

# A FORGÓ MOZGÁS DINAMIKÁJA II (FORGÁS MOZGÓ TENGE LY KÖRÜL)

(13-2)

$$\frac{dL}{dt} = M_{\text{TKP}}$$

„A gyorsan forgó pörgettyű olyan, mint az öszvér: egyik sem arra indul, amerre taszítják.”

## 13.1 Bevezetés

Az előző fejezetben a merev test rögzített tengely körüli forgását tárgyaltuk. Most kiterjesztjük vizsgálatainkat arra a sokkal általánosabb esetre, amikor a test egyidejűleg forgó és haladó mozgást is végez – ilyen például a lejtőn legördülő labda, vagy egy olyan tárgy, amelyet úgy hajítunk fel, hogy a mozgása közben egyik feléről a másikra fordul. (13-1c ábra.) Ezek az összetett mozgások egyszerűen leírhatók, a tömegközéppont haladó mozgásának és a tömegközéppont körüli forgásnak az eredőjeként. A feladatok megoldásánál ezt a kétféle mozgástípust mindig külön-külön vizsgáljuk.

Az egyszerűség kedvéért általában nagyfokú szimmetriával rendelkező testek (gömbök, hengerek, karikák) mozgását vizsgáljuk, amelyek úgy mozognak a térben, hogy *mozgó tengelyük mindig párhuzamos marad.*

## 13.2 Testek általános mozgása

A továbbiakban a test fogalmát általánosabb értelemben használjuk, így pl. testnek tekintünk egy tömegközéppontrendszerrel vagy egyetlen merev testet vagy azok egy rendszerét.

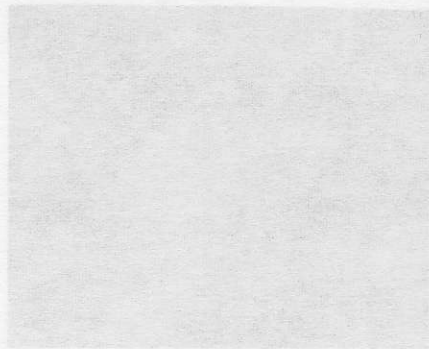
A 9. fejezet (9-14) egyenletében levezettük Newton második törvényét egy tömegpontrendszerre:

*Az M tömegű test tömegközéppontjának (TKP) haladó mozgása olyan, mintha egyetlen M tömegű pont mozogna a külső eredő erő hatására.*

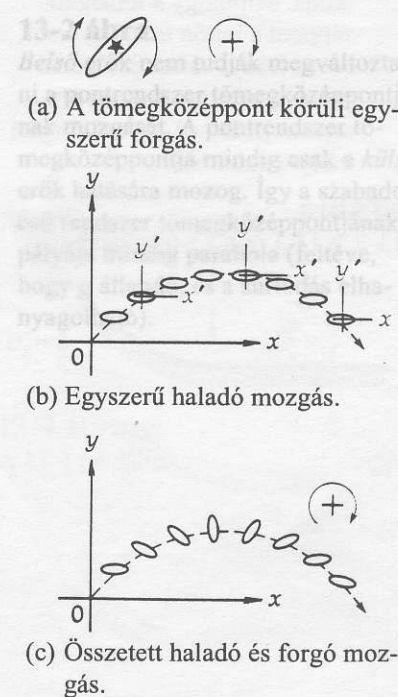
Newton második törvénye a tömegközéppont haladó mozgására

$$\sum \mathbf{F}_{\text{ext}} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} = M\mathbf{a}_{\text{TKP}} \quad (13-1)$$

Meghatároztuk a külső forgatónyomatékok erőjének a hatását is (12-16) egyenlet szerint.



Lehetséges, hogy a gyorsan forgó pörgettyű a lejtőn legördül, mint az öszvér. A gyorsan forgó pörgettyű a lejtőn legördül, mint az öszvér. A gyorsan forgó pörgettyű a lejtőn legördül, mint az öszvér.



**13-1 ábra.** Merev test néhány lehetséges mozgása kétdimenzióban.

Valamely test rögzített  $\star$  tengelyre vonatkozó impulzusmomentumának változási sebessége egyenlő az erre a tengelyre vonatkozó külső forgatónyomatékok eredőjével.

$$\sum M_{\text{ext}} = \frac{dL_z}{dt} = I\alpha, \quad (13-2)$$

ahol mind  $M$ , mind  $I$  a rögzített  $\star$  tengelyre vonatkozik. A következőkben pedig minden bizonyítás nélkül kimondjuk az alábbi fontos tételt:

**Egy test tömegközéppontra vett impulzusmomentumának változási sebessége egyenlő a tömegközéppontra vett külső forgatónyomatékok eredőjével még akkor is, ha a test tömegközéppontja – a gyorsulást is beleértve – elmozdul.**

Az impulzusmomentum-tétel a tömegközéppont körüli forgásra

$$\sum_{(\text{TKP körül})} M_{\text{ext}} = \frac{dL}{dt} \quad (13-3)$$

Amennyiben a test síkmozgást végez (ekkor a test minden egyes pontja a mozgás során egy síkban marad) és a tömegközépponton átmenő forgástengely szimmetriatengely, akkor a (13-3) egyenlet a

$$\sum M = I\alpha_{\text{TKP}} \quad (\text{TKPKörül})$$

alakra egyszerűsödik, ahol  $M$  és  $I$  a tömegközéppontra vonatkozik<sup>1</sup> és  $I$  a szimmetria miatt állandó. Ekkor  $L$  és  $\omega$  párhuzamosak, azaz  $L = I\omega$

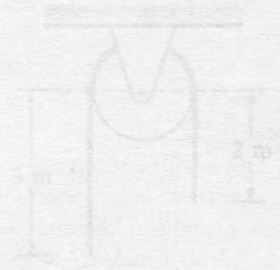
A (13-1) és a (13-2) egyenlet érvényes bármely testre vagy bármely részcsekkéből álló zárt rendszerre. Levezetésüknél a testek merevsége nem volt lényeges követelmény. Ezért a belőlük levonható következtetések a nemmerev testekre is, érvényesek így alkalmazhatók csillagok gömbszerű halmazára, vagy egy a levegőben tekeregve eső macskára, amelyik mindenképpen a talpára szeretne esni. Például a kilőtt srápnell felrobbanása nem változtatja meg a tömegközéppont mozgását; a repeszek egészének tömegközéppontja, változatlanul parabola pályán mozog bár a repeszek különféle pályákon érnek földet. Minthogy a srápnell repeszait szétrobbantó erők teljes egészében belső erők, azért a rendszerre ható egyetlen külső erő a gravitáció. Ennélfogva  $F_{\text{ext}} = Ma_{\text{TKP}}$ , a tömegközéppont ugyanazt a hajítási pályát követi, függetlenül attól, hogy volt-e robbanás, vagy sem. Hasonlóképpen, ha egy műugró egyszer már elhagyta az ugródeszkát, tömegközéppontjának mozgását már nem tudja megváltoztatni, tekintet nélkül arra, hogyan mozgatja kezét, lábát (13-2c ábra).

### 13.3 Felületen való gördülés

Gyakori jelenség, hogy egy test egy felületen gördül. A csúszásmentes gördülés esetében a tömegközéppont haladó mozgása ( $x$ ,  $v$  és  $a$  kinematikai jellemzőkkel) szoros kapcsolatban van a tömegközéppont körüli ( $\theta$ ,  $\omega$  és  $\alpha$  mennyiségekkel kifejezett) forgó mozgással. Erre az esetre felírható, hogy  $x = r\theta$ ,  $v = r\omega$  és  $a = r\alpha$ . A teljes  $K$  kinetikus energia a tömegközéppont

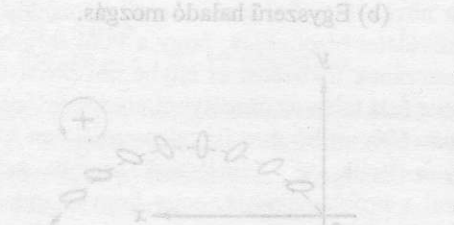
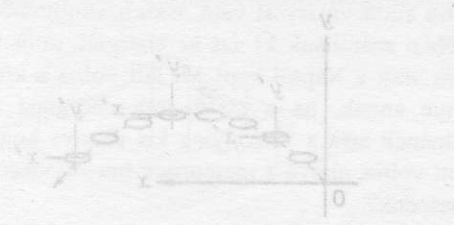
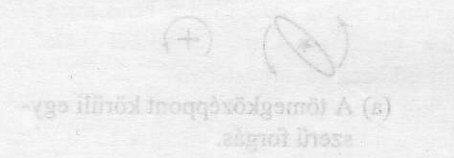
<sup>1</sup> A 13.4 pontban tárgyaltak szerint van néhány olyan eset, amikor a forgatónyomaték számítására nem csak a tömegközéppont, hanem más pont is használható még akkor is, ha a tömegközéppont gyorsul. Azonban addig, amíg nem ismerjük azokat a megszorításokat amelyek mellett más pont is használható, a legbiztosabb a tömegközéppontra vonatkoztatni akkor is ha a tömegközéppont gyorsul.

(b) Vonóvasközi kábel...  
 (c) A test tömegközéppontjának...  
 (d) A test tömegközéppontjának...  
 (e) A test tömegközéppontjának...

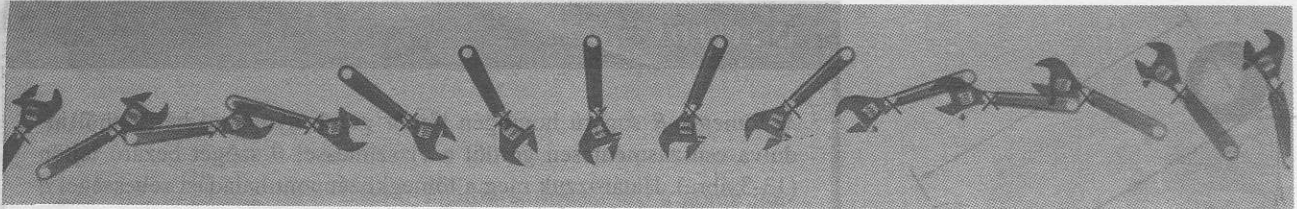


13-49 ábra  
13-50 feladathoz

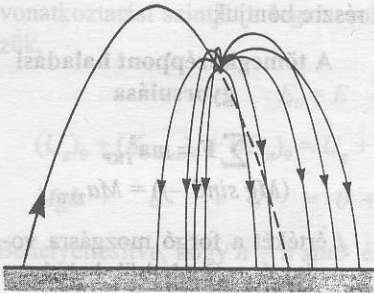
13-57 Egy hajlékony lán...  
 13-58 Kérjük el, hogy egymillió...  
 13-59 Kérjük el, hogy egymillió...



13-1 ábra  
Merev test néhány lehetséges mozgása két dimenzióban



(a) Vízszintes súrlódásmentes felületen csúszó csavarkulcsról készült felvétel. Minthogy a csavarkulcsra ható erők eredője zérus, azért tömegközéppontja (keresztrel jelölve) a csavarkulcs forgása közben egyenesvonalú pályán állandó sebességgel halad.



(b) Ha egy lövedék repülés közben felrobban, a széthulló repeszek tömegközéppontjának parabola-pályája ugyanaz, mint ami robbanás nélkül lett volna.



(c) Miután a műugró elhagyta az ugródeszkat, tömegközéppontjának parabola-pályáját már nem tudja megváltoztatni.



(d) Lehetséges, hogy a lécet átugró atléta tömegközéppontja a lécz alatt megy át? A fénykép a bolgár Stefka Kostadinovát mutatja, amint saját magasugró rekordját javítja 1987-ben a Római Atlétikai Világbajnokságon.

körüli forgás  $K_{rot}$  kinetikus energiájának és a tömegközéppont haladó mozgása  $K_{trans}$  kinetikus energiájának az összege. [Lásd a (9-22) és a (9-23) egyenleteket.]

Kinetikus energia (csúszásmentes gördülés) 
$$K = K_{rot} + K_{trans} = \frac{1}{2} I_{TKP} \omega^2 + \frac{1}{2} M v_{TKP}^2 \quad (13-4)$$

Ezeknek a fogalmaknak az alkalmazását a következő példák illusztrálják.

**13-1 PÉLDA**

Homogén tömör gömb állandó sebességgel csúszásmentesen gördül vízszintes felületen. Teljes kinetikus energiájának mekkora hányada a tömegközéppont körüli forgásának energiája?

**MEGOLDÁS**

A keresett energiahányad

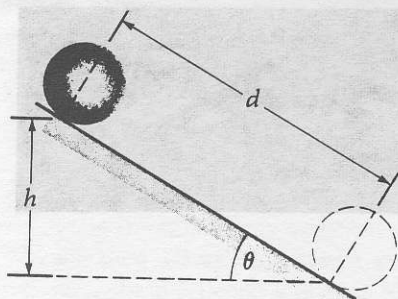
$$\frac{K_{rot}}{K_{összes}} = \frac{K_{rot}}{K_{trans} + K_{rot}} = \frac{(1/2)I\omega^2}{(1/2)Mv_{TKP}^2 + (1/2)I\omega^2} = \frac{1/2[(2/5)MR^2]\omega^2}{1/2Mv_{TKP}^2 + 1/2[(2/5)MR^2]\omega^2}$$

Minthogy a gömb csúszásmentesen gördül,  $v_{TKP} = R\omega$ :

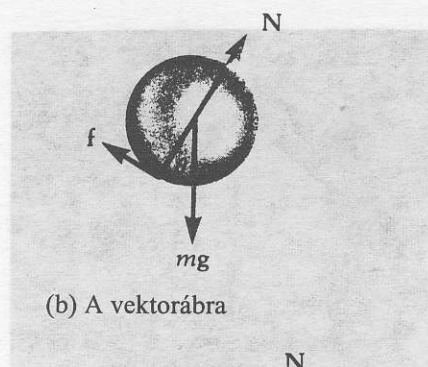
$$\frac{K_{rot}}{K_{összes}} = \frac{(2/5)v_{TKP}^2}{v_{TKP}^2 + (2/5)v_{TKP}^2} = \frac{2}{7}$$

**13-2 ábra.**

Belső erők nem tudják megváltoztatni a pontrendszer tömegközéppontjának mozgását. A pontrendszer tömegközéppontja mindig csak a külső erők hatására mozog. Így a szabadon eső rendszer tömegközéppontjának pályája mindig parabola (feltéve, hogy  $g$  állandó, és a súrlódás elhanyagolható).



