GAUSS TÖRVÉNYE

A ház falán Gauss halhatatlan szavai
azt hirdetik, hogy milyenek a lakói:
„Nem kell számlálnunk bévül a töltéseket,
ha ismerjük a teret.”

ISMERETLEN BÖLCS

25.1 Bevezetés

Az előző fejezetben az elektromos erőteret úgy szemléltettük, mint a térerősségvonalak által alkotott térbeli struktúrát, amely a tér minden egyes pontjában érzékelteti az **E** térerősség nagyságát és irányát. Ahol a vonalak egymáshoz közelebb helyezkednek el, ott a térerősség erősebb; ahol távolabb, ott pedig gyengébb. Az erővonalakat úgy képzeljük el, hogy a pozitív töltésekből indulnak és a negatívokhoz tartanak, így tehát az erővonalak iránya megegyezik a térerősség irányával. A térerősségvonalak voltaképpen fiktívek; a valóságban nem léteznek, viszont kitűnő segédeszközök az elektromos erőtérrel kapcsolatos fogalmaink kialakításakor. Szemben a térerősség-vonalakkal, az elektromos térerősség létezik: a térerősség minden egyes pontjában a térerősségnek meghatározott nagysága és iránya van, amit (legalábbis elvileg) kísérleti úton megmérhetünk egy kis q_0 töltés odahelyezésével.

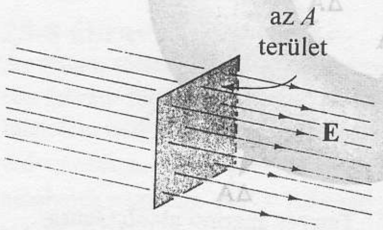
A következőkben az erővonalak értelmezését még kvantitatívabbá tesszük, és eljutunk egy nagyon hasznos törvényhez, a *Gauss törvényhez*, amely újabb módszert kínál az elektromos erőterek meghatározására. Ezt, elsősorban szimmetrikus töltéseloszlások esetében, sokkal könnyebb alkalmazni, mint a 24. fejezetben leírt Coulomb törvényt.

25.2 Az elektromos fluxus

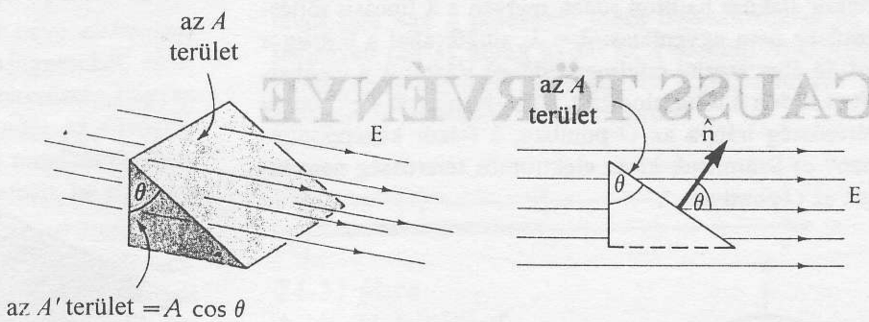
A továbbiakban az erővonalak értelmezését oly módon terjesztjük ki, hogy ne csak szemléletes, hanem kvantitatív is legyen. Definiáljuk az *elektromos fluxus* fogalmát, ami lényegében az *adott felületet metsző erővonalak száma*. Tekintsünk egy **E** térerősségű homogén erőteret, és egy képzeletbeli, a térre merőleges A felületet (25-1 ábra). Ezen felület Φ_E elektromos fluxusát az alábbi formulával definiáljuk:

$$\Phi_E = EA \tag{25-1}$$

Alkalmanként olyan felületek is szerepelni fognak egyenleteinkben, amelyek nem merőlegesek az erővonalakra. Ha a sík felület nem merőleges az erővonalakra, mint az a 25-2 ábrán látható, viszonylag kevesebb erővonal metszi a



25-1 ábra
Az A területű síklap merőleges az **E** térerősségű homogén elektromos erőtérre. Ezen a felületen az elektromos fluxus $\Phi_E = EA$.



25-2 ábra
Olyan A területű felületen áthaladó erővonalak, amelyek $\hat{\mathbf{n}}$ normálvektora a térerősség $\mathbf{E}$ vektorával θ szöget zár be.

a) Ha az A felületű síklap nem merőleges az $\mathbf{E}$ erővonalakra, akkor a vetülete $A' = A \cos\theta$.

b) Vegyük észre, hogy az A és A' közötti szög éppen egyenlő a felület $\hat{\mathbf{n}}$ normálvektora és a térerősség $\mathbf{E}$ vektora által bezárt szöggel.

felületet. Legyen A' az A felületnek az erővonalakra merőleges síkon lévő vetülete. A két felület közötti viszonyt az $A' = A \cos q$ összefüggés írja le. Minthogy mindkét felületet azonos számú erővonal metszi, így a 25-1 egyenletből következően a Φ_E elektromos fluxus,:

$$\Phi_E = EA' = EA\cos\theta \tag{25-2}$$

Látható, hogy a Φ_E elektromos fluxus akkor maximális, ha a felület éppen merőleges az erővonalakra.

