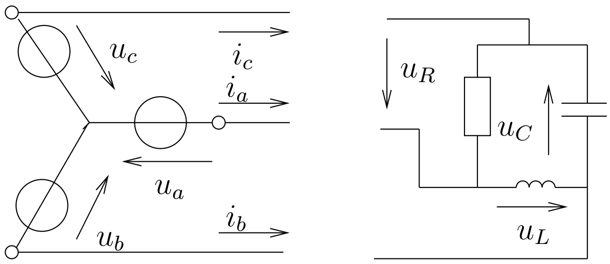
A komplex amplitúdó: $\hat{\hat{U}}_L = 230\sqrt{2}\frac{j10}{5-j15+j10} = \frac{j2300\sqrt{2}}{5\sqrt{2}e^{-j45^o}} = 460e^{j135^o}V$, az effektív érték: $325,26V$, az időfüggvény: $u_L(t) = \left[460\cos(\omega t + 125^o)\right]V$.

8. Oldja meg az előző feladatot szerkesztéssel!



Legyen (önkényesen) egy komponensen a feszültség és az áram fazorja ugyanolyan hosszú, ha a komponens impedanciájának abszolút értéke 5Ω. Az ábra szerint $\hat{\bar{U}}_L$ abszolút értéke kb 1,4-szerese $\hat{\bar{U}}_s$ abszolút értékének, (a számítás szerint $\sqrt{2}$-szöröse), szöge pedig utóbbi szögénél 135^o-kal nagyobb.

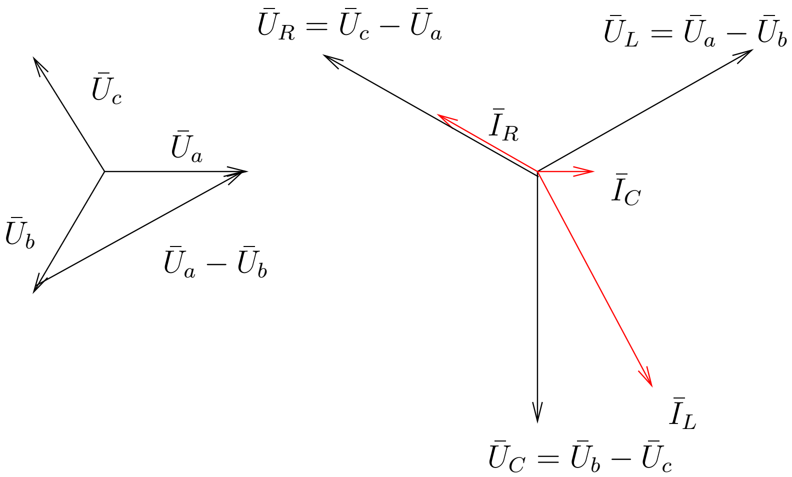
9. A szimmetrikus háromfázisú generátor fázisfeszültségeinek effektív értéke $230V$. Számítsa ki a vázolt háromfázisú fogyasztó hatásos teljesítményét!



$R = 20\Omega$, $\omega L = 10\Omega$, $\frac{1}{\omega C} = 50\Omega$

$P = P_R + P_L + P_C = \frac{(230\sqrt{3})^2}{20} W + 0 + 0 = 7,935kW.$

10. Az előző feladat háromfázisú generátora fázisfeszültségei komplex effektív értékének fazorábrája adott. Rajzolja fel a fogyasztói fázisfeszültségek, fázisáramok, és a vonaláramok fazorábráját!

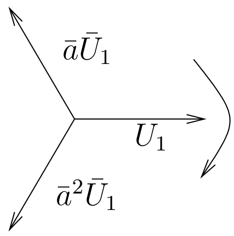


Az áram és feszültségfazor hossza 10Ω látszólagos ellenállás esetén ugyanakkora. Az ábrán fel nem tüntetett vonaláramok: $\bar{I}_a = \bar{I}_L - \bar{I}_R$, $\bar{I}_b = \bar{I}_C - \bar{I}_L$, $\bar{I}_c = \bar{I}_R - \bar{I}_C$.