(a)



(b) A vektorábra



(c) Egymásra merőleges komponensekre bontott erők diagramja. Minthogy a tömegközéppont a lejtőn lefelé gyorsul, ezt az irányt választjuk pozitívnak és (mert  $a = R\alpha$ ), az óramutató járásával egyező forgási irányt pozitívnak.

### 13-3 ábra.

A 13-2, a 13-3 és a 13-6 példához.

### 13-2 PÉLDA

$M$  tömegű,  $R$  sugarú homogén tömör gömb nyugalmi helyzetből indulva csúszásmentesen gördül a vízszintessel  $\theta$  szöget bezáró lejtőn (13-3 ábra). Határozzuk meg a tömegközéppont haladási sebességét  $d$  távolság megtétele után!

### MEGOLDÁS

Mint hogy nincs csúszás, ezért a súrlódás, (ami a tömegközéppontra vonatkozóan az  $fR$  forgatónyomatékokat adja) *nyugalmi* súrlódási erő. De mivel nem tudjuk, hogy a csúszás határán van-e a gömb, ezért nem tételzhetjük fel, hogy a *maximális* nyugalmi súrlódás működik (azaz  $f \neq \mu_s N$ ). A forgatónyomatékokat a tömegközéppontra fogjuk vonatkoztatni, és a mozgás vizsgálatát két részre bontjuk

#### A tömegközéppont körüli forgás gyorsulása

$$\sum_{(\text{TKP körül})} M = I\alpha$$

$$fR = (2/3)MR^2\alpha$$

$$f = (2/3)MR\alpha$$

Minthogy  $a_{\text{TKP}} = R\alpha$ , ezért

$$f = (2/5)Ma_{\text{TKP}}$$

#### A tömegközéppont haladási gyorsulása

$$\sum F = ma_{\text{TKP}}$$

$$(Mg \sin \theta - f) = Ma_{\text{TKP}}$$

$f$  értékét a forgó mozgásra vonatkozó egyenletből behelyettesítve és  $a_{\text{TKP}}$ -ra megoldva:

$$\left( Mg \sin \theta - \frac{2Ma_{\text{TKP}}}{5} \right) = Ma_{\text{TKP}}$$

$$(5/7)(g \sin \theta) = a_{\text{TKP}}$$

Ahhoz, hogy meghatározzuk azt a pillanatnyi sebességet, amellyel a tömegközéppont a gömb  $d$  távolsággal való elmozdulása után halad, figyelembe kell venni, hogy a tömegközéppont  $a_{\text{TKP}}$  gyorsulása állandó. Ezért a haladó mozgásra vonatkozó kinematikai egyenletet kell alkalmazunk:

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

$$v^2 = (0)^2 + 2[(5/7)g \sin \theta](d - 0)$$

$$v = \sqrt{\frac{10gd \sin \theta}{7}}$$

A fenti példa a gördülő testek vizsgálatával kapcsolatosan fontos szempontot illusztrál. Ha a test *csúszásmentesen gördül*, akkor a test tömegközéppontjának  $v_{\text{TKP}}$  haladási sebessége és a test  $\omega$  szögsebessége között fennáll a  $v_{\text{TKP}} = R\omega$  összefüggés. Hasonlóképpen érvényes, hogy  $a_{\text{TKP}} = R\alpha$ .

Egyenleteinkben az  $x$  tengely pozitív irányát és a pozitív forgásirányt úgy választjuk meg, hogy a tömegközéppont pozitív irányú elmozdulása a tömegközéppont körüli forgás pozitív irányának feleljen meg.

### 13-3 PÉLDA

Itt az előző példának egy másik megoldási módszerét mutatjuk be. Vegyük észre, hogy miután a gömb a lejtőn  $d$  távolsággal legördült, a tömegközéppont  $h = d \sin \theta$  függőleges távolságnyira lejjebb került. Az energiamegmaradás törvényének alkalmazásával meghatározható

a  $h$  függőleges távolsággal lesüllyedt gömb tömegközéppontjának sebessége.

### MEGOLDÁS

Úgy tűnik, hogy a gömbre ható nyugalmi súrlódási erő a gömb gördülése során elmozdul, amiből (tévesen) arra következtethetnénk, hogy ez az erő valamilyen munkát végez, vagy hőt termel. Ez nem igaz; a gördülési folyamatban a nyugalmi súrlódási erő csupán átkerül a gördülő test egyik érintkezési pontjáról a másikra. Továbbá, ha egy test csúszásmentesen gördül, akkor hő sem fejlődhet. (Csak a mozgási súrlódási erő hatására jön létre hő az  $f_k \cdot x$  összefüggésnek megfelelően.)

A rendszer konzervatív, ezért alkalmazhatjuk a mechanikai energia megmaradásának törvényét. A gravitációs helyzeti energia zérus vonatkoztatási szintjét a legalacsonyabb pontba, a lejtő aljára helyezzük.

$$E_0 = E$$

$$(U_g)_0 + (K_{transz})_0 + (K_{rot})_0 = U_g + K_{transz} + K_{rot}$$

$$Mgh + 0 + 0 = 0 + \frac{1}{2}Mv_{TKP}^2 + \frac{1}{2}[(2/5)MR^2]\omega^2$$

Behelyettesítve, hogy  $h = d \sin\theta$  és figyelembe véve, hogy  $v_{TKP} = R\omega$ ,

$$Mgd \sin\theta = (1/2)Mv_{TKP}^2 + (1/5)Mv_{TKP}^2$$

$$gd \sin\theta = (7/10)v_{TKP}^2$$

$$v_{TKP} = \sqrt{\frac{10gd \sin\theta}{7}}$$

Amint a fenti példa mutatja, az energiamegmaradás elvének alkalmazása gyakran a rövidebb módszer. Sőt, bizonyos esetekben, az energiamegmaradási elv alkalmazása az egyetlen lehetséges módszer, mert pl. a következő példában  $a_{TKP}$  és  $\alpha$  iránya folytonosan változik, és a kinematikai egyenletek nem alkalmazhatók.

### 13-4 PÉLDA

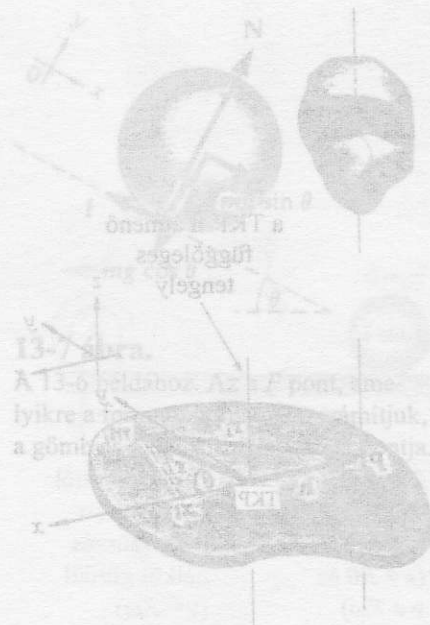
$M$  tömegű,  $R$  sugarú tömör gömb nyugalmi helyzetből indulva csúszásmentesen legördül egy görbült pályán (13-4 ábra). Határozzuk meg a tömegközéppont sebességét, miután a gömb függőlegesen  $h$  távolsággal lejjebb került.

### MEGOLDÁS

A feladat megoldására a kinematikai egyenletek nem alkalmazhatók, mert a gömb mozgása során a tömegközéppont gyorsulása nem állandó, (lejtőn a gyorsulás állandó lenne). Az egyetlen lehetséges megoldási módszer az energiamegmaradási tétel alkalmazása:

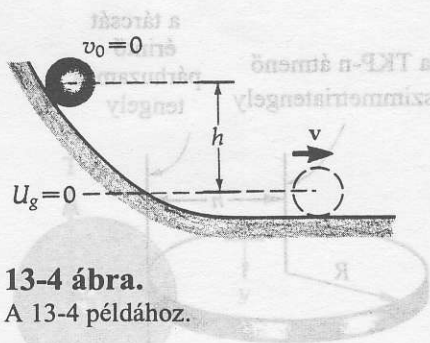
$$E_0 = E$$

A mozgás végső szakasza gördülés vízszintes pályán.



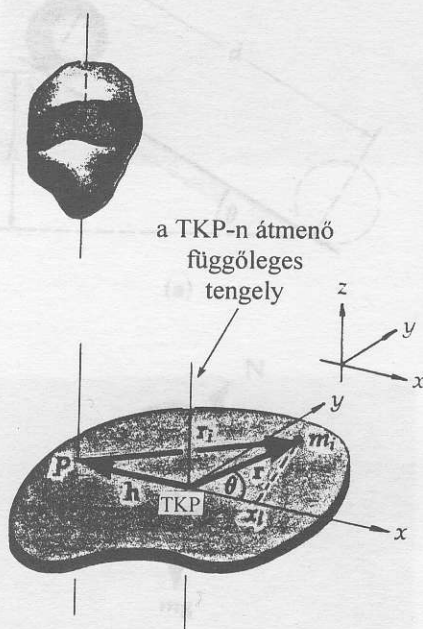
13-4 ábra.

Látvány egy vékony vízszintes szelét. Ha ismerjük a szelét aljáról merőleges a szelét tömegközéppontján (itt az  $x$  tengelyek origóján) átmennő forgástengelyre vonatkozó  $L_x$  tétel-telenségi nyomatékot, akkor a Steiner-tétellel bármely más  $x'$  ponton átmennő párhuzamos tengelyre is megkaphatjuk a tételenségi nyomatékot.



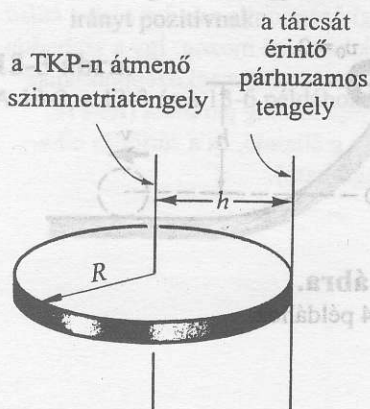
13-4 ábra.

A 13-4 példához.



13-5 ábra.

Látható egy vékony vízszintes szelet. Ha ismerjük a szelet síkjára merőleges, a szelet tömegközéppontján (itt az  $xy$  tengelyek origóján) átmenő forgástengelyre vonatkozó  $I_{TKP}$  tehetetlenségi nyomatékot, akkor a Steiner tétellel bármely más  $P$  ponton átmenő párhuzamos tengelyre is megkaphatjuk a tehetetlenségi nyomatékot.



13-6 ábra.

A 13-5 példához.

## 13.4 A párhuzamos tengelyek tétele (Steiner tétel)

A  $\Sigma \mathbf{M} = I\alpha$  összefüggés alkalmazásához mindaddig olyan tengelyt használtunk, ami átmegy a tömegközépponton. De más tengelyt is használhatunk, feltéve, hogy ez rögzítve van, vagy úgy mozog, hogy megtartsa irányát a térben (azaz *önmagával párhuzamosan mozog*). A tehetetlenségi nyomaték számítását az olyan tengelyekre, amelyek nem mennek át a tömegközépponton, nagy mértékben megkönnyíti a *Steiner tétel* vagy a *párhuzamos tengelyek tétele* néven ismert tétel.

Tekintsünk egy tetszőleges alakú testet, amelynek a tömegközéppontján átmenő tengelyére ismerjük az  $I_{TKP}$  tehetetlenségi nyomatékot. Képzeljük el a tengelyre merőlegesen a testből kivágott vékony lemezt. (13-5 ábra) Tegyük fel, hogy a  $P$  ponton átmenő, és az *eredeti tengellyel párhuzamos* tengelyre akarjuk a tehetetlenségi nyomatékot meghatározni. Ha a test egyik tömegpontját  $m_i$ -vel jelöljük, akkor a lemez  $P$  pontra vett  $I$  tehetetlenségi nyomatéka

$$I = \sum m_i r_i^2$$

A koszinusz tételt (D függelék) az  $r$ ,  $r_i$  és  $h$  szakaszokból alkotott háromszögre alkalmazva az alábbi összefüggést kapjuk:

$$r_i^2 = r^2 + h^2 + 2rh \cos \theta$$

Behelyettesítve ezt az értéket  $I$  fenti kifejezésébe:

$$I = \sum m_i r^2 + \sum m_i h^2 + \sum m_i (2rh \cos \theta)$$

Mivel  $h$  állandó, így a szumma jel elé kiemelhető:

$$I = \sum m_i r^2 + h^2 \sum m_i + 2h \sum m_i r \cos \theta$$

Az első tag éppen a tömegközéppontra vonatkoztatott  $I_{TKP}$  tehetetlenségi nyomaték, a második tag  $Mh^2$ , ahol  $M$  a test egész tömege. A harmadik tag zérussal egyenlő, mert  $r \cos \theta = x_i$  nem más, mint az  $r$  szakasznak az  $x$  tengelyre eső vetülete, és a tömegközéppont definíciójából (9.4 fejezet) az egész rétegre  $\sum m_i x_i = 0$ . Az eljárást a testet alkotó összes rétegre kiterjesztve megkapjuk a párhuzamos tengelyek tételét:<sup>2</sup>

$$\text{Steiner tétel} \quad I = I_{TKP} + Mh^2 \quad (13-5)$$

Az összefüggést könnyen megjegyezhetjük, ha a mozgást úgy tekintjük, mint a test tömegközéppont körüli forgásának és a tömegközéppont új tengelye körüli körön végzett translációjának eredőjét. A második tag abból adódik, hogy a testet a tömegközéppontjába koncentrált, az új tengely körüli  $h$  sugarú körön mozgó tömegpontnak tekintjük.

### 13-5 PÉLDA

Határozzuk meg az  $M$  tömegű,  $R$  sugarú homogén tömör tárcsa tehetetlenségi nyomatékát a síkjára merőleges, egy kerületi ponton átmenő tengelyre vonatkozóan. (13-6 ábra).

### MEGOLDÁS

A tömegközépponton átmenő, a tárcsa síkjára merőleges tengelyre a tehetetlenségi nyomaték  $\frac{1}{2}MR^2$ . A Steiner tétel alkalmazásával

$$I = I_{TKP} + Mh^2 = \frac{1}{2}MR^2 + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2$$

<sup>2</sup> Egy ezzel kapcsolatos összefüggés *poláris-axiális tételként* ismeretes. (Megfogalmazva a 13C-33 feladatban.)

13-6 PÉLDA

Tekintsünk ismét egy lejtőn csúszás nélkül legördülő homogén tömör gömböt (13-2 és 13-3 példa). A Steiner tétel felhasználásával határozzuk meg a gömb tömegközéppontjának gyorsulását. (Lásd a 13-7 ábrát.)