Ebben a fejezetben görbült felületekkel is találkozunk, amelyek mentén a térerősségnek mind nagysága, mind pedig iránya változik. Ennélfogva általánosítsuk az elektromos fluxus definícióját oly módon, hogy vezessük be a felületre merőleges $\Delta\mathbf{A}$ felületelem-vektort. Továbbá, foglalkozzunk zárt felületekkel. Az egyértelműség kedvéért a $\Delta\mathbf{A}$ vektor irányát mindig úgy választjuk meg, hogy kifelé mutasson (25-3 ábra). Felhasználva két vektor skaláris szorzatának definícióját, ($\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} \equiv AB\cos\theta$), $\Delta\Phi_E$ az alábbi módon írható:

$$\Delta\Phi_E = E\Delta A\cos\theta = \mathbf{E}\cdot\Delta\mathbf{A} \tag{25-3}$$

Végezetül, ha az egyes ΔA elemi felületek nagysága zérushoz tart (és az elemek száma a végtelenhez), akkor a felület dA differenciálja és az elektromos fluxus $d\Phi_E$ differenciálja között az alábbi összefüggéshez jutunk:

ELEKTROMOS FLUXUS DIFFERENCIÁLJA: $d\Phi_E$

$$d\Phi_E = \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} \tag{25-4}$$

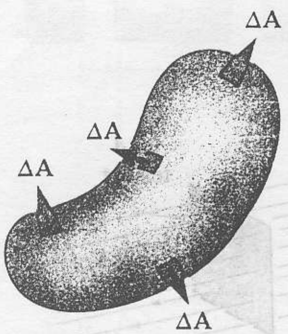
ahol dA a zárt felületből kifelé mutató normálvektorú felület differenciálja. Véges tartományban valamennyi elemi felületre elvégezve az összegzést azt kapjuk[1] , hogy

AZ ELEKTROMOS FLUXUS Φ_E általános definíciója

$$\Phi_E = \int_{\text{Felületre}} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} \tag{25-5}$$

Az elektromos fluxus egysége Nm^2/C.

Szerencsére az integrál értékét sohasem kell olyan bonyolult alakú felületre közvetlenül kiszámítanunk, mint amilyen a 25-3 ábrán látható. Mint



25-3 ábra
Zárt felület, néhány $\Delta\mathbf{A}$ felületvektorral, melyek merőlegesek a felszínre és kifelé mutatnak.

[1] Az integrálást tetszés szerinti felületre elvégezhetjük. Zárt felület esetében az $\oint$ jelölést használjuk. (Vegyük észre a jelölésbeli hasonlóságot azzal az esettel, amikor zárt görbe mentén integrálunk: $\oint dl$.)

azt a következő részben megmutatjuk, az elektromos töltés inverz négyzetes távolságfüggésű terének egy érdekes tulajdonsága miatt az ilyen bonyolult integrálás egyszerű meggondolásokkal helyettesíthető, s így nem veszünk el az integrálás részleteiben. Előbb azonban megmutatjuk, hogyan kell az elektromos fluxust egyszerű esetekben kiszámítani.

25-1 PÉLDA

Tekintsünk egy **E** térerősségű homogén elektromos erőteret, amelynek az erővonalai az x tengely pozitív irányában haladunk. Számítsuk ki az eredő fluxust olyan ℓ élhosszúságú kocka teljes felületére, amelynek élei párhuzamosak a koordinátarendszer tengelyeivel (25-4 ábra).

MEGOLDÁS

Minthogy **E** és d**A** vektorok merőlegesek egymásra a kocka négy lapján, a fluxus ezeken a lapokon zérus. Mindegyiken ugyanis

$$\Phi_E = \int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = \int E\underbrace{\left(\cos 90^0\right)}_{=0} dA = 0$$

A másik két lap esetében először vegyük tekintetbe, hogy az erővonalak a bal oldali lapon lépnek be a kockába, így az **E** és d**A** közötti θ szög azon a lapon 180°. Tehát

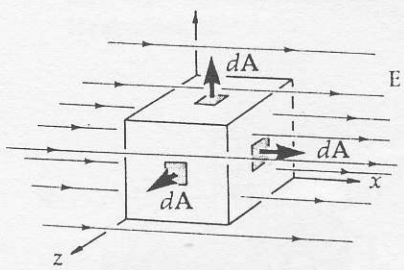
$$\Phi_E = \int_{\substack{\text{bal}\\ \text{oldallap}}} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = \int_{\substack{\text{bal}\\ \text{oldallap}}} E\underbrace{(\cos 180^0)}_{=-1} dA = -E\int_{\substack{\text{bal}\\ \text{oldallap}}} dA = -E\ell^2$$

Az erővonalak a jobb oldali lapon lépnek ki a kockából, ahol $\theta = 0$:

$$\Phi_E = \int_{\substack{\text{jobb}\\ \text{oldallap}}} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = \int_{\substack{\text{jobb}\\ \text{oldallap}}} E\underbrace{(\cos 0^0)}_{=1} dA = E\int_{\substack{\text{jobb}\\ \text{oldallap}}} dA = E\ell^2$$

A teljes fluxus, a kocka összes lapját számítva így

$$\Phi_E = -E\ell^2 + E\ell^2 = 0$$



25-4 ábra
A 25-1 példához: Az ℓ élhosszúságú kockát egyik élével az **E** térerősségű homogén elektromos erőtérrel párhuzamosan helyeztük el.

25-5 ábra
A 25-2 példához.

25-2 PÉLDA

Miként az a 25-5 ábrán látható, egy félhenger alakú felületet **E** térerősségű homogén elektromos erőtérbe helyezünk. Az erővonalak merőlegesek a téglalapra, melynek hossza L, szélessége $2R$. A görbült felületre alkalmazott integrálással számítsuk ki ezen a felületen az elektromos fluxust.