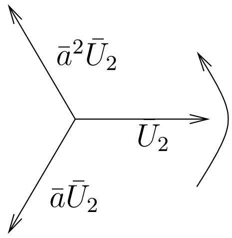
11. Egy háromfázisú rendszer feszültségei: $\bar{U}_a = 230V$, $\bar{U}_b = 20e^{-120^o}V$, $\bar{U}_c = 209e^{j120^o}V$. Számítsa ki a feszültség szimmetrikus összetevőit!

A szimmetrikus összetevők: $\bar{U}_1$, $\bar{U}_2$ és $\bar{U}_0$, ahol ($\bar{a} = e^{j120^o}$ jelöléssel):

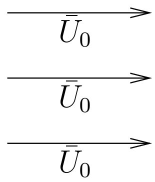
pozitív sorrendű:
$\bar{U}_1$, $\bar{a}^2\bar{U}_1$, $\bar{a}\bar{U}_1$



negatív sorrendű:
$\bar{U}_2$, $\bar{a}\bar{U}_2$, $\bar{a}^2\bar{U}_2$

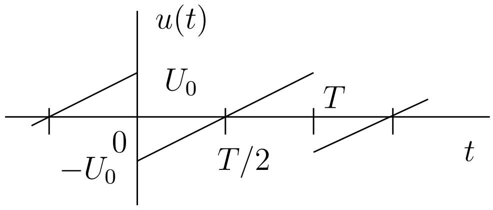


null sorrendű:
$\bar{U}_0$, $\bar{U}_0$, $\bar{U}_0$



$\bar{U}_1 = \frac{1}{3}\left(\bar{U}_a + \bar{a}\bar{U}_b + \bar{a}^2\bar{U}_c\right) = \frac{1}{3}\left(230 + e^{j120^o}20e^{-j120^o} + e^{j240^o}209e^{j120^o}\right) = 153V,$
$\bar{U}_2 = \frac{1}{3}\left(\bar{U}_a + \bar{a}^2\bar{U}_b + \bar{a}\bar{U}_c\right) = \frac{1}{3}\left(230 + e^{j240^o}20e^{-j120^o} + e^{j120^o}209e^{j120^o}\right) = 66,78e^{-j54,79^o}V,$
$\bar{U}_0 = \frac{1}{3}\left(\bar{U}_a + \bar{U}_b + \bar{U}_c\right) = \frac{1}{3}\left(230 + 20e^{-j120^o} + 209e^{j120^o}\right) = 66,78e^{-j54,79^o}V.$
Ellenőrzés: $\bar{U}_1 + \bar{U}_2 + \bar{U}_0 = \bar{U}_a$, $\bar{a}^2\bar{U}_1 + \bar{a}\bar{U}_2 + \bar{U}_0 = \bar{U}_b$, $\bar{a}\bar{U}_1 + \bar{a}^2\bar{U}_2 + \bar{U}_0 = \bar{U}_c$.

12. Számítsuk ki az alábbi periodikus feszültség effektív értékét!



$$U = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \left(u^2(t)\right)dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \left[U_0\left(-1 + 2\frac{t}{T}\right)\right]^2 dt} = \ldots = \frac{U_0}{\sqrt{3}}$$

13. számítsa ki az $i(t) = [10 + 20\cos\omega_0 t + 5\cos(2\omega_0 t + 30^o)]A$ áramjel effektív értékét!

$I = \sqrt{10^2 + \frac{20^2}{2} + \frac{5^2}{2}} = 17,868A.$

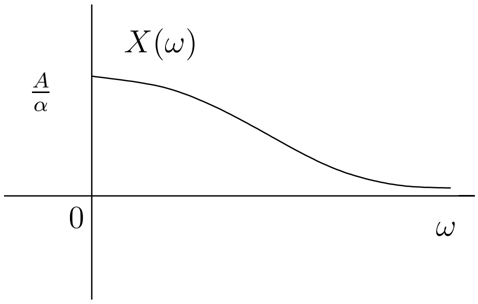
14. Számítsa ki a soros RL-tag feszültségének időfüggvényét és hatásos teljesítményét, ha árama a 13. feladatban adott áram, és $R = 10\Omega$, $\omega_0 L = 8\Omega$!