MEGOLDÁS

A Steiner tételt alkalmazzuk a pillanatnyi forgástengelyre, vagyis a gömb és a felület  $P$  érintkezési pontjára vonatkozó tehetetlenségi nyomaték kiszámítására. Ezután Newton  $\sum \mathbf{M}_{(TKP \text{ körül})} = I \alpha_{TKP}$  törvényét használjuk fel a gyorsulás kiszámítására. A  $P$  pontra vett  $I_p$  tehetetlenségi nyomaték:

$$I_p = I_{TKP} + Mh^2 = \frac{2}{5} MR^2 + MR^2 = \frac{7}{5} MR^2$$

Az  $Mg$  erő az egyetlen, ami a  $P$  pontra forgatónyomatékot gyakorol, az erőkar  $R \sin \theta$ . A  $P$  pont körüli forgó mozgásra érvényes második Newton törvénnyel a következőt kapjuk:

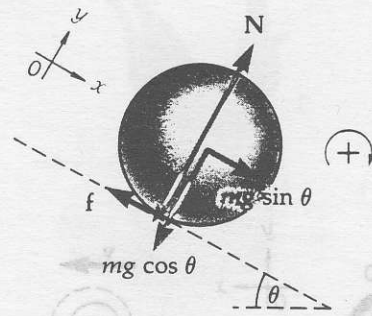
$$\sum_{(P \text{ körül})} \mathbf{M} = I_p \alpha$$

$$Mg(R \sin \theta) = \frac{7}{5} MR^2 \alpha$$

$$\frac{5}{7} g \sin \theta = R \alpha.$$

Mivel  $a_{TKP} = R \alpha$ , ezért  $a_{TKP} = \frac{5}{7} g \sin \theta$ .

Ez ugyanaz az eredmény, amit már előzőleg megkaptunk. A módszer előnye itt abban jelentkezik, hogy  $\alpha$  meghatározására a haladó és a forgó mozgásokra érvényes egyenletek egyidejű megoldása helyett elegendő csupán a forgási egyenlettel dolgozni.



13-7 ábra.

A 13-6 példához. Az a  $P$  pont, amelyre a forgatónyomatékot számítjuk, a gömb és a lejtő érintkezési pontja.

13-7 PÉLDA

A jójó nevű játékszer fonalát rögzítve a jójó függőlegesen legördül. Tömege  $M$ , inerciasugara  $k$ , tengelyének sugara  $r$ . Newton második törvényéből kiindulva határozzuk meg a jójó tömegközéppontjának  $a_{TKP}$  gyorsulását!

MEGOLDÁS

A 13-8 ábrán a mozgó jójóra ható erők vázlata látható. A tömegközéppontra számított forgatónyomatékokat felírva (figyelembe véve, hogy  $a_{TKP} = r \alpha$ ), a következőket kapjuk:

**A tömegközéppont haladó mozgása**

$$\sum F_y = m a_y$$

$$(*) \quad Mg - T = M a_{TKP}$$

$$Mg - M \frac{k^2}{r^2} a_{TKP} = M a_{TKP}$$

$$a_{TKP} = \frac{g}{\left(1 + \frac{k^2}{r^2}\right)}$$

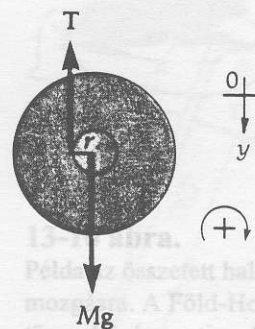
**A tömegközéppont körüli forgó mozgás**

$$\sum \mathbf{M}_{(TKP \text{ körül})} = I \alpha$$

$$Tr = Mk^2 \left( \frac{a_{TKP}}{r} \right)$$

$$T = M \frac{k^2}{r^2} a_{TKP}$$

Helyettesítsük ezt az eredményt a bal oldali (\*) kifejezésbe!

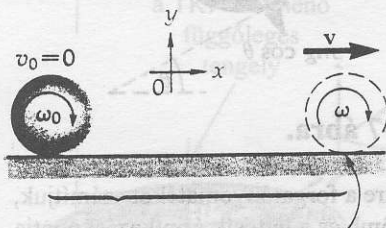


13-8 ábra.

A 13-7 példához.

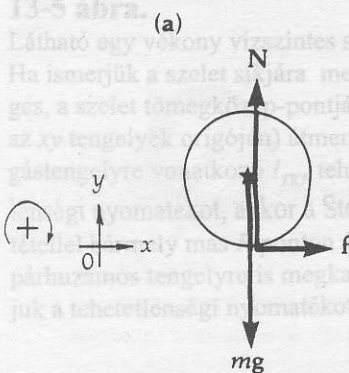
### Csúszva gördülés

A következő példákban olyan jelenségeket tárgyalunk, amelyeknél csúszás lép fel a gördülő test és a pálya felülete között. Emlékezzünk: ha csúszás is fellép, akkor  $x \neq r\theta$ ,  $v \neq r\omega$  és  $a \neq r\alpha$ . Minthogy a tömegközéppont gyorsul, ezért a forgatónyomatékokat feltétlenül a tömegközéppontra vonatkozóan kell számítani (lásd a 13-3 egyenletet).



Csúszva gördülő mozgás  $d$  távolságon ( $s \neq R\theta$  és  $v \neq R\omega$ )

Ettől a ponttól kezdve a korong csúszás nélkül gördül ( $v = R\omega$ )



13-9 ábra. A 13-8 példához.

### 13-8 PÉLDA

$M$  tömegű  $R$  sugarú homogén tömör gömböt tengelye körül vízszintesen megforgatunk, majd vízszintes felületre helyezve elengedünk. (13-9 ábra) Az elengedés pillanatában a gömb tömegközéppontja nyugalomban van. A pörgés következtében a gömb haladni kezd a felületen, tömegközéppontjának haladási sebessége növekszik, miközben (tömegközéppont körüli) szögsebessége fokozatosan csökken. Attól kezdve, hogy  $v_{TKP} = R\omega$ , a gömb állandó sebességgel, csúszás nélkül gördül. A gömb és a felület között a csúszási súrlódási együttható  $\mu_k$ . Tekintsük azt az állapotot, amikor a gömb csúszva gördül, miközben tömegközéppontja is gyorsul! Határozzuk meg (a) a tömegközéppont  $a_{TKP}$  gyorsulását és (b) a gömb tömegközéppont körüli  $\alpha$  szöggyorsulását.

### MEGOLDÁS

(a) A 13-9b ábra a gömb vektorábráját mutatja. (Meg kell értenünk, miért mutat a felület által a gömbre ható súrlódási erő jobbra.) A jobbra mutató irányt ill. óramutató járásával megegyező irányt választjuk pozitívnak. Minthogy csúszás lép fel, a csúszó súrlódási erő  $f = \mu_k N$ . Ez az erő a tömegközéppont gyorsulását okozó vízszintes eredő erő, továbbá ez hozza létre azt a tömegközéppontra ható (negatív) forgatónyomatékot, ami a szögsebességet lassítja. A haladó és a forgó mozgás között most is van kapcsolat, de a csúszás miatt  $s \neq R\theta$ ,  $v \neq R\omega$  és  $a \neq R\alpha$ . Mivel függőleges irányú gyorsulás nincs, azért a függőleges erők összege zérus:

$$\sum F_y = 0$$

$$(N - Mg) = 0$$

$$N = Mg$$

A vízszintes irányú erőkre  $\sum F_x = ma_x$

Minthogy az egyetlen vízszintes erő  $f = \mu_k N$ , behelyettesítés után

$$\mu_k N = Ma_{TKP}$$

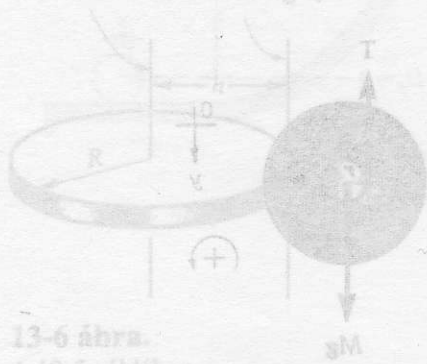
adódik; figyelembe véve a fenti  $N = Mg$  összefüggést:

$$\mu_k Mg = Ma_{TKP}$$

innen

$$a_{TKP} = \mu_k g.$$

(b) Mivel a pozitív forgásirányt az óramutató járásával megegyezőnek választottuk, a súrlódási erő forgatónyomatéka a tömegközéppontra vonatkozóan negatív, így az  $\alpha$  szöggyorsulás is negatív. Minthogy a tömegközéppont gyorsul, a forgatónyomatékokat a tömegközéppontra vonatkozóan kell felvennünk. A forgó mozgás alaptörvényéből azt kapjuk, hogy



13-6 ábra. A 13-5 példához.

13-8 ábra. A 13-7 példához.



$$\sum_{(TKP-ra)} M = I\alpha \quad (I \text{ is a TKP-ra})$$

$$-(fR) = \left[\left(\frac{2}{5}\right)(MR^2)\alpha\right]$$

$$\alpha = -\frac{\mu_k Mg}{(2/5)MR} = -\frac{5\mu_k g}{2R}$$

13-9 PÉLDA

Egy gépkocsit vezetője gyorsan akarja megállítani és úgy lép a fékre, hogy az egyik kerék a megállásig részben csúszik, részben forog. Ha az  $R$  sugarú kerék az úton  $D$  távolságnyira csúszva  $\theta$  szöggel fordul el ( $D > R\theta$ ), mennyi hőt termel az  $f_k$  csúszó súrlódási erő?

MEGOLDÁS

Mivel a kerék forgás közben csúszik is, két különböző hatás lép fel egyidejűleg. A mozgás forgási összetevője miatt a súrlódási erő csak áthelyeződik egyik érintkezési pontról a másikra anélkül, hogy az erő munkát végezne, vagy hőt termelne. (Ez hasonlít a csúszásmentes gördüléshez.) A mozgás csúszási összetevője azonban hőt fejleszt. Ennek mennyisége az úttest és a kerékfelület közötti csúszási távolságtól függ. Ez a csúszási távolság a teljes  $D$  haladási távolság és a forgásból származó  $R\theta$  távolság különbsége. Ezért a fejlődő hő

$$E_{h\ddot{o}} = f_k(D - R\theta).$$

13.5 Térbeli általános mozgás

Minden, külső erők hatása alatt álló test a Newton második törvénye által megszabott módon viselkedik:

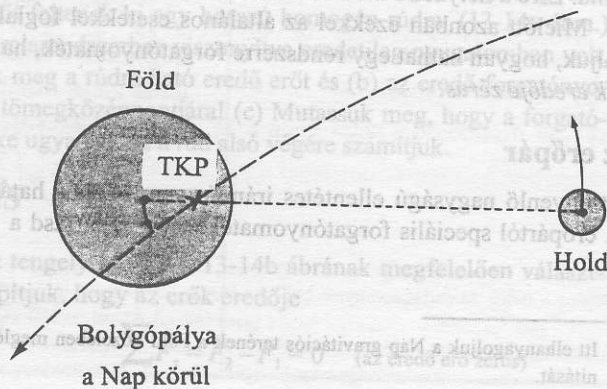
A tömegközéppont haladó mozgása

$$\sum F_{\text{külső}} = Ma_{TKP}$$

A tömegközéppont körüli forgó mozgás

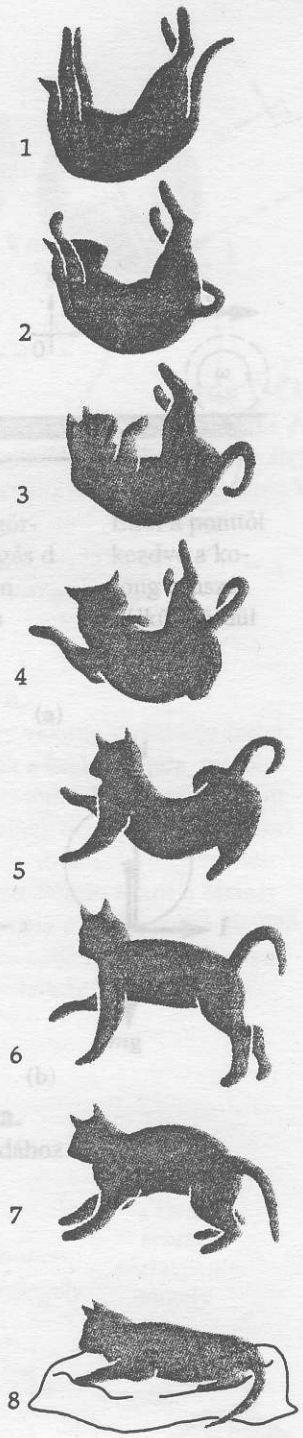
$$\sum M_{\text{külső}} = I_{TKP}\alpha.$$

Erre az általános mozgástípusra a Föld-Hold rendszer (13-10 ábra) szolgáltat példát. A Nap által a rendszerre kifejtett teljes gravitációs erőt úgy tekinthet-



13-10 ábra.

Példa az összetett haladó és forgó mozgásra. A Föld-Hold rendszer tömegközéppontja a földfelszín alatt van kb. 1700 km mélyen. A Föld-Hold rendszernek e tömegközéppont körüli forgása során maga a tömegközéppont Nap körüli pályán mozog.



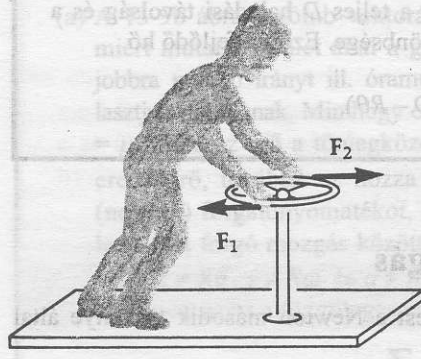
(b) A fordulást általában a test elülső része kezdi, így a macska, ha az esési magasság kicsi, legalábbis a mellső lábaira esik. A mellső lábak a has alá húzódnak, csökkentve a tehetetlenségi nyomatékot a fordulás alatt. A hátsó lábak mindaddig nyújtva maradnak, ameddig a mellső rész félig-meddig elfordul, ezután az elülső lábak nyúlnak ki és a hátsók húzódnak be, és a test hátsó része fordul. A teljes folyamat alatt a farok gyorsan körbecsapódik a teljes impulzusmomentum megtartása érdekében. A vázlatok 1/20 s időközökkel felvett fényképek alapján készültek. (Kérjük, ne ismételje meg senki ezt a kísérletet; a macskák lába gyakran eltörik, vagy még nagyobb baj is történhet a talajt elérve.)