MEGOLDÁS

Ki kell számítanunk az $\int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A}$ integrált a hengeres felületre. Avégett, hogy egyszerűsítsük az integrálást, keressünk olyan $d\mathbf{A}$ elemi felületet, amelynek normálisa mindenütt azonos szöget zár be az **E** térerősséggel. A szimmetriából következően legyen $d\mathbf{A}$ egy L hosszúságú és $ds = Rd\theta$ szélességű vékony csík. Így $dA = LRd\theta$, és az összegzés során θ zérus és π között változik. Az **E** és $d\mathbf{A}$ közötti szög $[(\pi/2) - \theta]$. Így tehát:

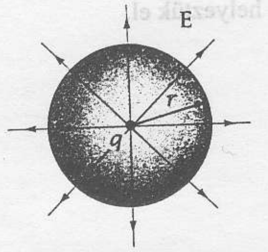
$$\Phi_E = \int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = \int_0^{\pi} E\cos[(\pi/2)-\theta]LR\,d\theta = ELR\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta$$

$$\Phi_E = ELR(-\cos\theta)\big|_0^{\pi} = ELR[-(-1-1)] = 2ELR$$

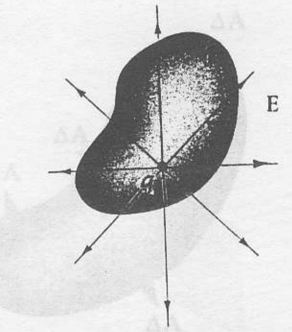
Képezzünk most egy zárt Gauss-felületet, úgy, hogy a hengerfelületet lezárjuk egy síklappal (amely a félhenger éleit összeköti), valamint két félkör alakú véglappal. Vegyük észre, hogy a fenti eredmény (ellentétes előjellel) azonos nagyságú, mint a síklapon számítható fluxus:

$$\int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = E(\cos 180^\circ)(2RL) = -2ELR\,.$$

Így, a homogén **E** erőtérben zárt felületet képezve, a teljes felületre összegzett fluxus zérus.($\int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = 0$ a félhenger véglapjain, mint-hogy ezeken **E** és d**A** 90°-os szöget zárnak be egymással.) A következő részben ezt az eredményt általánosítjuk tetszés szerinti alakú zárt felületek és tetszőleges (akár inhomogén) terek esetére.



a) A Gauss-felület r sugarú gömb, melynek középpontjában helyezkedik el a q pontszerű töltés.



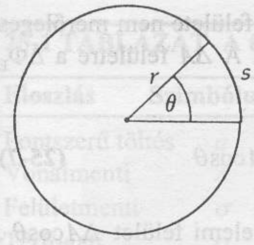
b) Tetszés szerinti alakú Gauss-felület belsejében a q pontszerű töltéssel.

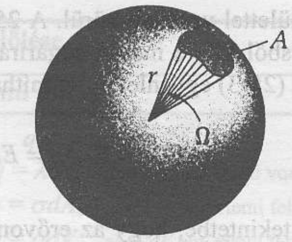
25-6 ábra
A q töltést körülvevő Gauss-felület.

25.3 A Gauss törvény

A vektorterek természetére vonatkozóan Karl Friedrich Gauss (1777–1855), a XIX. század egyik legnagyobb matematikusa vont le először alapvető következtetéseket, amelyek azóta is nagyon fontosak a fizikában. Gauss tevékenysége nagyban elősegítette az elektromágneses elmélet fejlődését. A Gauss törvény tárgyalását a legegyszerűbb példával kezdjük: tekintsünk egy q pontszerű töltést, és köréje, mint középpont köré képzeljünk el r sugarú gömbfelületet , ezt *Gauss-felületnek*[2] nevezzük (25-6a ábra). Mekkora a Φ_E elektromos fluxus ezen a zárt felületen? A sugárirányú, kifelé menő erővonalak mindenütt merőlegesek a felületre, és az **E** térerősség a felületen mindenütt azonos, így a teljes fluxus

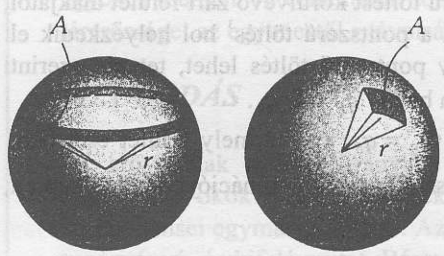
[2] A Gauss-felületek a számításokat segítő fizikai realitás nélküli, hipotetikus felületek, melyeknek tetszés szerinti alakjuk lehet.





a) A síkszög definíciója: $\theta \equiv s/r$ (radián egységekben), ahol s annak az ívnek a hossza, amelyet az r sugarú kör középpontjából θ szög alatt látunk. A teljes körív 2π síkszögnek felel meg.

b) A térszög definíciója: $\Omega \equiv A/r^2$ (szteradián egységekben), ahol A annak a felületnek a nagysága, amelyet az r sugarú gömb középpontjából Ω térszög alatt látunk. Egy térszögelemre: $\Delta\Omega \equiv \Delta A/r^2$ (szteradián egységekben). Az A felület bármilyen alakú lehet, de minden pontban merőleges kell hogy legyen a sugárra. Minthogy a gömb felülete $4r^2\pi$, a teljes gömbfelület $\Omega = 4r^2\pi / r^2 = 4\pi$ szteradián térszögnek felel meg. Az Ω térszög a középpontból kiinduló és a ΔA felülettel meghatározott kúp alakú tartománnyal szemléltethető.



c) Adott térszöget meghatározó felületnek sokféle alakja lehet (tetszőleges).