$\bar{Z}|_{\omega=0} = 10\Omega$, $\bar{Z}|_{\omega=\omega_0} = (10 + j8)\Omega = 12,8062e^{j38,66^o}\Omega$,
$\bar{Z}|_{\omega=2\omega_0} = (10 + j16)\Omega = 18,8680e^{j57,75^o}\Omega$,
$u(t) = [100 + 256,1240\cos(\omega_0 t + 38,86^o) + 94,3396\cos(2\omega_0 t + 87,75^o)]\,V.$
$P = [10 * 100 + \frac{1}{2} * 20 * 256,1240 * \cos(38,86^o) + \frac{1}{2} * 5 * 94,3396 * \cos(87,75^o - 30^o)]W = 3,1258kW.$

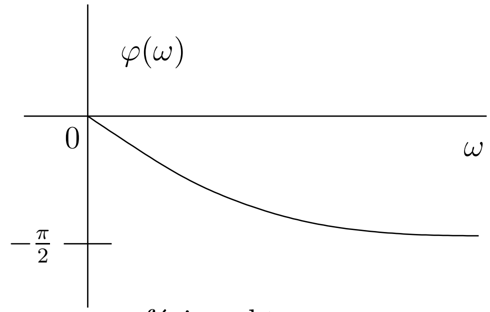
15. Határozza meg az $x(t) = \varepsilon(t)Ae^{-\alpha t}$ ($\alpha > 0$, $A > 0$) jel Fourier transzformáltját, vázolja az amolitúdó- és a fázisspektrumot! Mekkora a jel sávszélessége azzal a feltétellel, hogy az amplitúdó spektrum elhanyagolható, ha kisebb maximumának 5%-ánál!

(a) $\mathbf{F}\left(x(t)\right) = X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt = A\int_0^{\infty} e^{-(\alpha+j\omega)t}dt = \frac{A}{j\omega+\alpha}$.

(b) A jel belépő és abszolút integrálható, így $\mathbf{F}\left(x(t)\right) = \mathbf{L}\left(x(t)\right) = \left.\frac{A}{s+\alpha}\right|_{s=j\omega}$.
Az amplitúdó spektrum: $X(\omega) = \frac{A}{\sqrt{\omega^2+\alpha^2}}$,
a fázisspektrum: $-\frac{\pi}{2} < \varphi(\omega) =$-arctg$\frac{\omega}{\alpha} \leq 0$



amplitúdó spektrum



fázisspektrum

$\omega_1 = 0$, ω_2: $X(\omega_2) = \frac{A}{\sqrt{\alpha^2+\omega_2^2}} = 0,05\frac{A}{\alpha}$, $\omega_2 = \alpha sqrt399 \approx 20\alpha$.

$\Delta_\omega = \omega_2 - \omega_1 = 20\alpha$.

16. Határozza meg az $x(t) = Ae^{-\alpha|t|}$ $(\alpha > 0,\ A > 0)$ jel Fourier transzformáltját és Laplace transzformáltját! Mekkora a jel sávszélessége azzal a feltétellel, hogy az amplitúdó spektrum elhanyagolható, ha kisebb maximumának 2%-ánál!

    $\mathbf{F}\left(x(t)\right) = X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} Ae^{-\alpha|t|}e^{-j\omega t}dt = A\int_{-\infty}^{0} e^{\alpha t}e^{-j\omega t}dt + A\int_{0}^{\infty} e^{-\alpha t}e^{-j\omega t}dt = \frac{A}{\alpha-j\omega} + \frac{A}{\alpha+j\omega} = \frac{2\alpha A}{\alpha^2+\omega^2}$.

    $\mathbf{L}\left(x(t)\right) = \mathbf{L}\left(\varepsilon(t)Ae^{-\alpha t}\right) = \frac{A}{s+\alpha}$

    $\omega_1 = 0$, ω_2: $\frac{2\alpha A}{\alpha^2+\omega_2^2} = 0,02\frac{2A}{\alpha}$, $\omega_2 = 7\alpha$.

    $\Delta_\omega = \omega_2 - \omega_1 = 7\alpha$.

17. Adja meg a $h(t) = 2\delta(t) + 5\varepsilon(t)e^{-4t}$ impulzusválaszú folytonos idejű rendszer átviteli karakterisztikáját és átviteli függvényét!