(a) Az alapmanőver belülről kifelé fordítja az U alakú testhelyzetet, a macska a hátát az U alak külső oldaláról a belső oldal felé fordítja. A mellső és a hátsó testrészek függőleges tengely körül *ellentétes* irányba fordulnak, *megtartva az impulzusmomentumot*

**13-11 ábra.**

A szabadon eső macskára nem hat külső forgatónyomaték, hogyan lehetséges tehát, hogy mégis el tudja játszani a „mindig talpraesés” legendás tettét, még ha háttal lefelé ejtik is le? A macska bonyolult mozgása megfelel az impulzusmomentum megmaradása törvényének.



**13-12 ábra.**

A régi típusú villamos kocsin a fékező ember a fékkerék szemközti oldalaira két egyenlő nagyságú ellentétes irányú erőt gyakorolt. Ezt a két erőt *erőpárnak* nevezzük.

jük, mintha a rendszer tömegközéppontjára koncentrálnánk.<sup>3</sup> Ez a rendszerre ható külső eredő erő okozza azt, hogy a tömegközéppont a Nap körül körpályán mozog, míg a Föld és Hold között működő „belső” gravitációs erő a két test közös tömegközéppont körüli forgását okozza. Más példa lehet az űrben gyorsan forgó űrhajó, miközben irányító rakétái különböző tolóerőt fejtenek ki és forgatónyomatékot is gyakorolnak a tömegközéppont körül. Külső forgatónyomaték híján a rendszer impulzusmomentumának állandónak kell maradnia. Erre a helyzetre a 13-11 ábrán láthatunk érdekes példát.

Mielőtt azonban ezekkel az általános esetekkel foglalkoznánk, megtárgyaljuk, hogyan hathat egy rendszerre forgatónyomaték, ha a rendszerre ható erők eredője zérus.

**Az erőpár**

Két egyenlő nagyságú ellentétes irányú, nem azonos hatásvonalú erőtől, az ún. erőpártól speciális forgatónyomaték származik, lásd a 13-12 ábrát. Noha

<sup>3</sup> Itt elhanyagoljuk a Nap gravitációs terének a Föld közelében meglévő csekély inhomogenitását.

ebben az esetben a testre ható erők eredője zérus, az erőpár forgatónyomatékot fejt ki. Továbbá az erőpár forgatónyomatékának értéke független annak a pontnak megválasztásától amelyre a forgatónyomatékot számítjuk. Ezt a következő példán mutatjuk be.

13-10 PÉLDA

A 13-13 ábrán látható merev testre az  $x$  tengellyel párhuzamos két egyenlő nagyságú, de ellentétes irányú erő hat. Számítsuk ki (a) a tárgyra ható eredő erőt, (b) az eredő forgatónyomatékot arra a pontra, amelyben az  $F_1$  erő támad, és (c) az eredő forgatónyomatékot az  $O$  origóra.

MEGOLDÁS

(a) Az erők összege:

$$\sum F_x = -F_1 + F_2 = 0.$$

Az eredő erő zérus, az erőpár nem hoz létre haladó mozgást.

(b) Az  $F_1$  erő támadáspontjára az  $F_1$  erő nem fejt ki forgatónyomatékot, mert erőkarja zérus. Az óramutató járásával ellentétes forgási irányt választva pozitívnak azt kapjuk, hogy

$$\sum M \quad = (\text{erő}) \cdot (\text{erőkar})$$

( $F_1$  támadáspontjára)

$$\sum M = (F_2)(d) = F_2 d \quad (\text{az óramutató járásával ellentétesen})$$

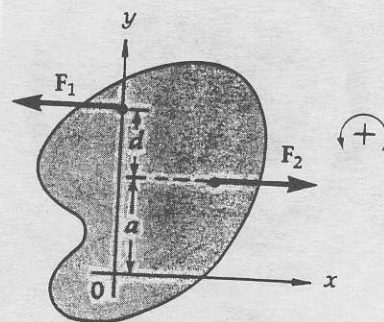
(c) Az origóra a következőképpen számítjuk ki az eredő forgatónyomatékot:

$$\sum M = (\text{erő}) \cdot (\text{erőkar})$$

(az  $O$  pontra)

$$\sum M = (F_1)(a + d) - (F_2)(a) = F_1 d \quad (\text{az óramutató járásával ellentétesen})$$

Míthogy  $F_1 = F_2$ , így ez a forgatónyomaték ugyanaz, mint amit a (b) pontban számítottunk ki. Az  $a$  távolság nem jelenik meg az eredményben, alátámasztva azt, hogy ha  $\sum F = 0$ , akkor a forgatónyomaték bármely pontra számítva  $Fd$ .

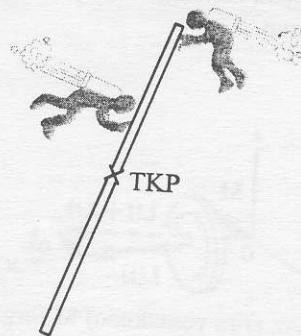


13-13 ábra.

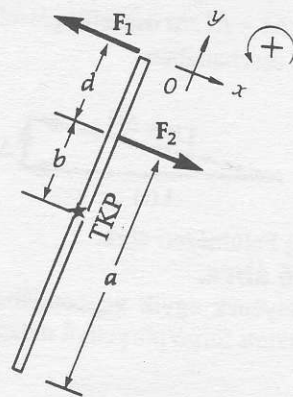
A 13-10 példához.

13-15 ábra.

Ez a párhuzamos erők karjának képe. Az erők egyenesen vannak elrendezve. Alkalmazható bármilyen helyzetbe fordítható anélkül, hogy az elfordítás révén a forgó párhuzamos forgatónyomaték hártsa.



(a) Az asztronauták a rúdra merőleges erőt fejtenek ki.



(b) A rúdra ható erők vektorábrája.

13-14 ábra.

A 13-11 példához.

13-11 PÉLDA

Két asztronauta űrállomás felépítésén dolgozik az űrben, gyakorlatilag a súlytalanság állapotában. Az asztronauták két ellentétes irányú, egyenlő nagyságú  $F$  erőt fejtenek ki egy hosszú homogén rúdra. (13-14a ábra.) A rúd egy inerciarendszerhez viszonyítva eredetileg nyugalomban volt.

(a) Határozzuk meg a rúdra ható eredő erőt és (b) az eredő forgatónyomatékot a rúd tömegközéppontjára! (c) Mutassuk meg, hogy a forgatónyomaték értéke ugyanaz, ha a rúd alsó végére számítjuk.

MEGOLDÁS

(a) A pozitív  $x$  tengely irányát a 13-14b ábrának megfelelően választva megállapítjuk, hogy az erők eredője

$$\sum F_x = F_2 - F_1 = 0 \quad (\text{az eredő erő zérus})$$



(b) A tömegközéppontra számítva a forgatónyomatékokat és a  $\oplus$  szimbólummal jelölt, az óramutató járásával ellentétes irányt pozitívnak választva (figyelembe véve, hogy  $F_1 = F_2$ ) arra jutunk, hogy

$$\sum M = F_1(b + d) - F_2(b) = Fd \text{ (óramutató járásával ellentétes irányban)}$$

(TKP-ra)

(c) A forgatónyomatékokat a rúd alsó pontjára számítva:

$$\sum M = F_1(a + d) - F_2(a) = Fd \text{ (óramutató járásával ellentétes irányban)}$$

(a rúd alsó végére)

**Megjegyzés:** A két egyenlő nagyságú és ellentétes irányú erő **erőpár**. Minthogy eredő erő nincs (az eredő zérus), ezért a rúd tömegközéppontja az inerciarendszerben nem végez haladó mozgást, nyugalomban marad. De az erőpár által létesített eredő  $Fd$  forgatónyomaték a rudat tömegközéppontja körül az óramutató járásával ellentétes forgási irányban szöggyorsulásra kényszeríti. Ha az erők továbbra is merőlegesen hatnak a forgó rúdra, a szöggyorsulás változatlanul fennáll, tehát a rúd tömegközéppontja egy inerciarendszerhez viszonyítva nyugalomban marad, de a rúd maga a tömegközéppontja körül egyre nagyobb szögsebességgel forog.

13-12 PÉLDA

Vékony,  $l$  hosszúságú rúd gravitáció mentes (súlytalan) környezetben, kezdetben nyugalmi helyzetben van egy inerciarendszerben. A rúd egyik végét hosszára merőleges irányú ütés éri. Mekkora távolságra jut el a rúd tömegközéppontja mialatt a rúd a tömegközéppontja körül egy teljes fordulatot végez? (Érdekes, hogy a válasz független a rúd tömegétől és az ütés erősségétől.)

MEGOLDÁS

A rúd végére mért merőleges ütés a rúd tömegközéppontjának impulzust ad, és a tömegközéppont körül impulzusmomentumot létesít.

**A tömegközéppont haladó mozgása**

$$\sum F = \frac{dP}{dt}$$

$$\int F dt = M\Delta v_{TKP}$$

$$\int F dt = M(v_{TKP} - 0)$$

Az eredményt a jobb oldali egyenletbe helyettesítjük.

**A tömegközéppont körüli forgó mozgás**

$$\sum M = \frac{dL}{dt}$$

$$\frac{l}{2} \int F dt = I_{TKP} \Delta\omega$$

$$\frac{l}{2} (Mv_{TKP}) = \frac{Ml^2}{12} (\omega - 0)$$

Legyen  $\Delta t$  a teljes  $2\pi$  rad elfordulás ideje. Mindkét oldalt  $\Delta t$ -vel szorozva azt kapjuk, hogy

$$v_{TKP} \Delta t = \left(\frac{2}{l}\right) \left(\frac{l^2}{12}\right) \omega \Delta t$$

$$x \quad \theta = 2\pi \text{ rad}$$

$$x = \frac{l\pi}{3}$$

### 13.6 A pörgettyű

Figyeljük meg a bűgőcsigát, amint megdőlt tengelye körül lebilincselően szépen mozog. A bűgőcsiga tengelye a függőleges körül lassan körbejár, és kúppalástot ír le, úgy tűnik, mintha „dacolna a gravitációval”. A bűgőcsigának ezt a mozgását precesszióknak nevezzük. Adott dőlési szög mellett minél gyorsabban pörög, annál lassabb a precesszió. Természetesen ez nem sérti a gravitációs törvényt, a bűgőcsiga csupán az  $M = dL/dt$  képlet előírásának engedelmeskedik. A pörgettyű mozgása bizonyos esetekben sokkal összetettebb is lehet, és szokatlan vonásainak magyarázatára terjedelmes könyveket szenteltek. A jelenségnek számos műszaki alkalmazása is van.

A mozgás vizsgálatára egy egyszerű pörgettyűt – egy tengelyre szerelt tárcsát választunk. Emlékeztetünk arra, hogy az egyenes mentén  $p = mv$  impulzussal mozgó  $m$  tömegű test megtartja állandó  $p$  impulzusát, ha külső erők nem hatnak rá. Hasonlóképpen a forgó pörgettyű  $L = I\omega$  impulzusmomentuma is állandó, ha külső forgatónyomatékok nem hatnak rá. Az ilyen ún. erőmentes pörgettyű (13-15 ábra) megtartja forgástengelyének irányát egy inerciarendszerben (pl. az állócsillagok rendszerében). E tulajdonságot használítja a pörgettyűs iránytű. A kettős kardán felfüggesztés megakadályozza, hogy a forgó pörgettyűre forgatónyomaték hasson, így impulzusmomentuma megtartja beállított (mondjuk az Északi Sarkcsillag felé mutató) irányát még akkor is, ha egy hajón vagy repülőgépen a Földön körbehordozzák.\*

A pörgettyű mozgásának legmeglepőbb jelenségét ábrázolja a 13-16a ábra. Ha egy vízszintes tengelyű forgó pörgettyű csak a tengely egyik végpontjában van alátámasztva (ezt az O pontot tekinthetjük rögzítettnek), akkor azt várnánk, hogy a tengely lefelé dől annak az (O pontra vonatkoztatott)  $M = r \times mg$  forgatónyomatéknak megfelelően, amelyet a gravitáció gyakorol a tömegközéppontra. Ehelyett a tengely – meglepő módon – vízszintes síkban forog körbe, azaz precessziót végez.

A pörgettyű precessziója olyan forgó mozgásra szolgál példaként, amelyben a forgástengely nem marad párhuzamos, hanem irányát változtatja. A mozgás vizsgálatára azzal az egyszerűsítő feltevéssel élünk, hogy az egyetlen impulzusmomentumot maga a pörgettyű forgása okozza. (Elhanyagoljuk azt a kicsi impulzusmomentumot, ami a tömegközéppontot vízszintes körön mozgató precesszióból adódik. Azonban, amint majd látni fogjuk, minél gyorsabban forog a pörgettyű, annál lassúbb a precesszió, így a fenti feltevés gyorsan forgó pörgettyűkre helytálló.)

Tekintsük az O rögzített alátámasztási pontra ható  $M = dL/dt$  forgatónyomatékokat (13-16 ábra). Ahhoz, hogy a pörgettyű  $L(t)$  impulzusmomentumát a forgatónyomaték vektorának irányában  $\Delta L$  értékkel megváltoztassa, a pörgettyű tengelye vízszintes síkban fog körbe forogni, azaz egy

$$\omega_p = \frac{\Delta\phi}{\Delta t}$$

szögsebességű precessziót fog végezni. Ezt a szögsebességet a 13-16d ábra alapján a  $\Delta L = L\Delta\phi$  összefüggésből számítjuk ki. Elosztva  $\Delta t$  értékkel

$$\frac{\Delta L}{\Delta t} = L \frac{\Delta\phi}{\Delta t}$$

adódik. Mivel  $|M| = \Delta L / \Delta t$ , és  $\omega_p = \Delta\phi / \Delta t$ , ezek behelyettesítésével

$$M = L\omega_p \tag{13-6}$$

A 13-16b ábráról leolvasható, hogy  $M = mgr$ , tehát a precesszió  $\omega_p$  szögsebessége<sup>4</sup>

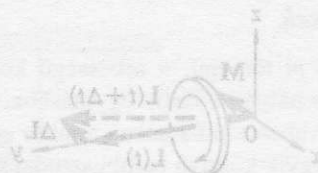
\* A magyarázat kissé túlegyszerűsített ezért félreérthető. A pörgettyűs iránytű a Coriolis erő miatt kezdeti beállításától függetlenül mindig a Föld forgástengelyének (nem a mágneses pólusnak) É-i pólusa felé áll be. (A fordító megj.)