25-7 ábra

Az Ω térszög definíciója a síkszögével analóg. Éppúgy, mint ahogyan az s hosszúságú ív mindenütt merőleges a sugárra (r), az A felületnek mindenütt merőlegesnek kell lennie a sugárra. Minthogy Ω hosszúságok négyzetének a hányadosa, egysége, ezért a *szteradián* is, dimenziómentes szám.

$$\Phi_E = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \oint E(\cos 0^\circ)\, dA = E\oint dA = E(4\pi\, r^2)$$

A Coulomb törvény szerint a térerősség $E = q/4\pi\varepsilon_0 r^2$ így

$$\Phi_E = \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)(4\pi\, r^2) = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

A q PONTSZERŰ TÖLTÉS TELJES Φ_E ELEKTROMOS FLUXUSA

$$\Phi_E = \frac{q}{\varepsilon_0} \qquad (25\text{-}6)$$

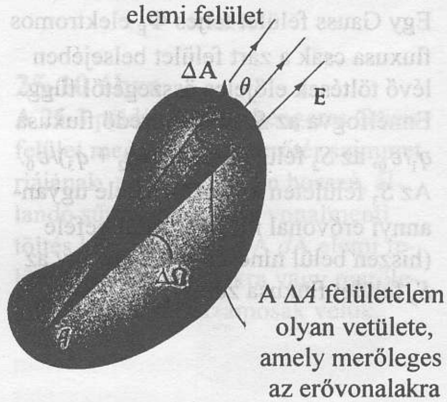
Jegyezzük meg, hogy a Φ_E fluxus nem függ a gömb nagyságától.

Mi a helyzet, ha a töltést nem gömbfelülettel vesszük körül (25-6b ábra)? Bizonyítható a következő, nagyon fontos állítás:

Ha egy zárt felület belsejében (bárhol) q töltés található, akkor a teljes felületre a $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$ integrál értéke mindig q/ε_0.

Természetesen, az integrálás során **E** térerősség értéke a felület különböző pontjaiban más és más, és az **E** és d**A** vektorok által bezárt szög is változik. Érdekes módon mégis, függetlenül a felület alakjától, az integrál értéke mindig q/ε_0.

A bizonyítást a 25-7 ábrán definiált Ω térszög fogalmának felhasználásával kezdjük. Tekintsünk egy q pontszerű töltést, amelyet tetszés szerinti



25-8 ábra

Az ábra q töltést körülvevő önkényesen felvett felületet mutat. A ΔA felületelem nem merőleges a q-ból induló erővonalakra. A $\Delta A'$ -vel jelölt vetület, amelynek nagysága $\Delta A' = \Delta A\cos\theta$, merőleges az erővonalakra, és így meghatározza a $\Delta\Omega = (\Delta A\cos\theta)/r^2$ térszögelemet. A ΔA elemi felület a q töltés helyéről $\Delta\Omega$ térszög alatt látszik.

alakú felülettel veszünk körül. A 25-8 ábra ΔA elemi felülete nem merőleges a q töltésből kifelé induló sugárirányú erővonalakra. A ΔA felületre a $\Delta\Phi_E$ fluxust a (25-3) egyenlettel számíthatjuk ki:

$$\Delta\Phi_E = \mathbf{E}\cdot\Delta A = E\Delta A\cos\theta = \left(\frac{kq}{r^2}\right)\Delta A\cos\theta \qquad \textbf{(25-7)}$$

Vegyük tekintetbe, hogy az erővonalakra merőleges elemi felület $\Delta A\cos\theta$, így $(\Delta A\cos\theta)/r^2$ éppen a $\Delta\Omega$ térszöggel egyenlő. Tehát a teljes zárt felületen a fluxus

$$\Phi_E = \oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = kq\oint\frac{dA\cos\theta}{r^2} = kq\oint d\Omega = kq(4\pi)$$

$$\Phi_E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}(4\pi) = \frac{q}{\varepsilon_0} \qquad \textbf{(25-8)}$$

Ez az eredmény független a pontszerű töltést körülvevő zárt felület alakjától, és attól, hogy ezen a felületen belül a pontszerű töltés[3] hol helyezkedik el. Továbbá, a felületen belül akárhány pontszerű töltés lehet, tetszés szerinti eloszlásban. A teljes töltés a felületen belül: $q_b = \Sigma_i q_i$.

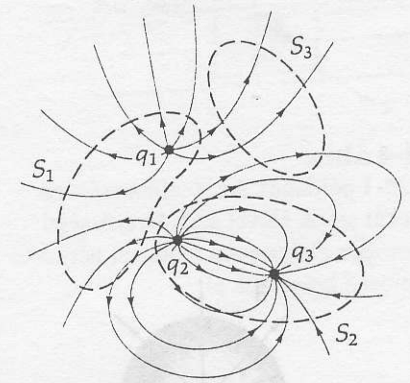
Eddig megmutattuk azt, hogy $\Phi_E = q_b/\varepsilon_0$, bármely felület esetében.. Minthogy $\Phi_E = \int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A}$, e két összefüggés kombinációjával azt kapjuk, hogy

A GAUSS TÖRVÉNY [Bármely zárt felület esetében, amelyen belül bárhol q_b töltés van]

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = \frac{q_b}{\varepsilon_0} \qquad \textbf{(25-9)}$$

Ebből az következik, hogy nincs szükségünk a Φ_E elektromos fluxus használatára. (Hiszen, az erővonalak csupán hasznos, ámde fiktív segédeszközök!) Helyette Gauss törvényét használjuk, ami közvetlen kapcsolatot teremt a töltések és a térerősségek között, mégpedig másképpen mint a Coulomb törvény. Szimmetrikus töltés-eloszlás esetében sokkal egyszerűbb a Gauss törvényt használni, mert a Gauss-felületet a tér szimmetriájának a figyelembevételével úgy választhatjuk meg, hogy az integrál értékét könnyű legyen kiszámítani. A Coulomb törvénnyel ellentétben – amely a töltések ismeretében megadja a térerősséget – a Gauss törvény arra is felhasználható, hogy megadjuk, mennyi töltés van az erőtér adott tartományában, ha ismerjük a térerősség-eloszlást, így Gauss törvényét „mindkét irányban" használhatjuk. A 25-9 ábra a Gauss törvénynek egy másik fontos tulajdonságát illusztrálja. Noha q_b a Gauss-felület *belsejében* lévő töltések összege, az integrál alatt álló **E** viszont a *felületen kívül és belül lévő összes* töltéstől származó térerősség.

