Valószínűségszámítás pótzárthelyi dolgozat

Mérnök informatikus szak

2009. december 17.

1. Az együttes eloszlás: (5 pont, ha teljesen jó, ha van hibás akkor arányosan)

Y \ X	0	1	2	Y perem
0	$\frac{3}{28}$	$\frac{3}{28}$	0	$\frac{6}{28}$
1	$\frac{3\cdot 3}{28}$	$\frac{3+3}{28}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{16}{28}$
2	$\frac{3}{28}$	$\frac{3}{28}$	0	$\frac{6}{28}$
X perem	$\frac{15}{28}$	$\frac{12}{28}$	$\frac{1}{28}$	

$\mathbf{cov}(X,Y) = \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}X \cdot \mathbf{E}Y$ (2 pont)

$$\begin{aligned} \mathbf{E}X &= \sum_{i=0}^{2} i\mathbf{P}(X=i) \qquad (1\ pont) \\ &= \frac{1}{2} \qquad (0.5\ pont) \end{aligned}$$

$\mathbf{E}Y = 1$ (0.5 pont)

$\mathbf{E}(XY) = \frac{1}{2}$ (0.5 pont)

$\mathbf{cov}(X,Y) = 0$ (0.5 pont)

2. Annak a valószínűsége,hogy A és B egyszerre bekövetkezik:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(AB) &= \mathbf{P}(B \mid A)\,\mathbf{P}(A) \qquad (2\ pont) \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \qquad (0.5\ pont) \end{aligned}$$

Annak a valószínűsége, hogy A és B közül pontosan az egyik következik be:

$\mathbf{P}\left(A\bar{B}\right) + \mathbf{P}\left(\bar{A}B\right) =$ (2 pont)

$= (\mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(AB)) + (\mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(AB))$ (2 pont)

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(B) &= \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(A \mid B)} \qquad (1\ pont) \\ &= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{6} \qquad (0.5\ pont) \end{aligned}$$

Tehát a keresett valószínűség:

$\frac{3}{4} - \frac{1}{2} + \frac{5}{6} - \frac{1}{2} = \frac{7}{12}$, (1 pont)

ami nagyobb, mint $\frac{1}{2}$, vagyis annak a valószínűsége nagyobb, hogy A és B közül pontosan az egyik következik be. (1 pont)

3.

$$\begin{aligned} F_Y(t) &= \mathbf{P}(Y < t) \qquad (1\ pont) \\ &= \mathbf{P}\left(\ln \frac{1}{X} < t\right) = \mathbf{P}\left(\frac{1}{X} < e^t\right) = \mathbf{P}\left(X > e^{-t}\right) \qquad (2\ pont) \\ &= 1 - \mathbf{P}\left(X < e^{-t}\right) = 1 - F_X\left(e^{-t}\right) \qquad (2\ pont) \end{aligned}$$

$F_X(x) = \frac{x-1}{2-1} = x - 1$, ha $x \in [1, 2]$ (2 pont)

Tehát $F_Y(t) = 1 - (e^{-t} - 1) = 2 - e^{-t}$, (1 pont)

ha $t \in [-\ln 2, 0]$ (1 pont)

$F_Y(t) = 1$, ha $t > 0$ (0.5 pont)

$F_Y(t) = 0$, ha $t < -\ln 2$ (0.5 pont)

4. Ugyanúgy normális eloszlású lesz, (3 pont)

   a paraméterek:

   $\mathbf{E}Y = \mathbf{E}\left(\frac{5}{9}(X - 32)\right) = \frac{5}{9}(\mathbf{E}X - 32) = \frac{5}{9}(76 - 32) = \frac{220}{9}$ (3 pont)

   $\sigma^{\mathbf{2}}Y = \sigma^{\mathbf{2}}\left(\frac{5}{9}(X - 32)\right) = \left(\frac{5}{9}\right)^2 \sigma^{\mathbf{2}}X = \frac{25}{81}25$ (3 pont)

   Tehát $\sigma Y = \frac{25}{9}$ (1 pont)

5. Geometriai eloszlású lesz, hiszen a pontok száma megegyezik a sorsolások számával. (4 pont)

   A paraméter pedig

$$\begin{aligned} p &= \mathbf{P}(\text{egy véletlen pont beleesik a körbe}) \qquad (1\ pont) \\ &= \frac{\text{kör területe}}{\text{egész négyzet területe}} \qquad (3\ pont) \\ &= \frac{\pi}{4} \qquad (2\ pont) \end{aligned}$$

6. (ha lemarad $\forall \epsilon > 0$, -1 pont

   apróbb elírśokért, pl négyzet lemarad vagy rossz helyen van -1-1 pont

   ha nagyobb hiba van, akkor 0 pont)

Valószínűségszámítás pótzárthelyi dolgozat
Mérnök informatikus szak
2009. december 17.