<sup>4</sup> Minthogy  $\omega_p$  fordítottan arányos  $L$ -lel, azért amikor a súrlódás hatására a csiga lassul, és emiatt  $L$  csökken, a precesszió  $\omega_p$  szögsebessége egyre nagyobb lesz.

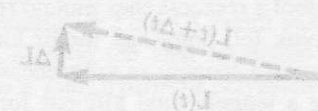


13-15 ábra.

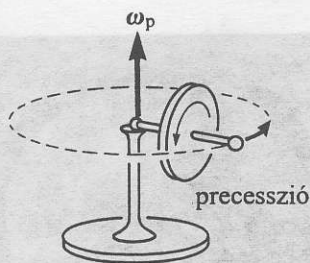
Ez a pörgettyű kettős kardáncsuklóra van szerelve. Állványa bármilyen helyzetbe fordítható anélkül, hogy az elfordítás révén a forgó pörgettyűre forgatónyomaték hatna.



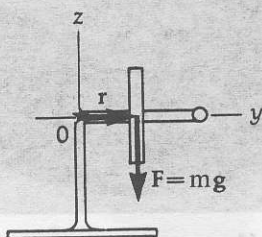
(a) Az O-ra vonatkozó  $M$  forgatónyomaték ugyanolyan irányú mint az impulzusmomentum  $\Delta L$  megváltozásának irányáé  $M = \Delta L / \Delta t$  összefüggéssel összhangban.



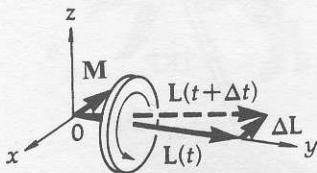
(b) Felírtáson ábra. Tengelyének egyik végpontjában álltámasztott forgó pörgettyű mozgása.



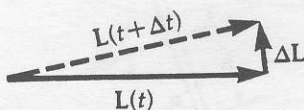
- (a) Vízszintes tengelyének egyik pontjában alátámasztott forgó pörgettyű tengelye  $\omega_p$  szögsebességgel vízszintes síkban precessziót végez.



- (b) A tömegközéppontra ható  $F$  gravitációs erő az  $O$  rögzített tengelypontra  $M = r \times F$  forgatónyomatéket gyakorol. Az  $M$  vektor a rajz  $O$  pontjában a rajz síkjára merőlegesen befelé mutat.



- (c) (Az  $O$ -ra vonatkozó)  $M$  forgatónyomaték ugyanolyan irányú mint az impulzusmomentum  $\Delta L$  megváltozásának iránya az  $M = \Delta L / \Delta t$  összefüggéssel összhangban.



- (d) Felülnézeti ábra.

### 13-16 ábra.

Tengelyének egyik végpontjában alátámasztott forgó pörgettyű mozgása.

$$\omega_p = \frac{mgr}{L} \quad (13-7)$$

Az  $\omega_p$  vektor iránya a függőleges  $z$  tengely irányába mutat. A (13-6) egyenlet vektoriális alakban:

$$\mathbf{M} = \boldsymbol{\omega}_p \times \mathbf{L} \quad (13-8)$$

vagy mivel  $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$ , ezért

$$\mathbf{M} = \boldsymbol{\omega}_p \times I\boldsymbol{\omega} \quad (13-9)$$

Ha emlékezetünkben tartjuk az alábbi (a  $\mathbf{M} = d\mathbf{L}/dt$  összefüggésből levezetett) szabályt, akkor a precesszió irányát könnyen meghatározhatjuk:

A pörgettyű precessziója **Az  $\mathbf{L}$  impulzusmomentum vektor követni igyekszik a  $\mathbf{M}$  forgatónyomaték vektor irányát.**

Ez magyarázza a pörgettyű meglepő viselkedését, midőn tengelyére forgatónyomaték hat. Például a vízszintes tengelyű forgó pörgettyű tengelyvégének fölfelé billentése a tengelyt jobbra, vagy balra lendíti ki a pörgettyű forgási irányától függően.

A Föld kidomborodása az egyenlítő környezetében azt eredményezi, hogy a Nap inhomogén gravitációs tere a Földre forgatónyomatéket gyakorol (vö. 10. fejezet 9. lábjegyzet). Következésképpen a Föld tengelye lassú precessziót végezve olyan kúpot ír le, amelynek alkotója a tengellyel  $23,5^\circ$ -os szöveget zár be és ezalatt az Északi Sarkcsillag felé mutató állásából elmozdul. Egy teljes fordulatot kb. 25800 év alatt tesz meg.<sup>5</sup>

### 13-13 PÉLDA

Kisméretű pörgettyű forgó részének (rotorjának) tömege  $0,220$  kg, tengelyére vett tehetetlenségi nyomatéka  $2,5 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ . (A tartókeret tömege elhanyagolható.) A pörgettyűt forgás közben egyik végén csukló tartja vízszintes tengellyel. A rotor tömegközéppontja  $5$  cm távolságra van a csuklótól. A pörgettyű vízszintes síkban precessziót végez,  $6$  s alatt ír le egy teljes kört. (a) Határozzuk meg a rotor  $\omega$  szögsebességét (fordulat per perc egységben). (b) Tegyük fel, hogy a csuklótól kifelé nézve a tengely mentén azt látjuk, hogy a rotor az óramutató járásával ellentétesen forog. Kérdés: Milyen forgási irányban látjuk a precessziót, ha a pörgettyűt felülről figyeljük?

### MEGOLDÁS

- (a) A fizikai elrendezést a 13-17 ábra illusztrálja. Minthogy  $\mathbf{F}_g = m\mathbf{g}$  és  $\mathbf{r}$  merőleges egymásra, a csuklóra ható  $\mathbf{M}$  forgatónyomatékának nagysága  $rmg \sin 90^\circ = rmg$ . Tudjuk, hogy a pörgettyű vízszintes síkban végzett precessziója miatt az  $\boldsymbol{\omega}_p$  vektornak függőlegesnek kell lennie (de pillanatnyilag még nem tudjuk, hogy

<sup>5</sup> Ez okozza azt, hogy évszázadok múltán az égbolton a zodiákus tizenkét csillagképének helyzete a tavaszi napéjegyenlőséghez képest fokozatosan eltolódik. Az az asztrológiai kifejezés, hogy „belépünk a Vízöntő korszakába” azt jelenti, hogy hozzávetőlegesen a 2000-ik esztendőben a Nap keresztelve az égi egyenlítőt belép a tavaszi napéjegyenlőség idején a Vízöntő csillagképbe, vagyis a „Vízöntő Házába” lép és ebben a szektorban marad az elkövetkező 2000 éven át. Ma a 2000 évvel ezelőtti megnevezett állatövi jegyek közel egy teljes csillagképpel csúsztak el attól a csillagcsoporttól, amelyről eredetileg elnevezték őket, amelyről azt hitték, hogy „befolyásolják” az emberek ügyes-bajos dolgait. Mi több, az egyes „Házak” közötti pontos határokról az asztrológusok mind a mai napig vitatkoznak. Bár az eltérés csekély, mégis esetenként a bolygók egyikét másikat különböző „Házakba” helyezik attól függően, hogy a jó tucatnyi definícióból melyiket fogadják el, és ennek következtében a horoszkópok kissé eltérnek egymástól.

felfelé avagy lefelé kell-e mutatnia). Tehát  $\omega_p$  és  $L$  merőlegesek egymásra, így vektoriális szorzatuk abszolút értéke  $|\omega_p \times L| = \omega_p L \sin 90^\circ = \omega_p L$ . A (13-9) egyenlet alapján:

$$\begin{aligned} |M| &= |\omega_p \times L| \\ rmg &= \omega_p L \\ \omega &= \frac{rmg}{\omega_p I} \end{aligned} \tag{13-10}$$

Behelyettesítés után  $\omega_p$  szögsebességre a következőt kapjuk:

$$\omega_p = \left( \frac{1 \text{ ford.}}{6 \text{ s}} \right) \left( \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ ford.}} \right) = \frac{\pi \text{ rad}}{3 \text{ s}}$$

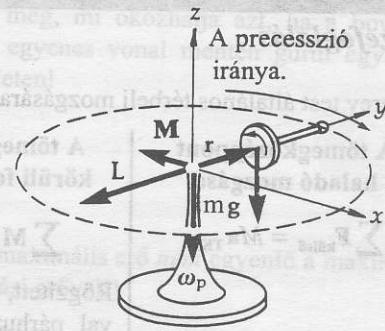
(Átsz. tényező)

A (13-10) egyenletből a rotor szögsebessége (fordulat per percen kifejezve):

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{(0,050 \text{ m})(0,220 \text{ kg}) \left( 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right)}{\left( \frac{\pi \text{ rad}}{3 \text{ s}} \right) (2,5 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2)} \\ &= \frac{1294 \text{ rad}}{\pi \text{ s}} \left( \frac{60 \text{ s}}{1 \text{ perc}} \right) \left( \frac{1 \text{ ford.}}{2\pi \text{ rad}} \right) = 3932 \text{ ford. / perc.} \end{aligned}$$

(Átszámítási tényező)

(b) A 13-17 ábra alapján megállapíthatjuk, hogy az  $M = \omega_p \times L$  összefüggésnek felülről nézve az óramutató járásával egyező irányú precesszió felel meg (vagyis az  $\omega_p$  vektor lefelé mutat).



13-17 ábra.  
A 13-13 példához.

Egyszerűbb tájékozódás céljából a 13-1 táblázatban összefoglaltuk a forgó mozgásra vonatkozó alapvető egyenleteket a használhatóságuk korlátaira utaló megjegyzésekkel.

**13-1 TÁBLÁZAT A forgó mozgás egyenleteinek összefoglalása**

Egyenlet	Megjegyzések
$M = r \times F$	A forgatónyomaték definíciója (egy $O$ pontra vonatkoztatva).
$L = r \times p$	A részecske impulzusmomentumának definíciója (egy $O$ pontra vonatkoztatva).
$I = \sum m_i r_i^2$ (vagy $= \int r^2 dm$ )	Egy $O$ pontra vonatkozó tehetetlenségi nyomaték definíciója.
<b>Általános eset</b>	
$\sum M_{\text{külső}} = \frac{dL}{dt}$	Az impulzusmomentum tétel
$\sum F_{\text{külső}} = \frac{dP_{\text{TKP}}}{dt}$	Newton második törvénye a tömegközéppont haladó mozgására.
<b>Speciális esetek</b>	
$\sum M_{\text{külső}} = I\alpha$	Szimmetriatengely körül forgó szimmetrikus testre ( $I = \text{állandó}$ ). Mindig igaz, ha $I$ a z tengelyre vonatkozik
$L = I\omega$	
$L_z = I\omega_z$	

Kérdések

1. Két m tömegű, v sebességű korong...  
 2. Tekintsünk egy egyenes...  
 3. Tegyük fel hogy egy motor...  
 4. Két homogen tömör...  
 5. Homogen tömör...  
 6. Két...  
 7. Két...  
 8. Két...  
 9. Két...  
 10. Két...

## Összefoglalás

A merev test általános térbeli mozgására

### A tömegközéppont haladó mozgása

$$\sum \mathbf{F}_{\text{külső}} = M \mathbf{a}_{\text{TKP}}$$

### A tömegközéppont körüli forgó mozgás

$$\sum \mathbf{M}_{\text{külső}} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$$

Rögzített, vagy önmagával párhuzamosan mozgó tengelyre

$$\sum \mathbf{M}_{\text{külső}} = I \alpha$$

A **párhuzamos tengelyek tétele (Steiner tétel)** szerint bármely, a tömegközépponton átmenő tengellyel párhuzamos tengelyre a tehetetlenségi nyomatékot az

$$I = I_{\text{TKP}} + Mh^2 \quad (h \text{ a két párhuzamos tengely közötti távolság})$$

összefüggéssel határozhatjuk meg.

Az összetett forgó és haladó mozgás **kinetikus energiája**:

$$K = K_{\text{rot}} + K_{\text{transz}} = \frac{1}{2} I_{\text{TKP}} \omega^2 + \frac{1}{2} M v_{\text{TKP}}^2$$

Zárt (a környezetétől elszigetelt) rendszerre érvényes (a  $\star$  tengelyre vonatkozó) **impulzusmomentum megmaradása**:

Speciális esetek:

**Szimmetrikus test szimmetriatengely körüli forgása**

$$\mathbf{L} = I \boldsymbol{\omega}$$

Zárt, konzervatív rendszerre érvényes a mechanikai energia megmaradása:

$$E_0 = E$$

**A pörgettyű.** Külső forgatónyomatékok hiányában a forgó pörgettyű tengelye megtartja térbeli irányát ( $\mathbf{L} = \text{állandó}$ ).

Ha a forgó pörgettyű tengelyének az iránya egy  $\mathbf{M}$  forgónyomaték hatására megnövekszik, akkor a tengely iránya olyan  $\boldsymbol{\omega}_p$  szögsebességgel változik, ami az

$$\mathbf{M} = \boldsymbol{\omega}_p \times \mathbf{L}$$

összefüggésnek felel meg (ezt **precessiónak** nevezzük).

A precesszió iránya a következőképpen is meghatározható: Az  $\mathbf{L}$  impulzusmomentum-vektor követni igyekszik az  $\mathbf{M}$  forgatónyomaték-vektor irányát.