Példáinkban szimmetrikus töltéseloszlást tételezünk fel: noha a Gauss törvény bármely töltéseloszlásra érvényes, csak a szimmetrikus esetekben könnyű ilyen módon a számításokat elvégezni. Azonban vegyük észre, hogy a Gauss törvény segítségével, pusztán szimmetria megfontolásokkal megmutathatjuk, hogy milyen az elektromos erőtér szerkezete, anélkül, hogy konkrétan kiszámítanánk. Avégett hogy a számítások egyszerűek legyenek, olyan Gauss-felületet célszerű választani, amelyik az erőtér struktúrájához, szimmetriájához illeszkedik.



25-9 ábra
Egy Gauss felület teljes Φ_E elektromos fluxusa csak a zárt felület belsejében lévő töltések előjeles összegétől függ. Ennélfogva az S_1 felület eredő fluxusa q_1/ε_0, az S_2 felületé pedig $(q_2+q_3)/\varepsilon_0$. Az S_3 felületen keresztül kifelé ugyanannyi erővonal megy át mint befelé (hiszen belül nincsen töltés) és így az S_3 felület fluxusa zérus.

[3] Ez az egyszerű tétel a Coulomb-tér $1/r^2$-es távolságfüggésének következménye.

25-1 TÁBLÁZAT A töltéseloszlások jelölése

Eloszlás	Szimbólum	Egység	Elemi töltés	
Pontszerű töltés	q	C	q	
Vonalmenti	λ	C/m	$dq = \lambda dx$,	ahol dx egy elemi vonalszakasz
Felületmenti	σ	C/m^2	$dq = \sigma dA$,	ahol dA egy elemi felület*
Térfogati	ρ	C/m^3	$dq = \rho dV$,	ahol dV egy elemi térfogat*

* A felületet és a térfogatot úgy kell megválasztani, hogy bennük a töltés sűrűsége állandó legyen.

25-3 PÉLDA

Pozitív töltések helyezkednek el egyenletesen egy végtelen hosszú egyenes mentén. A vonalmenti töltéssűrűség λ. Számítsuk ki az **E** térerősséget az egyenestől r távolságban.

MEGOLDÁS

Az erővonalak minden irányban indulnak ki a vonaltöltésből. Szimmetria okok miatt, a töltésekből származó tér tengelyirányú komponensei egymást kioltják[4]. Az eredmény az, hogy a térerősség sugárirányú, és kifelé mutat. Bármely pontban a tengelytől r távolságban (minden irányban) a térerősség azonos.

Ennélfogva, a Gauss-felület akkor illik a töltéseloszlás szimmetriájához, ha r sugarú, L hosszúságú, a vonaltöltéssel koaxiális hengert választunk Gauss felület gyanánt (25-10 ábra). A hengerfelület minden egyes pontjában **E** térerősség azonos nagyságú és mindenütt párhuzamos a d**A** elemi felülettel. A henger véglapjain **E** mindenütt merőleges d**A**-ra. A hengeren belül $q_b = \lambda L$ töltés van. Gauss törvényét alkalmazva

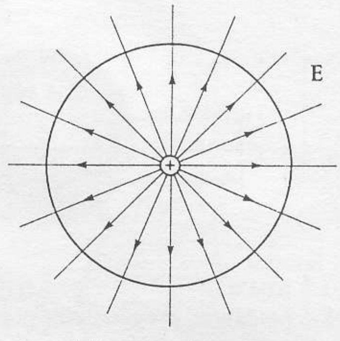
$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = \frac{q_b}{\varepsilon_0}$$

$$\underset{\substack{\text{A henger-}\\\text{felületre}}}{\oint} \underbrace{\mathbf{E}\cdot d\mathbf{A}}_{\cos 0^0=1} + \underset{\substack{\text{A vég-}\\\text{lapokra}}}{\oint} \underbrace{\mathbf{E}\cdot d\mathbf{A}}_{\cos 90^0=0} = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0}$$

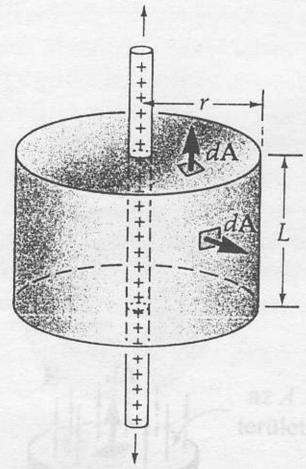
$$E(2\pi rL) \quad + \quad 0 \quad = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0}$$

Innen
$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \quad \begin{pmatrix}\text{sugárirányban}\\ \text{kifelé}\end{pmatrix} \tag{25-10}$$

Vegyük észre, hogy ez a megoldás mennyivel egyszerűbb, mint a 24-4 és 24-5 példákban alkalmazott, a Coulomb-törvényen alapuló módszer. A Gauss törvényen alapuló megoldás végezetül csak azért egyszerű, mert a Gauss-felületet alkalmasan, az elektromos tér szimmetriájának megfelelően választottuk meg, és így az $\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A}$ konkrét kiszámítása már egyszerű. Noha a