1. Az együttes eloszlás: (5 pont, ha teljesen jó, ha van hibás akkor arányosan)

Y \ X	0	1	2	Y perem
0	$\frac{3}{28}$	$\frac{3}{28}$	0	$\frac{6}{28}$
1	$\frac{3\cdot 3}{28}$	$\frac{3+3}{28}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{16}{28}$
2	$\frac{3}{28}$	$\frac{3}{28}$	0	$\frac{6}{28}$
X perem	$\frac{15}{28}$	$\frac{12}{28}$	$\frac{1}{28}$	

$\mathbf{cov}\,(X,Y) = \mathbf{E}\,(XY) - \mathbf{E}X \cdot \mathbf{E}Y$ (2 pont)

$$\begin{aligned} \mathbf{E}X &= \sum_{i=0}^{2} i\mathbf{P}(X=i) \qquad (1\ pont) \\ &= \frac{1}{2} \qquad (0.5\ pont) \end{aligned}$$

$\mathbf{E}Y = 1$ (0.5 pont)
$\mathbf{E}(XY) = \frac{1}{2}$ (0.5 pont)
$\mathbf{cov}\,(X,Y) = 0$ (0.5 pont)

2. Annak a valószínűsége,hogy A és B egyszerre bekövetkezik:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\,(AB) &= \mathbf{P}\,(B \mid A)\,\mathbf{P}\,(A) \qquad (2\ pont) \\ &= \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{6} = \frac{1}{2} \qquad (0.5\ pont) \end{aligned}$$

Annak a valószínűsége, hogy A és B közül pontosan az egyik következik be:

$\mathbf{P}\left(A\bar{B}\right) + \mathbf{P}\left(\bar{A}B\right) =$ (2 pont)
$= (\mathbf{P}\,(A) - \mathbf{P}\,(AB)) + (\mathbf{P}\,(B) - \mathbf{P}\,(AB))$ (2 pont)

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\,(B) &= \frac{\mathbf{P}\,(AB)}{\mathbf{P}\,(A \mid B)} \qquad (1\ pont) \\ &= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{4} \qquad (0.5\ pont) \end{aligned}$$

Tehát a keresett valószínűség:

$\frac{5}{6} - \frac{1}{2} + \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{7}{12}$, (1 pont)

ami nagyobb, mint $\frac{1}{2}$, vagyis annak a valószínűsége nagyobb, hogy A és B közül pontosan az egyik következik be. (1 pont)

3.

$$\begin{aligned} F_Y(t) &= \mathbf{P}(Y < t) \qquad (1 \textit{ pont}) \\ &= \mathbf{P}\left(\ln \frac{1}{X} < t\right) = \mathbf{P}\left(\frac{1}{X} < e^t\right) = \mathbf{P}\left(X > e^{-t}\right) \qquad (2 \textit{ pont}) \\ &= 1 - \mathbf{P}\left(X < e^{-t}\right) = 1 - F_X\left(e^{-t}\right) \qquad (2 \textit{ pont}) \end{aligned}$$

$F_X(x) = \frac{x-2}{3-2} = x - 2$, ha $x \in [2, 3]$ (2 pont)

Tehát $F_Y(t) = 1 - (e^{-t} - 2) = 3 - e^{-t}$, (1 pont)

ha $t \in [-ln 3, -\ln 2]$ (1 pont)

$F_Y(t) = 1$, ha $t > -\ln 2$ (0.5 pont)

$F_Y(t) = 0$, ha $t < -\ln 3$ (0.5 pont)

4. Ugyanúgy normális eloszlású lesz, (3 pont)

   a paraméterek:

   $\mathbf{E}Y = \mathbf{E}\left(\frac{5}{9}(X - 32)\right) = \frac{5}{9}(\mathbf{E}X - 32) = \frac{5}{9}(86 - 32) = \frac{270}{9} = 30$ (3 pont)

   $\sigma^{\mathbf{2}} Y = \sigma^{\mathbf{2}}\left(\frac{5}{9}(X - 32)\right) = \left(\frac{5}{9}\right)^2 \sigma^{\mathbf{2}} X = \frac{25}{81} 16$ (3 pont)

   Tehát $\sigma Y = \frac{20}{9}$ (1 pont)

5. Geometriai eloszlású lesz, hiszen a pontok száma megegyezik a sorsolások számával. (4 pont)

   A paraméter pedig

$$\begin{aligned} p &= \mathbf{P}(\text{egy véletlen pont mindkét koordinátája pozitív}) \qquad (1 \textit{ pont}) \\ &= \frac{\text{kedvező terület}}{\text{egész négyzet területe}} \qquad (3 \textit{ pont}) \\ &= \frac{1}{4} \qquad (2 \textit{ pont}) \end{aligned}$$

6. (ha lemarad $\forall \delta > 0$, -1 pont

   ha kimarad, hogy nemnegatív val.változókra, -3 pont

   ha nagyobb hiba van, akkor 0 pont)