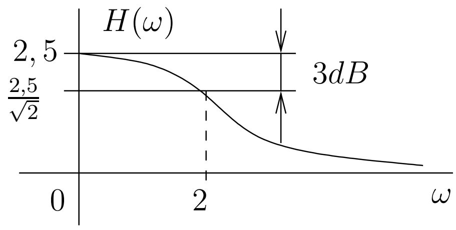
    Arendszer GV stabilis, (mert az impulzusválasz abszolút integrálható), $H(j\omega) = \mathbf{F}\left(h(t)\right) = 2 + \frac{5}{j\omega+4} = \frac{2j\omega+13}{j\omega+4}$.

    A rendszer kauzális, (mert az impulzusválasz belépő), $H(s) = \mathbf{L}\left(h(t)\right) = 2 + \frac{5}{s+4} = \frac{2s+13}{s+4}$.

    (Minthogy a rendszer kauzális és GV stabilis, $H(j\omega) = H(s)|_{s=j\omega}$.)

18. Adja meg a $h(t) = 5\varepsilon(t)e^{-2t}$ impulzusválaszú rendszer sávszélességét azzal a feltétellel, hogy az áteresztő sávban a legnagyobb megengedhető eltérés $3dB$!

    $H(j\omega) = \frac{5}{j\omega+2}$, $H(\omega) = \frac{5}{\sqrt{\omega^2+4}}$, $\omega_1 = 0$, az amplitúdó karakterisztika itt maximális, $-3dB \approx \frac{1}{\sqrt{2}}$, ω_2: $H(\omega_2) = \frac{5}{\sqrt{\omega_2^2+4}} = \frac{2,5}{\sqrt{2}}$, $\omega_2 = 2$, $\quad \Delta_\omega = \omega_2 - \omega_1 = 2$.



19. Adja meg a $H(s) = \frac{6s-5}{s+1}$ átviteli függvényű rendszer impulzusválaszát és ugrásválaszát!

    $H(s)$ áltört, polinomosztással: $H(s) = \frac{6(s+1)-11}{s+1} = 6 - \frac{11}{s+1}$; $\ h(t) = 6\delta(t) - 11\varepsilon(t)e^{-t}$,

    $g(t) = \mathbf{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\frac{6s-5}{s+1}\right) = \mathbf{L}^{-1}\left(\frac{-5}{s} + \frac{11}{s+1}\right)$; $\qquad g(t) = \varepsilon(t)\left(11e^{-t} - 5\right)$.

20. Adja meg az $x(t) = \varepsilon(t-2)e^{-0,5t}$ jel Laplace transzformáltját!

    (a) $x(t) = \varepsilon(t-2)e^{-0,5[(t-2)+2]} = e^{-1}\varepsilon(t-2)e^{-0,5(t-2)}$, $X(s) = e^{-2s}\frac{e^{-1}}{s+0,5}$.

    (b) $\mathbf{L}\left(\varepsilon(t-2)\right) = \frac{e^{-2s}}{s}$; $\mathbf{L}\left(\varepsilon(t-2)e^{-0,5t}\right) = \mathbf{L}\left(\varepsilon(t-2)\right)|_{s\to s+0,5}$, $\mathbf{L}\left(x(t)\right) = \frac{e^{-2(s+0,5)}}{s+0,5}$.

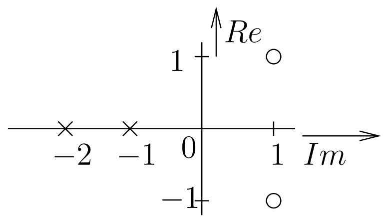
21. Adja meg az $x(t) = [\varepsilon(t) - \varepsilon(t-T)]\frac{A}{T}t$ jel Laplace transzformáltját!

$x(t) = \varepsilon(t)\frac{A}{T}t - \varepsilon(t-T)\frac{A}{T}[(t-T)+T] = \varepsilon(t)\frac{A}{T}t - \varepsilon(t-T)\frac{A}{T}(t-T) - \varepsilon(t-T)A,$

$X(s) = \frac{A}{Ts^2} - e^{-2s}\left(\frac{A}{Ts^2} + \frac{A}{s}\right).$

22. Egy rendszer átviteli függvényének pólus-zérus elrendezése adott:

Ismeretes továbbá, hogy az átviteli tényező nulla frekvencián 0,5. Határozza meg a rendszer impulzusválaszát!



