

7. gyakorlat feladatsora

Analízis 2 informatikusoknak - 2018/19. II. félév

1. (a) Írja fel a definíció segítségével az

$$f(x) = x^4 - 4x + \sin 3x$$

függvény $x_0 = 0$ pontbeli negyedfokú Taylor-polinomját és a Lagrange-féle hibatagot!

- (b) Legfeljebb mekkora hibát követünk el, ha $f(0.1)$ értékét $T_4(0.1)$ értékével közelítjük?

2. Írja fel az

$$y' = y^3 - 3x^2y^2 + 2$$

differenciálegyenlet $x_0 = -1$, $y_0 = 1$ ponton áthaladó megoldásának $x_0 = -1$ ponthoz tartozó harmadfokú Taylor-polinomját! (Ne próbálja megoldani a differenciálegyenletet!)

3. Adja meg az alábbi függvények $x_0 = 0$ körüli Taylor-sorfejtését, azok konvergenciatartományát, és a $g^{(99)}(0)$, ill. $g^{(100)}(0)$ deriváltakat!

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 5}, \quad g(x) = \frac{x^4}{x^2 - 5}$$

4. (a) Írja fel az

$$f_1(x) = \frac{1}{x + 5}$$

függvény $x_0 = -3$ pontbeli Taylor-sorfejtését! $R_1 = ?$

- (b) f_1 sorfejtésére támaszkodva írja fel az alábbi függvények $x_0 = -3$ pontbeli sorfejtését!

$$f_2(x) = \ln(x + 5), \quad R_2 = ?$$

$$f_3(x) = \frac{1}{(x + 5)^4}, \quad R_3 = ?$$

5. Tudjuk, hogy

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots, \quad R = 1$$

- (a) Írja fel az

$$f(x) = \ln\left(2 + \frac{x^3}{4}\right)$$

függvény $x_0 = 0$ pontbeli Taylor-sorát és adja meg annak konvergenciasugarát!

- (b) Az f függvény sorfejtését felhasználva adja meg az

$$\int_0^1 \ln\left(2 + \frac{x^3}{4}\right) dx$$

integrál értékét az f függvény hatodfokú Taylor-polinomjának felhasználásával és becsülje meg a hibát!

6. Írja fel az alábbi függvények x_0 pontbeli Taylor-sorát és annak konvergenciatartományát!

(a) $f_1(x) = \cos 4x^3$, $x_0 = 0$

(b) $f_2(x) = e^{-2x}$, $x_0 = 0$, ill. $x_0 = 5$

(c) $f_3(x) = \operatorname{ch} 5x^2$, $x_0 = 0$

(d) $f_4(x) = e^{3x} \operatorname{sh} 4x$, $x_0 = 0$

7. Határozza meg a következő számsorok pontos összegét (az e^x , a $\cos x$ és az $\operatorname{sh} x$ függvények Taylor-sorait felhasználva)!

(a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-3)^k}{k!}$

(b) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4^k \cdot k!}$

(c) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k}}{(2k)!}$

(d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2k+1}}{(2k+1)!}$

8. Adja meg a határértéket a szereplő függvények Taylor-sorait felhasználva!

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x^2}{x^4 \cos x} = ?$$

9.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[6]{64 - 2x^2}}, \quad x_0 = 0$$

(a) Írja fel az f függvény x_0 -hoz tartozó Taylor-sorát és adja meg a sor konvergenciasugarát!

(b) $a_8 = ?$ (Elemi műveletekkel adja meg!)

(c) $f^{(8)}(0) = ?$, $f^{(9)}(0) = ?$

10.

$$\int_0^1 \sqrt{16 + x^4} dx = ?$$

Közelítsük az integrált a függvény negyedfokú 0-körüli Taylor-polinomjának integráljával! Adjunk becslést a hibára!