MATEMATIKA A2 1.ZH jav

2014 december 1.

Feladat	1.	2.	3.	4.	5.	$\sum$
max. pontszám	10	10	10	10	10	50
elért pontszám						

NÉV
NEPTUN KÓD
GYAK VEZ

1. Feladat. Vizsgáljuk meg, hogy a

$$\mathbf{v}_1 := (1,2,1), \quad \mathbf{v}_2 := (2,9,0), \quad \mathbf{v}_3 := (3,3,4)$$

vektorok bázist alkotnak-e $\mathbf{R}^3$-ban.

2. Feladat. Tekintsük a valós együtthatós, egyváltozós, legfeljebb másodfokú polinomokat. Alterét alkotják-e ennek a térnek azok a polinomok, amelyekre $p(1) = 0$? Ha igen, mennyi ennek az altérnek a dimenziója?

3. Feladat. Legyen $T_1(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2)$, $T_2(x_1, x_2) = (3x_1, 2x_1 + 4x_2)$ a standard bázisban. Írjuk fel a $T_2 \circ T_1$ mátrixát a standard bázisban.

4. Feladat. Adjuk meg a következő homogén lineáris egyenletrendszer megoldáshalmazát!

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl}
x & - & y & & & + & v & - & 2w & = & 0 \\
-x & & & + & 2z & - & 2v & - & 2w & = & 0 \\
2x & - & 2y & + & z & + & 2v & - & 5w & = & 0 \\
x & + & 3y & - & z & + & 5v & + & 7w & = & 0 \\
 & & y & + & z & + & v & + & w & = & 0
\end{array}$$

5. Feladat. Tekintsük $\mathbf{R}^4$-ben az egységkockát $C := \{(x,y,z,u) \,|\, 0 \leq x,y,z,u \leq 1\}$. Mekkora szöget zár be a kocka testátlója (az origót az $(1,1,1,1)$ ponttal összekötő szakasz) és egyik oldaléle (az origót a $(0,0,0,1)$ ponttal összekötő szakasz) ?

1. Feladat. Vizsgáljuk meg, hogy a

$$\mathbf{v}_1 := (1, 2, 1), \quad \mathbf{v}_2 := (2, 9, 0), \quad \mathbf{v}_3 := (3, 3, 4)$$

vektorok bázist alkotnak-e $\mathbf{R}^3$-ban.

1. Megoldás. Ha megmutatjuk, hogy lineárisan függetlenek, akkor tétel szerint **bázis** (3p).

$$c_1\mathbf{v} + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}\,(2p)$$

azaz

$$c_1(1, 2, 1) + c_2(2, 9, 0) + c_3(3, 3, 4) = (0, 0, 0)$$

$$(c_1 + 2c_2 + 3c_3, 2c_1 + 9c_2 + 3c_3, c_1 + 4c_3) = (0, 0, 0)\,(2p)$$

Az egyenletrendszert megoldva

$$c_1, c_2, c_3 = 0\,(2p)$$

tehát lineárisan **függetlenek** (1p).

---

2. Feladat. Tekintsük a valós együtthatós, egyváltozós, legfeljebb másodfokú polinomokat. Alterét alkotják-e ennek a térnek azok a polinomok, amelyekre $p(1) = 0$? Ha igen, mennyi ennek az altérnek a dimenziója?

2. Megoldás. Ha $p(1) = 0$ és $q(1) = 0$, akkor (1p) $(p + q)(1) = p(1) + q(1) = 0$, és (1p) $(\alpha p)(1) = \alpha p(1) = 0$, tehát az ilyen legfeljebb másodfokú polinomoknak halmaza (amelyek az 1 helyen a nulla értéket veszik fel,) zárt az összeadásra és számmal szorzásra nézve (2p), így ezek a polinomok alteret alkotnak (2p). Az ilyen polinomokból az $(x - 1)$ gyöktényező kiemelhető, így ezek $p(x) = (x - 1)h(x)$ alakúak (1p), ahol $h(x)$ legfeljebb elsőfokú (1p), azaz két valós együttható, x^0 és x^1 együtthatója egyértelműen meghatározza. Ennek az altérnek a dimenziója kettő (2p).

---

3. Feladat. Legyen $T_1(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2)$, $T_2(x_1, x_2) = (3x_1, 2x_1 + 4x_2)$ a standard bázisban. Írjuk fel a $T_2 \circ T_1$ mátrixát a standard bázisban.

3. Megoldás.
Első megoldás: $T_2(T_1(x_1, x_2)) = (3(x_1 + x_2), 2(x_1 + x_2) + 4(x_1 - x_2)) = (3x_1 + 3x_2, 6x_1 - 2x_2)$,

$$[T_2 \circ T_1] = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}.$$

Második megoldás:

$$[T_2 \circ T_1] = [T_2][T_1] = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}.$$

---

4. Feladat. Adjuk meg a következő homogén lineáris egyenletrendszer megoldáshalmazát!

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x & - & y & & & + & v & - & 2w & = & 0 \\ -x & & & + & 2z & - & 2v & - & 2w & = & 0 \\ 2x & - & 2y & + & z & + & 2v & - & 5w & = & 0 \\ x & + & 3y & - & z & + & 5v & + & 7w & = & 0 \\ & & y & + & z & + & v & + & w & = & 0 \end{array}$$

4. Megoldás. Csak az együtthatómátrix elemeit írjuk ki (2+2+2+2p).

$$\left|\begin{array}{rrrrr|rrrrr|rrrrr|rrrrr} \boxed{1} & -1 & 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & -2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -2 & -2 & 0 & \boxed{-1} & 2 & -1 & -4 & 0 & 1 & -2 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 2 & -5 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 5 & 7 & 0 & 4 & -1 & 4 & 5 & 0 & 0 & 7 & 0 & -7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right|$$

Három kötött és két szabad ismeretlen van (1p), az egyenletrendszer átalakítások után (1p):

$$\begin{array}{rcrcl} x & = & -2v & & \\ y & = & -v & - & 2w \\ z & = & w & & \end{array}$$

Vektorosan:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ v \\ w \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

---

5. Feladat. Tekintsük $\mathbf{R}^4$-ben az egységkockát $C := \{(x, y, z, u) \,|\, 0 \leq x, y, z, u \leq 1\}$. Mekkora szöget zár be a kocka testátlója (az origót az $(1, 1, 1, 1)$ ponttal összekötő szakasz) és egyik oldaléle (az origót a $(0, 0, 0, 1)$ ponttal összekötő szakasz) ?

5. Megoldás. A kocka testátlóját reprezentálja a $\mathbf{d} := (1,1,1,1)$ vektor $\boxed{\mathbf{1p}}$, az oldalélet $\mathbf{u} := (0,0,0,1)$ $\boxed{\mathbf{1p}}$. Jelölje a keresett szöget θ $\boxed{\mathbf{1p}}$. Ekkor $\boxed{\mathbf{2p + 1p + 1p + 1p + 1p}}$

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{d} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{d}\|} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Ezért $\theta = 60^\circ$ $\boxed{\mathbf{1p}}$.