$H(s) = A\frac{(s-1+j)(s-1-j)}{(s+1)(s+2)},\ H(j\omega)\big|_{\omega=0} = H(s)\big|_{s=0} = A\frac{(-1+j)(-1-j}{2} = A = 0,5.$

$H(s) = \frac{0{,}5s^2-s+1}{s^2+3s+2} = \frac{0{,}5(s^2+3s+2)-2{,}5s}{s^2+3s+2} = 0,5 + \frac{-2{,}5s}{(s+2)(s+1)} = 0,5 + \frac{-5}{s+2} + \frac{2{,}5}{s+1};$

$h(t) = 0,5\delta(t) + \varepsilon(t)\left(2,5e^{-t} - 5e^{-2t}\right).$

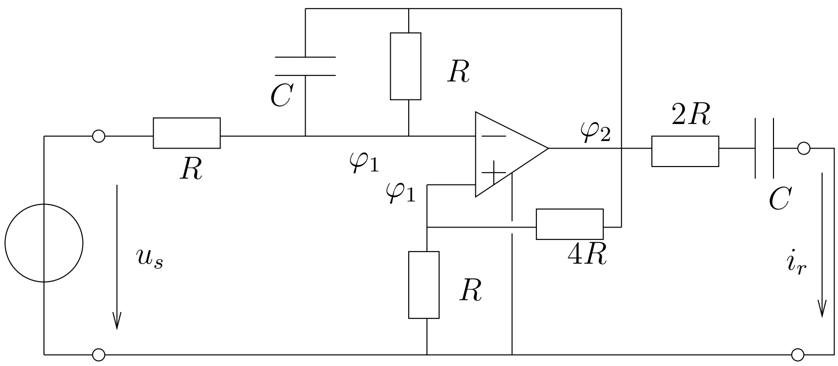
23. Minimál fázisú-e a 22. feladat rendszere? Ha nem, adja meg az átviteli függvényt egy mindent áteresztő és egy minimál fázisú rendszer átviteli függvényának szorzataként!

A rendszer nem minimál fázisú, zérus van a jobb félsíkon.

$H(s) = 0,5\frac{(s-1+j)(s-1-j)}{(s+1)(s+2)} = 0,5\frac{(s-1+j)(s-1-j)}{(s+1)(s+2)}\frac{(s+1+j)(s+1-j)}{(s+1+j)(s+1-j)} = 0,5\frac{(s+1+j)(s+1-j)}{(s+1)(s+2)}\frac{(s-1+j)(s-1-j)}{(s+1+j)(s+1-j)}$

$H_{MF}(s) = 0,5\frac{s^2+2s+2}{s^2+3s+2}$, és $H_{M\acute{A}}(s) = \frac{s^2-2s+2}{s^2+2s+2}.$

24. Az alábbi hálózattal adott rendszer bemeneti jele az $u_s(t)$ forrásfeszültség, válaszjele a bejelölt i_r rövidzárási áram. Határozza meg a rendszer átviteli függvényét!



$\frac{\Phi_1}{R} + \frac{\Phi_1-\Phi_2}{4R} = 0, \rightarrow \Phi_1 = 0,2\Phi_2;$

$\frac{0{,}2\Phi_2-U_s}{R} + \frac{0{,}2\Phi_2-\Phi_2}{\frac{1}{sC}} + \frac{0{,}2\Phi_2-\Phi_2}{R} = 0,\ \Phi_2 = U_s\frac{-5}{4sCR+3}.$

$I_r = \frac{\Phi_2}{2R+\frac{1}{sC}} = \Phi_2\frac{sC}{2sCR+1} = U_s\frac{-5}{4sCR+3}\frac{sC}{2sCR+1} = U_s\frac{-5sC}{8s^2C^2R^2+10sCR+3};\ H(s) = \frac{\frac{-5}{8CR^2}s}{s^2+\frac{5}{4CR}s+\frac{3}{8C^2R^2}}.$