## Kérdések

- Két  $m$  tömegű,  $v$  sebességű korcsolyázó párhuzamos pályán közelít egymáshoz. A pályák távolsága  $d$ . Abban a pillanatban amikor egymás mellé érnek, az egyik könnyű bambuszrudat nyújt át a másiknak, amit az utóbbi erősen megragad. Írjuk le ezt követően a rúdka kapaszkodó két korcsolyázó mozgását. Milyen mozgás jönne létre, ha a korcsolyázók tömege különböző lenne?
- Tekintsünk egy egyenes mentén állandó sebességgel mozgó részecskét! Egyenlő idők alatt egyenlő területeket sűrol-e az egyenesen kívül lévő rögzített pontból a részecskéhez mutató rádiuszvektor?
- Tegyük fel, hogy egy motor kimenő teljesítménye arányos a tengely  $\omega$  szögsebességével. Határozzuk meg a tengely által kifejtett forgatónyomaték és a szögsebesség közötti összefüggést!
- Két homogén, tömör tárcsa „versenyt gurul” lefelé egy lejtőn. Tömegeik egyenlőek, de egyikük sugara kétszer akkora mint a másiké. Melyikük „győz”? Melyikük győzne, ha sugaraik egyenlőek, de tömegeik különbözőek lennének?
- Homogén tömör gömb és homogén tömör tárcsa versenyez egymással a lejtőn. Melyikük „győz”, ha tömegük és sugaraik megegyező? Lehetséges-e, hogy valamelyikük győzzön, ha tömegeik egyenlőek, de sugaraik aránya megváltozott? Lehetséges-e, hogy valamelyikük győzzön, ha sugaraik egyenlőek, de tömegeik aránya megváltozott?
- Tekintsük a cirkuszi légtornászt, amint a levegőben repülve bukfeneczik. Képes-e arra, hogy tömegközéppontjának pályáját a szabadesési pályától eltérőre változtassa?
- Egy részecske csak az  $xy$  síkban mozog. Határozzuk meg az origóra vonatkozó impulzusmomentumának lehetséges irányait!
- Egy biliárd játszmaiban egy golyó ferdén (nem merőlegesen) ütközött a mandinernek (a biliárd asztal rugalmas belső peremének), de függőleges tengely körül végzett pörgése következtében a mandinerről merőlegesen pattant vissza. Írjuk le a golyó forgását, a forgás irányát!
- A *bowling* (egyfajta tekejáték) golyója csak akkor gurul szabályszerűen, ha alakja tökéletes és jól ki van egyensúlyozva. Az ujjak és a hüvelykujj számára fúrt lyukak közelébe a szokásos bowling golyókba a hiányzó tömeg pótlására többlet-súlyt építenek be. 1980-ban új típusú golyót vezettek be, amelyen két többletsúly volt, egyik az ujj számára készített lyukak, másik a hüvelykujj számára készített lyuk közelében. A feltaláló szerint ez a meg-



oldás nagy mértékben javítja a gördülés pontosságát. Feltételezve, hogy mindkét változat a golyó tömegközéppontjára vonatkozóan helyesen van kiegyensúlyozva, vajon az újabb verzió valóban ja-

**Feladatok**

**13.3 Gördülés felület mentén**

**13A-1** Egy 2 kg tömegű, 30 cm átmérőjű homogén tömör tárcsa 2 m/s sebességgel csúszás nélkül gördül vízszintes felületen. Határozzuk meg (a) haladási kinetikus energiáját, a tömegközéppontra vonatkozó forgási kinetikus energiáját, (c) és a teljes energiáját!

**13A-2** Az előírással kosárlabda átmérője 25,4 cm és tömege 0,567 kg. Vékony, elhanyagolható falvastagságú gömbhéjnak tekinthetjük. Mennyi idő alatt gurul le a nyugalmi helyzetből induló labda a 30°-os 11 méter hosszú lejtőről? (Javaslat: először számítsuk ki a lejtő aljára érés sebességét az energiamegmaradás törvényéből, majd alkalmazzuk a kinematikai egyenleteket.)

**13A-3** Homogén tömör gömb csúszás nélkül gördül le a vízszintessel 25°-os szöget bezáró lejtőn. Határozzuk meg a nyugalmi helyzetből induló gömb sebességét 6 m út befutása után!

**13A-4** Homogén tömör gömb (tömege  $M$ , sugara  $R$ ) csúszás nélkül gördül le a vízszinteshez  $\omega$  szög alatt hajló lejtőn. Nyugalmi helyzetből indulva  $s$  hosszúságú utat tesz meg. Határozzuk meg kétféleképpen is a tömegközéppont  $v$  sebességét a lejtő alján: (a) az energiamegmaradás törvényével és (b) Newton törvényeinek alkalmazásával!

**13B-5** Homogén gömb gördül érdes felületű lejtőn. A gömb és a felület között a nyugalmi súrlódási együttható  $\mu_s$ . Keressük azt a maximális  $\theta$  szöget, amit a sík felület a vízszintessel bezár és amin a gömb csúszás nélkül legördülhet. Fejezzük ki az eredményt  $\mu_s$  függvényében!

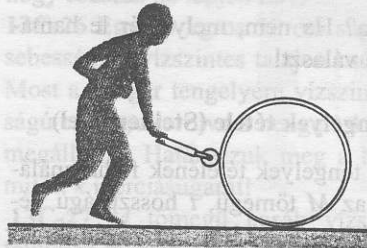
**13B-6** Egy homogén tömör gömb és egy homogén tömör henger nyugalmi helyzetből egyszerre indulva csúszás nélkül gördül le egy lejtőn. Mindkettő tömege  $M$ , sugara  $R$ . Melyik ér hamarabb a lejtő aljára? Indokoljuk a választ!

**13B-7** Homogén tömör henger csúszás nélkül gördül le a vízszinteshez  $\theta$  szög alatt hajló lejtőn. Bizonyítsuk be, hogy a csúszást gátló nyugalmi súrlódási együttható legkisebb értéke  $(\tan \theta_0)/3$  kell, hogy legyen!

**13B-8** Egy fiú az  $M$  tömegű,  $R$  sugarú karikát a kezében lévő bot végére szerelt súrlódásmentes kerék segítségével vízszintesen hajtja az út mentén (13-18 ábra). Ily módon a karikára vízszintes irányú, a karika tömegközéppontja felé mutató erőt fejt ki, anélkül, hogy érintőleges erőt fejtene ki a peremre. (a) Vázzuk a karikára ható erőket! (b) Ha a talaj és a karika között a nyugalmi súrlódási együttható  $\mu$ , mekkora lehet az a (gördülő karikára alkalmazott) maximális  $F$  erő, amely mellett a karika még nem csúszik meg a talajon?

vítja a gördülés karakterisztikus tulajdonságait? Targyaljuk meg, mi okozhatja azt, ha a bowling golyó nem egyenes vonal mentén gurul egy vízszintes felületen!

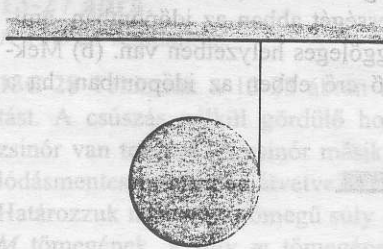
(Megjegyzés: a maximális erő *nem* egyenlő a maximális nyugalmi súrlódási erővel!)



**13-18 ábra.**

A 13B-8 feladathoz.

**13B-9** Homogén tömör  $M$  tömegű  $R$  sugarú henger palástjára szövet szalagot tekertek. A szalag vége a mennyezethez van erősítve, (13-19 ábra). A hengert a szalag segítségével vízszintes helyzetben tartják, majd nyugalmi helyzetből elengedik. (a) Kérdés: miközben a henger lejjebb süllyed, a tömegközéppontja elmozdul-e jobbra vagy balra, vagy pedig egyenesen lefelé halad? Indokoljuk meg a választ! (b) Mutassuk meg, hogy a tömegközéppont gyorsulása  $2g/3$ .



**13-19 ábra.**

A 13B-9 feladathoz.

**13B-10** A jójó zsinórja a 2 mm sugarú belső tengelyre van felcsavarva, ahogyan a 13-20 ábra mutatja. A jójó tömege 200 g és inerciasugara 2 cm. (A zsinór vastagsága elhanyagolható.) (a) Mennyi idő alatt tekeredik le 1 m hosszú zsinór, midőn a jójót nyugalmi helyzetéből elengedik? (b) Mekkora a forgási kinetikus energia és a haladási kinetikus energia aránya a jójó süllyedése közben?

**13B-11** Egy 30 m/s sebességgel haladó gépkocsi kerekeinek átmérője 90 cm. (a) Határozzuk meg a kerekek tengely körüli forgásának szögsebességét! (b) Mind a négy kereket 40 teljes fordulat alatt egyenletes fékezéssel megállítják. Határozzuk meg a kerekek szöggyorsulását!

**13B-12** Két homogén tömör henger (egyik tömege  $M$  és sugara  $R$ , másiké  $2M$  és  $R/2$ ) nyugalmi helyzetből egyszerre indítva csúszásmentesen gördül a lejtőn. Egyszer-



13-20 ábra.

A 13B-10 feladathoz.

re érnek-e a lejtő aljára? Ha nem, melyik ér le hamarabb? Indokoljuk meg a választ!

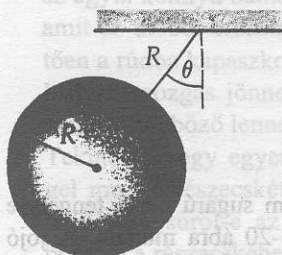
13.4 A párhuzamos tengelyek tétele (Steiner tétel)

13A-13 A párhuzamos tengelyek tételének felhasználásával határozzuk meg az  $M$  tömegű,  $l$  hosszúságú vékony rúd tehetetlenségi nyomatékát a rúd végén átmenő, a rúdra merőleges egyenesre!

13A-14 A párhuzamos tengelyek tételével határozzuk meg a homogén tömör gömb tehetetlenségi nyomatékát a gömbfelületet érintő egyenesre vonatkozóan!

13B-15 Egy  $R$  sugarú kerék a vízszinteshez  $\theta$  szöggel hajló lejtőn csúszásmentesen gördül. A kerék inerciasugara  $k$ . Számítsuk ki a kerék haladási gyorsulását, ha a forgatónyomatékot (a) a kerék tömegközéppontjára, (b) a lejtő és a kerék érintkezési pontjára számítjuk.

13B-16 Az  $R = 20$  cm sugarú vékonyfalú üres gömb  $20$  cm hosszú fonálon függ (13-21 ábra.) A gömböt akkor engedik el nyugalmi helyzetéből, midőn a fonál a függőlegessel  $40^\circ$ -os szöget zár be. (a) Határozzuk meg a tömegközéppont sebességét abban az időpontban, amikor a fonál éppen függőleges helyzetben van. (b) Mekkora a fonalat feszítő erő ebben az időpontban, ha a gömb tömege  $2$  kg?



13-21 ábra.

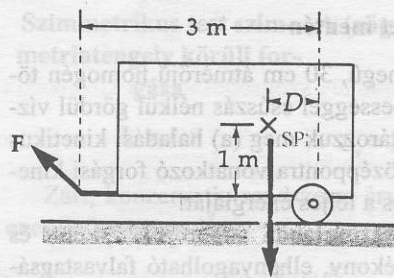
A 13B-16 feladathoz.

13.5 Térbeli általános mozgás

13B-17 Midőn egy motorkerékpáros vízszintes pályán egy kanyarban  $30$  km/h sebességgel halad, tömegközéppontja  $10$  m sugarú körön mozog. Határozzuk meg azt a függőlegessel bezárt szöget, amellyel „bedől”.

13B-18 Megrakott pótkocsi súlypontja (SP) a 13-22 ábrán látható helyen van. A pótkocsi és a rakomány együttes súlya  $1800$  N. A vontató (az ábrán nem látszik)

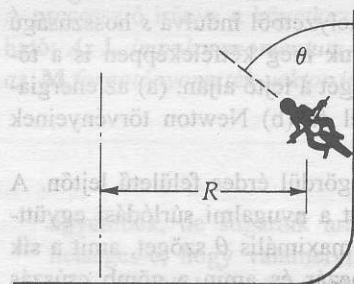
a pótkocsira  $F$  erőt fejt ki. Az erő függőleges komponense a teher egy részét tartja, vízszintes komponense  $1,4$  m/s<sup>2</sup> gyorsulással bal felé gyorsítja a pótkocsit. A súrlódás elhanyagolható. (a) Mekkora az  $F$  erő vízszintes és függőleges komponense, ha  $D = 0,5$  m? (b) Mekkora kellene  $D$ -nek lennie, hogy  $F_y = 0$  legyen?



13-22 ábra.

A 13B-18 feladathoz.

13B-19 Egy vásári mutatványos henger alakú fal belső felületén motorozik (13-23 ábra). Tömegközéppontja egy vízszintes síkban fekvő  $R = 4$  m sugarú körön mozog. A fal és a kerek között a nyugalmi súrlódási együttható  $0,7$ . Határozzuk meg (a) azt a minimális  $v$  sebességet és (b) az ehhez tartozó  $\theta$  szöget, amely lehetővé teszi, hogy a motoros ezt a mozgást fenntartsa!



13-23 ábra.

A 13B-19 feladathoz.

13.6 A pörgettyű

13B-20 Pörgettyű rotorja (forgó része) egy  $12$  cm sugarú homogén tömör tárcsa, amely egy  $23$  cm hosszú tengely közepére van szerelve. A tengelyt egyik végén csukló tartja vízszintesen, miközben a rotor  $1200$  fordulat per perc fordulatszámmal pörög. Határozzuk meg a precesszió  $\omega_p$  szögsebességét (fordulat per perc egységben)!

13B-21 Játékcsga tömege  $500$  g, inerciasugara  $2$  cm és tömegközéppontja a kihegyezett végétől  $5$  cm-re van.  $90$  ford/s fordulatszámú, felülről nézve az óramutató járásával megegyező irányú pörgésbe hozva oly módon helyezük durva talajra, hogy tengelye a függőlegessel  $20^\circ$ -os szöget alkot (13-24 ábra.) (a) Határozzuk meg a tengely precessziójának  $\omega_p$  szögsebességét! (b) Határozzuk meg a precesszió irányát (a mozgást felülről nézve)! Indokoljuk okfejtésünket!

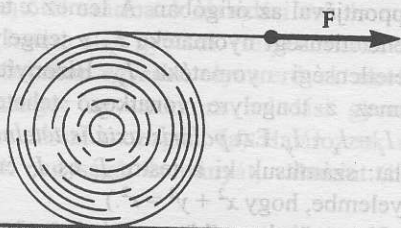


13-24 ábra.

A 13B-21 feladathoz.

**További feladatok**

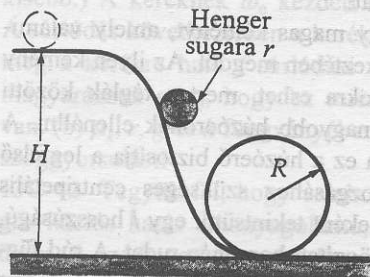
**13C-22** Vékony papírszalagból csévélt  $M$  tömegű tekercset a szalag végénél fogva vízszintes irányú  $F$  erővel húzzunk a 13-25 ábrán vázolt módon. Feltételezzük, hogy a tekercs homogén tömör hengernek tekinthető és, hogy a tekercs nem csúszik meg. (a) Mutassuk meg, hogy a tekercsre ható nyugalmi súrlódási erő jobbra irányul! (b) Határozzuk meg a tekercs tömegközéppontjának gyorsulását és (c) a tekercsre ható nyugalmi súrlódási erőt!



13-25 ábra.

A 13C-22 feladathoz.

**13C-23** Az  $r$  sugarú homogén tömör henger csúszás nélkül zérus kezdő sebességgel legördül a 13-26 ábrán bemutatott hurkot képező pálya  $H$  magasságban lévő pontjáról. A hurok sugara  $R$  ( $R > r$ ). Határozzuk meg azt a legkisebb  $H$  magasságot, ami biztosítja, hogy a henger mindvégig érintkezésben maradjon a pályával.