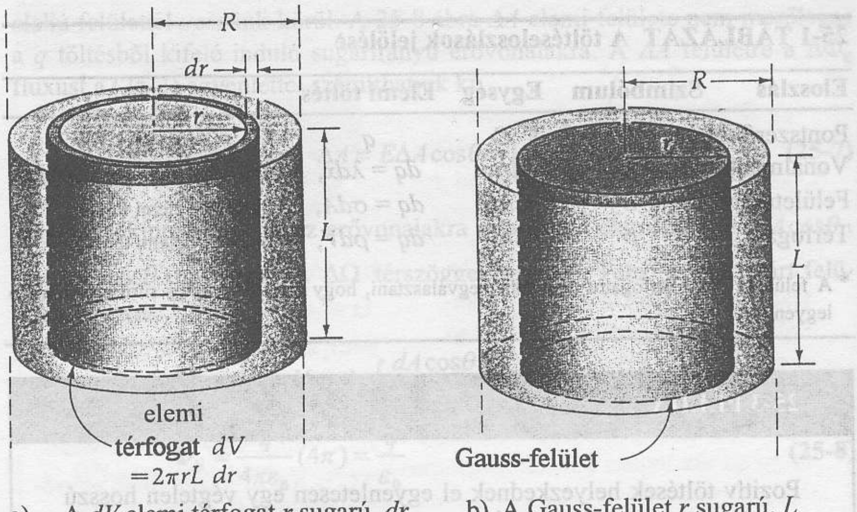
a) A pozitív töltések az ábra síkjára merőleges egyenes mentén helyezkednek el.



b) A vonalmenti töltés és a Gauss-felület.

25-10 ábra
A 25-3 példához. Egy hengeres Gauss-felület megfelel olyan erőtér szimmetriájának, amely végtelen hosszú, állandó sűrűségű pozitív vonalmenti töltés körül alakul ki. A d**A** elemi felületek az erővonalakra vagy merőlegesek, vagy párhuzamosak velük.

[4] A szimmetria megfontolások másik formája az, ha megmutatjuk, hogy a töltéssűrűség-eloszlásnak nincs aszimmetriája, ami tengelyirányú térerősségkomponenst okozna. Minthogy a töltéseloszlás a vonal mentén szimmetrikus, az egyedüli lehetőség, hogy a tér kövesse ezt a szimmetriát, az, ha sugárirányú elektromos tér alakul ki.



a) A dV elemi térfogat r sugarú, dr falvastagságú, L hosszúságú hengerpalást (cső).

b) A Gauss-felület r sugarú, L hosszúságú henger.

25-11 ábra

A 25-4 példához. Állandó, ρ töltéssűrűségű, végtelen hosszúságú R sugarú henger.

Gauss törvény elvileg bármilyen esetre alkalmazható, igazából csak olyan terek számítását lehet könnyen elvégezni, amelyeknek valamilyen nyilvánvaló szimmetriája van.

25-4 PÉLDA

Egy R sugarú, végtelen hosszúságú hengerben (25-11. ábra) a homogén töltéssűrűség ρ (töltés/térfogat egységekben megadva). Számítsuk ki a) a henger L hosszúságú szakaszának Q_L töltését; b) az E elektromos térerősséget a tengelytől $r < R$ távolságban.

MEGOLDÁS:

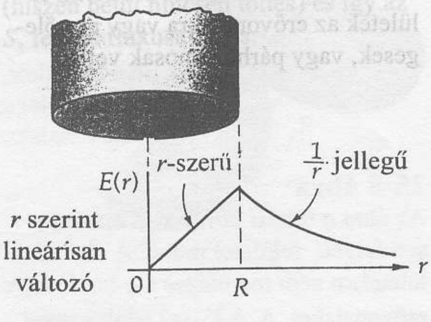
a) Térfogatmenti töltéseloszlásokra érvényes, hogy $Q = \int \rho\, dV$. Ebben az esetben a dV elemi térfogatokat tekintsük vékony dr falvastagságú, r sugarú, L hosszúságú hengerpalástoknak (csöveknek):

$$Q = \int \rho\, dV = \int_0^R \rho\, 2\pi\, r\, L dr = 2\pi\rho\, L \int_0^R r\, dr = \pi\rho\, LR^2$$

b) A rendszer szimmetriája alapján arra következtethetünk, hogy a térerősség sugárirányú, kifelé mutat és adott r-nél $\mathbf{E}$ térerősség mindenütt azonos. Olyan Gauss-felületet választunk amely illik ehhez a szimmetriához: Legyen ez r sugarú, L hosszúságú, amely az R sugarú hengerrel koaxiális és a belsejében (lásd feljebb) $q_b = \pi\rho L r^2$ töltés van.

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = \frac{q_b}{\varepsilon_0}$$

$$\int_0^R \underbrace{\mathbf{E}\cdot d\mathbf{A}}_{\cos 90^0 = 0} + \int_0^R \underbrace{\mathbf{E}\cdot d\mathbf{A}}_{\cos 0^0 = 1} = \frac{\pi\rho L r^2}{\varepsilon_0}$$



25-12 ábra

A 25-3 és 25-4 példákhoz. Az E térerősség r függvényében egy R sugarú, végtelen hosszúságú, homogén töltéseloszlású henger belsejében, illetve azon kívül. Az ábrán $E(r)$ pozitív, ha $\mathbf{E}(r)$ kifelé mutat.

$$0 \quad + \quad E(2prL) = \frac{pr\,Lr^2}{e_0}$$

E értékét kifejezve: $E = \left(\frac{\rho}{2e_0}\right) r$

Tehát a henger belsejében a térerősség egyenesen arányos a tengelytől mért távolsággal. A hengeren kívül a térerősség ugyanaz, mint a 25-1 példa esetében. E, mint r függvénye van ábrázolva a 25-12 ábrán.

25-5 PÉLDA

Számítsuk ki egy σ homogén pozitív felületmenti töltéssűrűségű, nagyon nagy (lényegileg végtelen) lemez térerősségét.