13-26 ábra.

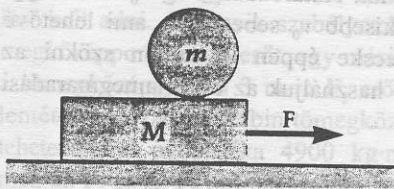
A 13C-23 feladathoz.

**13C-24** Oldjuk meg az előbbi feladatot a hurokpályán legördülő homogén tömör  $r$  sugarú gömbre is!

**13C-25** Az  $R$  sugarú billiárdgolyó súrlódásmentes vízszintes asztalon nyugszik. A golyót az asztal fölött  $h$  magasságban vízszintes erőimpulzus éri. Mekkora legyen  $h$  értéke, hogy a meglökött golyó ne csússzon meg, amikor gördülni kezd? (Útmutatás: az  $F\Delta t$  erőimpulzus a tömegközéppontnak  $m\Delta v$  impulzust ad át: hasonlóképpen a tömegközéppontra vonatkozó forgatónyomaték impulzusa megváltoztatja a tömegközéppontra vonatkozó impulzusmomentumot. Milyen kapcsolatnak kell fennállnia e két jelenség között ahhoz, hogy csúszás ne lépjen fel?)

**13C-26** Egy 90 kg-os 30 cm sugarú gyepohenger 2 m/s sebességgel vízszintes talajon csúszásmentesen gördül. Most a henger tengelyére vízszintes irányú 65 N nagyságú erőt gyakorolva a hengert 4 s alatt (csúszás nélkül) megállítjuk. Határozzuk meg a henger tengelyére számított  $k$  inerciasugarat!

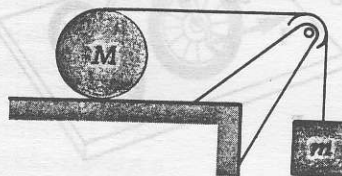
**13C-27**  $M$  tömegű hasáb vízszintes súrlódásmentes felületen fekszik. A hasábon homogén  $m$  tömegű tömör henger nyugszik (13-27 ábra). Most a hasábra vízszintes  $F$  erőt gyakorolunk. Ennek következtében amint a hasáb gyorsul, a henger csúszás nélkül hátrafelé gördül. Vezessünk le a hasáb gyorsulására egy az  $F$ , az  $M$  és a  $m$  mennyiségekkel kifejezett összefüggést.



13-27 ábra.

A 13C-27 feladathoz.

**13C-28** Tekintsük a 13-28 ábrán bemutatott összeállítást. A csúszás nélkül gördülő homogén henger köré zsinór van tekerve. A zsinór másik része súlytalan súrlódásmentes csigán van átvetve és a végén súly függ. (a) Határozzuk meg az  $m$  tömegű súly gyorsulását a henger  $M$  tömegének, a súly  $m$  tömegének és a  $g$  nehézségi gyorsulásnak függvényében. (b) Mutassuk meg, hogy a megoldás független a henger és a vízszintes felület között fellépő súrlódási erő irányának megválasztásától! (c) Állapítsuk meg a súrlódási erő helyes irányát.

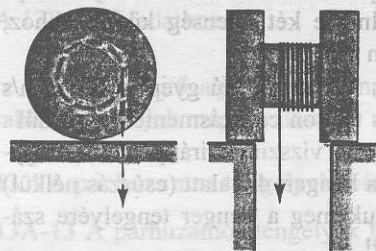


13-28 ábra.

A 13C-28 feladathoz.

**13C-29** A 13-29 ábrán látható orsó két egyforma, egyenként  $M$  tömegű  $R$  sugarú tárcsából és egy  $M$  tömegű  $R/2$  sugarú belső tömör hengerből áll. A belső hengerre csavart fonál lelógó végét állandó  $T$  feszítő-

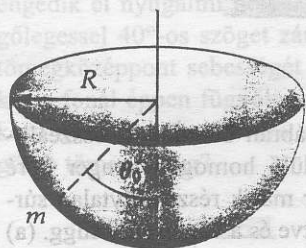
erővel húzzuk. Ennek következtében az orsó vízszintes irányban gyorsul miközben az asztalon csúszás nélkül gördül. (Az asztalra vágott rés lehetővé teszi, hogy az orsó mozgása közben a fonál függőleges maradjon.) Határozzuk meg  $M$  és  $T$  függvényében (a) az orsó tömegközéppontjának  $a$  gyorsulását és (b) az orsóra ható vízszintes erőt!



13-29 ábra.

A 13C-29 feladathoz.

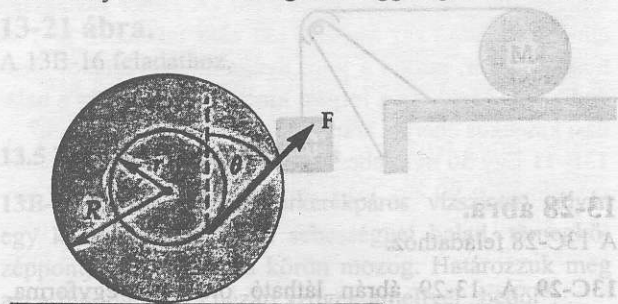
13C-30 A 13-30 ábra mutatja, hogy az  $m$  tömegű részecske súrlódásmentesen mozoghat egy  $R$  sugarú, félgömb alakú, rögzített edény belsejében. A  $\theta_0$  szöggel megadott helyzetű részecskének vízszintes irányú  $v_0$  kezdősebességet adunk. Határozzuk meg  $\theta_0$  és  $R$  függvényében azt a legkisebb  $v_0$  sebességet, ami lehetővé teszi, hogy a részecske éppen ki tudjon szökni az edényből! (Javaslat: használjuk az energiamegmaradási törvényt.)



13-30 ábra.

A 13C-30 feladathoz.

13C-31 Egy orsó belső hengerére szövetszalagot csévélték. (Az orsó belső, ill. külső sugara  $r$ , ill.  $R$ .) Az orsót a 13-31 ábrán bemutatott módon vízszintes felületre helyezik és a szalagot a függőlegessel alkotott  $\theta$

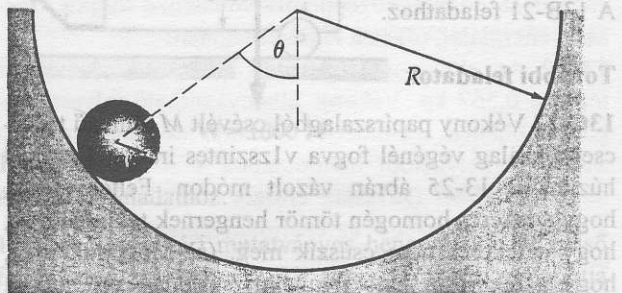


13-31 ábra.

A 13C-31 feladathoz.

szög irányában úgy húzzák, hogy az orsó állandó szögsebességgel forogjon, de haladó mozgást ne végezzen. Az orsó és a felület között némi súrlódás lép fel. (a) Készítsünk vázlatot a fellépő erőkről és (b) határozzuk meg a  $\theta$  szöget!

13C-32 Homogén tömör  $r$  sugarú golyót  $R$  sugarú félgömb alakú edény belsejébe teszünk. A golyót a függőlegessel  $\theta$  szöget bezáró helyzetéből (13-32 ábra) elengedjük. Ha a golyó csúszás nélkül gördül, határozzuk meg tömegközéppontjának sebességét az edény legmélyebb pontjában.



13-32 ábra.

A 13C-32 feladathoz.

13C-33 Tekintsünk egy vékony lemezt az  $xy$  síkban, tömegközéppontjával az origóban. A lemez  $x$  tengelyre számított tehetetlenségi nyomatéka  $I_x$ ,  $y$  tengelyre számított tehetetlenségi nyomatéka  $I_y$ . Bizonyítsuk be, hogy a lemez  $z$  tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka  $I_z = I_x + I_y$ . Ezt *poláris-axiális tételnek* nevezik. (Javaslat: számítsuk ki a testre  $I_x$  és  $I_y$  értékét és vegyük figyelembe, hogy  $x^2 + y^2 = r^2$ .)

13C-34 (a) Vezessük le az  $l$  hosszúságú  $m$  tömegű homogén vékony rúd  $I$  tehetetlenségi nyomatékát a tömegközépponton átmenő, rúdra merőleges tengelyre. (b) Terjesszük ki eredményünket a homogén, négyzet alakú, vékony lemez tömegközéppontján átmenő, egyik élével párhuzamos tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékának kiszámítására! (c) Felhasználva a *poláris-axiális tételt* (lásd az előző feladatot) vezessük le a négyzet alakú homogén lemez tömegközéppontján átmenő, a lemezre merőleges tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát!

13C-35 Tekintsünk egy magas kéményt, amely valamilyen külső hatás következtében megdől. Az ilyen kémény a dőlés közben darabokra eshet, mert a téglák közötti habarcs nem tud már nagyobb húzóerőnek ellenállni. A kémény eldőlése során ez a húzóerő biztosítja a legfelső rétegek körpályán mozgásához szükséges centripetális erőt. E feladat modelljeként tekintsünk egy  $l$  hosszúságú, alsó végén csuklóval rögzített homogén rudat. A rúd függőleges nyugalmi helyzetből indulva a gravitáció hatására megdől. A rúd hosszának hányadrésében lesz a rúd tangenciális gyorsulása nagyobb, mint a nehézségi gyorsulás tangenciális komponense?

13C-36 Tegyük fel, hogy egy homogén tömör henger  $\omega_0$  kezdeti szögsebességgel forog, amikor nyugalmi hely-

zetben lévő tömegközépponttal vízszintes felületre helyezik. Határozzuk meg azt a  $d$  távolságot, amit a henger a felületen gördülve és csúszva megtesz, amíg nem kezd el csúszás nélkül gördülni!

**13C-37** Homogén, tömör kugligolyót (tömege  $M$ , sugara  $R$ ) egyenes vonalú mozgással (gördülés nélkül) hajtának rá a tekepálya padlójára  $v_0$  kezdősebességgel. Egy kezdeti  $D$  távolságot részben csúszva tesz meg, közben növekvő forgási sebességre (szögsebességre) tesz szert, és a  $D$  távolság befutása után csúszás nélkül gördül. Az állandó csúszási súrlódási erő  $f$ . (a) Fejezzük ki a megadott adatokkal a golyónak azt a  $v_0$  sebességét, amivel csúszás nélkül gurulni kezd! (b) Határozzuk meg a  $D$  távolságot! (Megjegyzés: amíg a golyó a  $D$  távolságon belül van, addig  $a \neq R\alpha$ .)

**13C-38** A tekejátékos  $v_0=10$  m/s sebességgel hajtja a golyót a pályára anélkül, hogy kezdeti forgást adna neki. A golyó  $d = 15$  méter vízszintes utat csúszik (közben gördül is), mielőtt csúszásmentesen kezd gördülni. Számítsuk ki a golyó és a pálya közötti csúszási súrlódási együtthatót. A megoldáshoz az alapvető elvekből induljunk ki!

**13C-39**  $R$  sugarú  $M$  tömegű homogén henger csúszás nélkül gördül a  $\theta$  hajlásszögű lejtőn. Gördülés közben a henger három erő, mégpedig: a gravitációs erő, valamint a lejtőtől származó súrlódási erő és normális irányú erő hatása alatt gyorsul. Helyettesítsük ezt a három erőt gondolatban *egyetlen* olyan erővel, amelynek hatására a henger ugyanakkora haladási gyorsulással és szöggyorsulással mozog. (a) Határozzuk meg ennek az erőnek nagyságát és irányát, valamint (b) támadáspontját.

**13C-40** Egy 3 kg tömegű, 2 m hosszú, vékony, homogén merev rúd vízszintes sima felületen nyugszik. A rudat most a középpontjától 25 cm távolságban, a rúdra merőlegesen vízszintes 9 N-s nagyságú erőimpulzus éri. (a) Írjuk le a rúdnak az ezt követő mozgását, beleértve a numerikus értékeket is! (b) Mekkora távolságra mozdul el a tömegközéppont a rúd egy teljes fordulata alatt?

**13C-41** Egy  $m$  tömegű,  $k$  inerciasugarú kereket vízszintesen rögzített  $r$  sugarú tengely tart. (A tengely átmérője a kerék tengelyfuratának átmérőjénél valamivel kisebb.) A keréknek  $\omega_0$  kezdeti szögsebességet adunk. A súrlódás következtében a kerék lelassul. (a) Keressük meg a kerékre ható  $f$  súrlódási erő támadáspontját és magyarázzuk meg, hogy ez miért *nem* a furat tetején van. (b)  $\mu_k$ ,  $r$ ,  $g$  és  $k$  függvényében határozzuk meg az  $\alpha$  szöggyorsulást!

**13C-42** Tegyük fel, hogy valahol a világuírben, ahol a gravitációs hatás elhanyagolható, úrrállomást szerelnek össze. A szerkezeti elemek vékony I alakú, 8 m hosszú, 100 kg tömegű gerendák. A magában álló gerenda egyik végén a gerendára merőlegesen 20 N nagyságú erő hat. A gerenda az állócsillagokhoz viszonyított nyugalmi helyzetéből megindul, az erő nagysága és az állócsillagokhoz viszonyított iránya változatlan marad. (a)

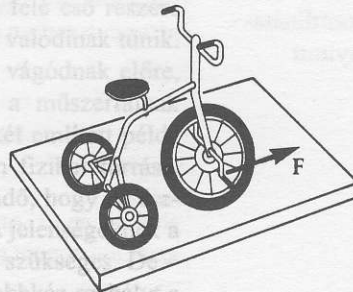
Írjuk le *kvantitatíve* a gerendának a középpontja körül végzett mozgását! (b) Írjuk le *kvalitatíve* a gerendának a középpontja körül végzett mozgását!

**13C-43** Vékony,  $D$  hosszúságú elhanyagolható tömegű rúd két végére egy-egy kisméretű  $m$  tömegű testet erősítettek. Az összeállítás vízszintes súrlódásmentes felületen nyugszik. Egy ugyancsak  $m$  tömegű gitt-golyó  $v_0$  kezdősebességgel csúszik a rúd felé a rúdra merőleges irányban, az egyik testnek ütközik és hozzáragad. (a) Határozzuk meg a rendszer ütközés utáni  $\omega$  szögsebességét! (b) Határozzuk meg a rendszer végső kinetikus energiájának és a gitt-golyó kezdeti kinetikus energiájának arányát! (c) Elfordul-e a rúd ezt követően  $360^\circ$ -kal? Ha nem, akkor mekkora az elfordulás legnagyobb szöge? Magyarázzuk meg a jelenséget.