MEGOLDÁS

Szimmetriaokok miatt (hacsak nem vagyunk a lemez széle közelében) az elektromos erőtérnek mindkét oldalon csak a síkra merőleges komponense lehet. (Nincs ugyanis olyan aszimmetria, ami azt eredményezné, hogy az erővonalak a síktól messze valamilyen irányban elhajolnának.) Az erőtér szimmetriájához olyan Gauss-felület illik, amely egy A keresztmetszetű henger és amelynek tengelye a síkra merőleges, véglapjai pedig a síktól, annak két oldalán azonos távolságban vannak[5] (25-13 ábra). A felületen belül σA töltés van. Szimmetriaokok miatt a térerősség állandó, a henger két véglapjára merőleges és a palásttal párhuzamos. Gauss törvényét alkalmazva

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = \frac{q_b}{\varepsilon_0}$$

$$\int_{\substack{\text{Mindkét}\\ \text{véglapra}}} \underbrace{\mathbf{E}\cdot d\mathbf{A}}_{\cos 0^\circ = 1} + \int_{\substack{\text{A}\\ \text{palástra}}} \underbrace{\mathbf{E}\cdot d\mathbf{A}}_{\cos 90^\circ = 0} = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0}$$

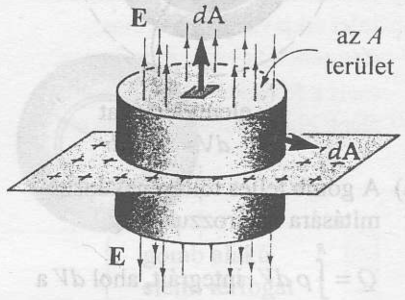
Az első integrál argumentumában $\mathbf{E}$ térerősség homogén és azonos nagyságú mindkét véglapnál, így kiemelhető az integráljel elé: $E\int dA = E(2A)$ (figyelembe véve, hogy két véglap van). A második integrál értéke zérus, minthogy $\cos 90° = 0$.

$$E(2A) + 0 = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0}$$

Innen $\quad E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ $\quad$ (a lemez síkjától kifelé mutató irányú a sík mindkét oldalán) $\quad$ **(25-11)**

Minthogy a síktól való távolság nem jelenik meg a kifejezésben, arra következtethetünk, hogy a térerősség a sík mindkét oldalán, a távolságtól függetlenül azonos.

[5] Nem lehetünk előre biztosak abban, hogy a térerősség nem változik-e a síktól való távolsággal. Viszont, a szimmetria miatt biztos az, hogy amennyiben ilyen távolságfüggés létezik, akkor annak a sík mindkét oldalán azonosnak kell lennie. Ezért kötjük ki, hogy a véglapok a sík két oldalán attól egyenlő távol legyenek.



25-13 ábra
A 25-5 példához. Egyenletes töltéseloszlású, σ pozitív töltéssűrűségű végtelen síklap által létrehozott elektromos erőtér. A Gauss-felület henger, melynek palástja, követve az erőtér szimmetriáját, a síklapra merőleges, a henger véglapjai pedig, szimmetrikusan a síklap alatt, illetve felett szerkesztett, azzal párhuzamos síklapok. A henger palástját egyetlen erővonal sem metszi, ezek ugyanis merőlegesek a véglapokra. (Henger helyett éppúgy választhattunk volna az erővonalakkal párhuzamos élű téglatestet is, vagy bármely más olyan testet, melynek oldalai párhuzamosak az erővonalakkal, és fedőlapjai pedig merőlegesek rájuk.)

25-6 PÉLDA

Nagyon nagy méretű vezető síklap felületén a töltések statikus egyensúlyban vannak. Számítsuk ki a felszín felett a térerősséget. A felületmenti töltéssűrűség σ.

MEGOLDÁS

Statikus esetben a vezető belsejében a térerősségnek zérusnak kell lennie, mert máskülönben a töltések elmozdulnának. Így az erővonalak a vezetőből indulnak és arra merőlegesek (25-14. ábra). Szimmetria-megfontolásokból célszerű ugyanolyan Gauss-felületet választani, mint az előző esetben; vegyük viszont figyelembe, hogy ebben az esetben az erővonalak csak az egyik véglapon haladnak át.

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = \frac{q_b}{\varepsilon_0}$$

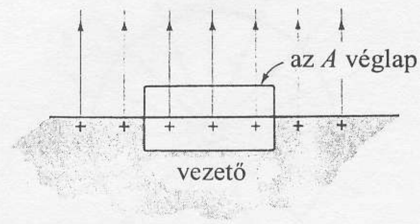
$$\int_{\substack{\text{felső}\\ \text{lap}}} \underbrace{\mathbf{E}\cdot d\mathbf{A}}_{\cos 0^0 = 1} + \int_{\substack{\text{alsó}\\ \text{lap}}} \underbrace{\mathbf{E}\cdot d\mathbf{A}}_{(E=0)} + \int_{\text{palást}} \underbrace{\mathbf{E}\cdot d\mathbf{A}}_{\cos 90^0 = 0} = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0}$$

$$EA \quad + \quad 0 \quad + \quad 0 \quad = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0}$$

AZ ELEKTROMOS TÉRERŐSSÉG KÖZVETLENÜL A VEZETŐ FELETT

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad \left[\begin{array}{l}\text{a vezető felüle-}\\ \text{tére merőlegesen}\end{array}\right] \qquad \textbf{(25-12)}$$

Ez a térerősség éppen kétszerese annak, amit az előző példánál kiszámítottunk, és értéke független a végtelen síklaptól való távolságtól.



25-14 ábra
A 25-6 példához. σ egyenletes pozitív felületmenti töltéssűrűség végtelen nagy vezető síkon.

A (25-12) egyenlet görbült vezető felületekre is érvényes, amelyeken σ helyről helyre változik. *A felület bármely pontjának közvetlen közelében az* **E** *térerősség nagysága* σ / ε_0 *és iránya merőleges a felületre.* Az egyenletet szemlélve paradoxonnak tűnik, hogy a felület közvetlen közelében a térerősség kizárólag a helyi töltéssűrűségtől függ, noha a térerősséget a teljes felület összes töltése (közeli és távoli egyaránt) hozza létre.