**13C-44** Tegyük fel, hogy a 13C-42 feladatban az  $F = 20$  N erő állandóan merőleges marad az úrben mozgó gerendára. Ahogyan az előbb, a gerenda most is az állócsillagokhoz viszonyított nyugalmi helyzetből indul. Írjuk le *kvalitatíve* (a) a gerenda tömegközéppontjának mozgását és (b) a gerendának a tömegközéppontja körül végzett mozgását!

**13C-45** Elhanyagolható gravitációjú térben végzett dokkolási manőver során egy 1100 kg-os úrkabinnak  $0,06$  m/s<sup>2</sup> lineáris gyorsulást és  $0,08$  rad/s<sup>2</sup> szöggyorsulást kell adni. Az egyik szabályozó rakéta a kabin tömegközéppontjára  $F_1$  erőt, egy másik szabályozó rakéta a tömegközépponttól 3 m-re  $F_2$  erőt fejt ki  $F_1$ -gyel ellentétes irányban. A kabin tömegközéppontra vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka  $4900$  kg·m<sup>2</sup>. (a) Határozzuk meg az  $F_1$  és az  $F_2$  erő nagyságát, ha a kabint  $F_1$  irányában kell egyenes mentén gyorsítani! (b) Más lenne-e a gyorsulás nagysága, ha az erőket felcserélnék? (c) Más lenne-e a gyorsulás iránya? Indokoljuk meg a választ.

**13C-46** Egy tricikli kormányja úgy van rögzítve, hogy nem lehet elfordítani. Az egyik „alsó” helyzetben lévő pedálra vízszintes  $F$  erőt gyakorolunk (13-33 ábra). Feltéve, hogy a tricikli nem farol meg, vajon előre, vagy hátrafelé fog menni? Adjunk magyarázatot!



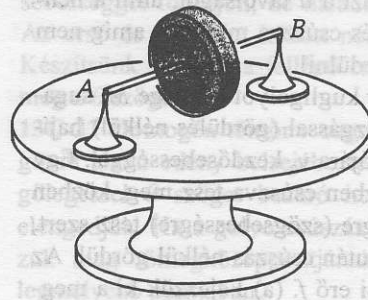
**13-33 ábra.**

A 13C-46 feladathoz.

**13C-47** Kerékpáros lendületből (hajtás nélkül) egyenesen gurul előre. Ha a kerékpár jobbra kezd dőlni,

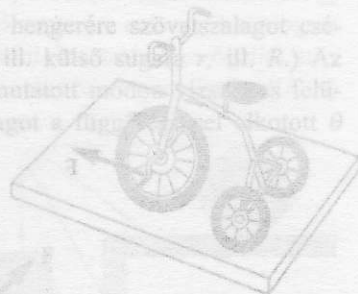
akkor az első kerék pörgettyűhatása jobbra vagy balra fordítja-e a kereket? Indokoljuk meg a válaszunkat! (Megjegyzés: a pörgettyűhatás, jóllehet valóban létezik, nagyon kicsi a bicikli mozgását befolyásoló egyéb hatásokhoz képest.)

**13C-48** Forgó pörgettyű tengelyét két támaszték tartja szimmetrikusan, vízszintes helyzetben a 13-34 ábrán látható módon. A rendszer vízszintes forgóasztalon nyugszik. Ha a forgóasztalt felülről nézve az óramutató járásával megegyező irányban forgatjuk, akkor melyik támaszték, az *A* vagy a *B*, fog nagyobb felfelé mutató erőt gyakorolni a pörgettyűtengely végére? Magyarozzuk meg az érvelésünket.



**13-34 ábra.**  
A 13C-48 feladathoz.

13C-47 Kerékpáros lendületet felvett biciklivel...  
13C-46 Egy tricikli kormányra úgy van szerelve, hogy nem lehet elfordítani. Az egyik „első” kerék...  
13C-45 Egy biciklis kormányra úgy van szerelve, hogy...  
13C-44 Tegyük fel, hogy a 13C-42 feladatban az  $F = 20\text{ N}$ ...  
13C-43 A biciklis kormányra úgy van szerelve, hogy...  
13C-42 Egy biciklis kormányra úgy van szerelve, hogy...  
13C-41 A biciklis kormányra úgy van szerelve, hogy...



**13-33 ábra.**

A 13C-46 feladathoz.

13C-31 A biciklis kormányra úgy van szerelve, hogy...  
13C-30 A biciklis kormányra úgy van szerelve, hogy...  
13C-29 A biciklis kormányra úgy van szerelve, hogy...  
13C-28 A biciklis kormányra úgy van szerelve, hogy...  
13C-27 A biciklis kormányra úgy van szerelve, hogy...  
13C-26 A biciklis kormányra úgy van szerelve, hogy...  
13C-25 A biciklis kormányra úgy van szerelve, hogy...  
13C-24 A biciklis kormányra úgy van szerelve, hogy...  
13C-23 A biciklis kormányra úgy van szerelve, hogy...  
13C-22 A biciklis kormányra úgy van szerelve, hogy...  
13C-21 A biciklis kormányra úgy van szerelve, hogy...  
13C-20 A biciklis kormányra úgy van szerelve, hogy...  
13C-19 A biciklis kormányra úgy van szerelve, hogy...  
13C-18 A biciklis kormányra úgy van szerelve, hogy...  
13C-17 A biciklis kormányra úgy van szerelve, hogy...  
13C-16 A biciklis kormányra úgy van szerelve, hogy...  
13C-15 A biciklis kormányra úgy van szerelve, hogy...  
13C-14 A biciklis kormányra úgy van szerelve, hogy...  
13C-13 A biciklis kormányra úgy van szerelve, hogy...  
13C-12 A biciklis kormányra úgy van szerelve, hogy...  
13C-11 A biciklis kormányra úgy van szerelve, hogy...  
13C-10 A biciklis kormányra úgy van szerelve, hogy...  
13C-9 A biciklis kormányra úgy van szerelve, hogy...  
13C-8 A biciklis kormányra úgy van szerelve, hogy...  
13C-7 A biciklis kormányra úgy van szerelve, hogy...  
13C-6 A biciklis kormányra úgy van szerelve, hogy...  
13C-5 A biciklis kormányra úgy van szerelve, hogy...  
13C-4 A biciklis kormányra úgy van szerelve, hogy...  
13C-3 A biciklis kormányra úgy van szerelve, hogy...  
13C-2 A biciklis kormányra úgy van szerelve, hogy...  
13C-1 A biciklis kormányra úgy van szerelve, hogy...

13C-32 A sugár  $R$  tömegű homogen hengert...  
13C-31 A biciklis kormányra úgy van szerelve, hogy...  
13C-30 A biciklis kormányra úgy van szerelve, hogy...  
13C-29 A biciklis kormányra úgy van szerelve, hogy...  
13C-28 A biciklis kormányra úgy van szerelve, hogy...  
13C-27 A biciklis kormányra úgy van szerelve, hogy...  
13C-26 A biciklis kormányra úgy van szerelve, hogy...  
13C-25 A biciklis kormányra úgy van szerelve, hogy...  
13C-24 A biciklis kormányra úgy van szerelve, hogy...  
13C-23 A biciklis kormányra úgy van szerelve, hogy...  
13C-22 A biciklis kormányra úgy van szerelve, hogy...  
13C-21 A biciklis kormányra úgy van szerelve, hogy...  
13C-20 A biciklis kormányra úgy van szerelve, hogy...  
13C-19 A biciklis kormányra úgy van szerelve, hogy...  
13C-18 A biciklis kormányra úgy van szerelve, hogy...  
13C-17 A biciklis kormányra úgy van szerelve, hogy...  
13C-16 A biciklis kormányra úgy van szerelve, hogy...  
13C-15 A biciklis kormányra úgy van szerelve, hogy...  
13C-14 A biciklis kormányra úgy van szerelve, hogy...  
13C-13 A biciklis kormányra úgy van szerelve, hogy...  
13C-12 A biciklis kormányra úgy van szerelve, hogy...  
13C-11 A biciklis kormányra úgy van szerelve, hogy...  
13C-10 A biciklis kormányra úgy van szerelve, hogy...  
13C-9 A biciklis kormányra úgy van szerelve, hogy...  
13C-8 A biciklis kormányra úgy van szerelve, hogy...  
13C-7 A biciklis kormányra úgy van szerelve, hogy...  
13C-6 A biciklis kormányra úgy van szerelve, hogy...  
13C-5 A biciklis kormányra úgy van szerelve, hogy...  
13C-4 A biciklis kormányra úgy van szerelve, hogy...  
13C-3 A biciklis kormányra úgy van szerelve, hogy...  
13C-2 A biciklis kormányra úgy van szerelve, hogy...  
13C-1 A biciklis kormányra úgy van szerelve, hogy...

- 10A-15 a) 200 N b) 173 N jobbra, 100 N felfelé  
 10A-17 0,94 m  
 10A-19 A válasz adott.  
 10B-21 A válasz adott.  
 10B-23  $\theta = \arctg(f/m_0)$   
 10B-25 a) 1011 N b) 854 N,  $14,2^\circ$  a vízszintes felett  
 10B-27 a) 214 N b) 369 N,  $54,5^\circ$  a vízszintes felett  
 10B-29  $b(1+\sqrt{3})$   
 10B-31 515 N  
 10B-33 a) 1386 N b) 1297 N,  $67,7^\circ$  a vízszinteshez  
 10B-35 A válasz adott.  
 10B-37  $\theta = \arctg \mu_k$   
 10B-39 a)  $N_A = N_B = 60$  N b) 16,4 N  
 10C-41  $15,9^\circ$   
 10C-43 2230 N  
 10C-45 A válasz adott.  
 10C-47 A válasz adott.  
 10C-49 a) 17,6 N b) 42,9 N  
 c) 13,3 N,  $41,0^\circ$  a függőlegestől  
 10C-51 A válasz adott.  
 10C-53 A válasz adott.  
 10C-55  $(0,3a/4)$   
 10C-57 A válasz adott.  
 10C-59  $1,04T$

## XI. Fejezet

- 11A-1 a)  $3,14 \times 10^{-4}$  m/s b)  $1,75 \times 10^{-3}$  rad/s  
 11A-3 kismutató  $\frac{1}{45} \times 10^{-4}$  rad/s; asztronauta  
 $1,05 \times 10^{-3}$  rad/s; nagymutató  $1,75 \times 10^{-3}$  rad/s;  
 köszörűkő 628 rad/s  
 11A-5 a) 17,4 s b) 4,85 rev  
 11B-7 13,5 s  
 11B-9 A válasz adott.  
 11A-11 43,4 rad/s  
 11B-13  $\frac{v}{\pi D} \sqrt{\frac{2h}{g}}$   
 11C-15  $\delta = (R-r)\theta / r$

## XII. Fejezet

- 12A-1 a)  $2m\ell^2$  b)  $m\ell^2$  c)  $2m\ell^2$  d)  $m\ell^2$   
 12B-3 A válasz adott.  
 12B-5 A válasz adott.  
 12A-7 3,16 cm  
 12A-9  $8,50 \times 10^{-32}$  kg·m<sup>2</sup>/s  
 12A-11 a) 0,320 kg·m<sup>2</sup> b) 0,960 kg·m<sup>2</sup>/s c) 4,80 N  
 12B-13 32,9 N·m  $-\hat{z}$  irányban  
 12A-15 0,480 N  
 12B-17 a) 24,0 N·m b)  $3,56 \times 10^{-2}$  rad/s<sup>2</sup>  
 c) 1,07 m/s<sup>2</sup>  
 12B-19 a)  $T_1 = 24,2$  N,  $T_2 = 30,0$  N b) 4,30 m/s

- 12B-21 a)  $\sqrt{g/R}$  b)  $\frac{Mk^2}{4F} \sqrt{\frac{g}{R^3}}$   
 12B-23 a) 6,25 rad/s<sup>2</sup> b) 50 rad  
 12B-25 0,103 rad/s  
 12B-27 0,526 rad/s  
 12A-29  $L^2/2mR^2$   
 12B-31 2,87 rad/s<sup>2</sup>  
 12B-33 a) 67500 kJ b) 24 m  
 12C-35  $\frac{3}{5} Ma^2$   
 12C-37 c)  $2M\ell^2/3$   
 12C-39 376 kg·m<sup>2</sup>  
 12C-41 a)  $m/M$  b)  $\frac{1}{2} [mM / (m+M)] D^2 \omega^2$   
 12C-43 A válasz adott.  
 12C-45 a) 0,506 kg b) 60,4 N  
 12C-47  $1,97 \times 10^{-3}$  N  
 12C-49 A válasz adott.  
 12C-51 a) 6t Newton méterben, ha  $t$  másodpercben adott  
 b)  $0,060t^2$  radiánban ha  $t$  másodpercben adott  
 12C-53 A válasz adott.  
 12C-55  $\sqrt{3gD \sin \theta}$   
 12C-57 2,20 m/s  
 12C-59  $D\omega_0 \sqrt{\frac{3}{2}}$

## XIII. Fejezet

- 13A-1 a) 4,00 J b) 2,00 J c) 6,00 J  
 13A-3 5,96 m/s  
 13B-5  $\theta = \arctg(7\mu/2)$   
 13B-7 A válasz adott.  
 13B-9 A válasz adott.  
 13B-11 a) 66,7 rad/s b) 8,84 rad/s  
 13A-13  $M\ell^2/3$   
 13B-15  $g \sin \theta / (1+k_0^2/R^2)$   
 13B-17  $35,3^\circ$   
 13B-19 a) 7,48 m/s b)  $55,0^\circ$   
 13B-21 a) 0,741 rad/s b) az óramutató járásával azonos irányban  
 13C-23  $[11(R-r)]/4$   
 13C-25  $h = \frac{2}{3} R$   
 13C-27  $a = F / (M + m/3)$   
 13C-29 b)  $\frac{4T}{11}$   
 13C-31  $\arcsin(r/R)$   
 13C-33 A válasz adott.  
 13C-35  $\frac{2}{3} \ell$   
 13C-37 a)  $5v_0/7$  b)  $12mv_0^2/49f$   
 13C-39 a)  $2Mg/3$ , lefelé b)  $R/2$  a TKP-től  
 13C-41 A válasz adott.  
 13C-43 a)  $v_0/3$  b) 0,500  
 13C-45 a)  $F_1 = 197$  N,  $F_2 = 131$  N  
 13C-47 jobbra