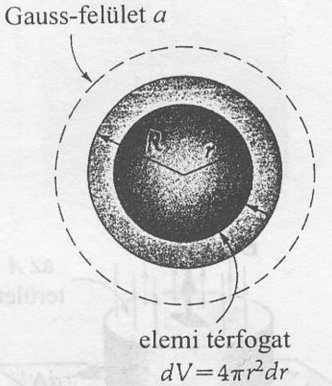
25-7 PÉLDA

Egy R sugarú gömbnek ρ (töltés/térfogat egységben megadott) egyenletes térfogatmenti töltéssűrűsége van (25-15 ábra). Számítsuk ki az elektromos térerősséget a) a gömbön kívül; és b) a gömb belsejében.

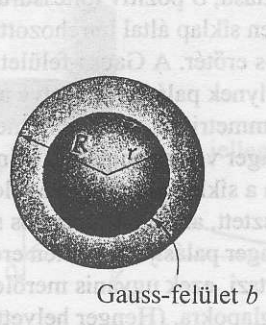
MEGOLDÁS

Szimmetriaokokból arra következtethetünk, hogy az elektromos térerősségnek csak sugárirányú, kifelé mutató komponense lehet, a gömbön kívül és belül is. Továbbá, adott r értéknél, **E** nagysága mindenütt azonos. Válasszunk egy ilyen szimmetriájú Gauss-felületet: legyen az egy r sugarú gömb, melynek középpontja azonos a gömbével.

a) <u>Ha $r > R$:</u> a) eset A teljes q_b töltés, ami a gömbfelület belsejében van, $Q = \int \rho\, dV = \rho\int_0^R 4\pi\, r^2 dr = \rho(4/3\pi R^3)$. Gauss törvényét alkalmazva és figyelembe véve, hogy



a) A gömb teljes töltésének kiszámítására határozzuk meg $Q = \int_0^R \rho\, dV$ integrált, ahol dV a dr vastagságú, r sugarú gömbhéj térfogata.



b) A Gauss törvény szerint csak a Gauss felületen belül lévő töltéseket kell figyelembe vennünk.

25-15 ábra
A 25-7 példához.

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = E\oint dA = E(4\pi\, r^2)\text{ , azt kapjuk, hogy}$$

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = \frac{q'}{\varepsilon_0}$$

$$E(4\pi r^2) = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Az egyenletet megoldva: $E = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

Ez pontosan ugyanolyan inverz négyzetes távolságfüggés, mintha a Q *töltést a gömb középpontjában, pontszerű töltésként helyeztük volna el*[6]. Avégett, hogy a végeredményt a megadott mennyiségek függvényeként kapjuk meg, végezzük el a következő helyettesítést: $Q = \rho(\frac{4}{3}\pi R^3)$, aminek eredménye:

Ha r > R: $E = \dfrac{(\rho\frac{4}{3}\pi R^3)}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \left(\dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\right)\dfrac{1}{r^2}$ [sugárirányú, kifelé mutat] **(25-13)**

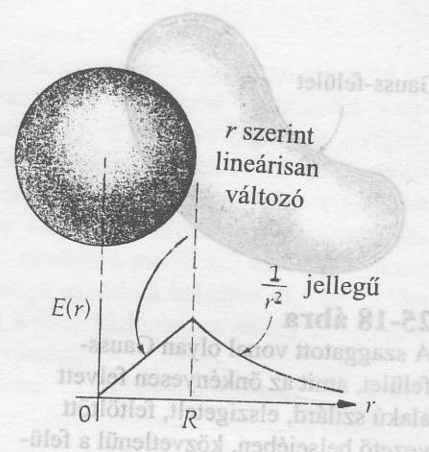
b) Ha $r < R$: Hogy kövessük az **E** térerősség szimmetriáját, válasszunk $r < R$ sugarú gömböt Gauss-felületnek (a b jelű felület a 25-15b ábrán). Gauss törvényének alkalmazásakor csak a felületen belüli q_b töltéseket kell figyelembe venni. A példa a) pontja szerint, a $q' = \int_0^r \rho\, dV$ integrált kell kiszámítani, ahol most a felső integrációs határ nem R, hanem r. Így, $q_b = \rho(\frac{4}{3}\pi\, r^3)$.

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = \frac{q_b}{\varepsilon_0}$$

$$E(4\pi r^2) = \frac{\rho 4\pi r^3}{3\varepsilon_0}$$

Ha r < R: $E = \left(\dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\right) r$ [sugárirányú, kifelé mutat] **(25-14)**

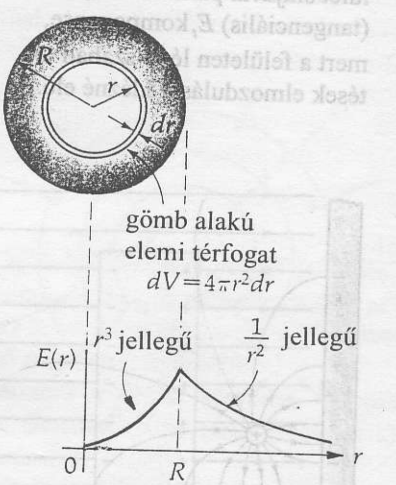
Tehát az egyenletes töltéseloszlású gömb belsejében *a térerősség egyenesen arányos a középponttól számított r távolsággal*. A 25-16 ábra az E térerősséget r függvényeként mutatja.



25-16 ábra
Az E térerősség r függvényében, egy R sugarú, homogén pozitív töltéssűrűségű gömb belsejében illetve azon kívül. A gömbön kívül a térerősségeloszlás éppen olyan, mintha a teljes Q töltés pontszerű töltésként a gömb középpontjában lenne. (Ez a megállapítás csak gömbszimmetrikus töltéseloszlásokra igaz!) Az ábrán $E(r)$ pozitív, ha $E(r)$ kifelé mutat.

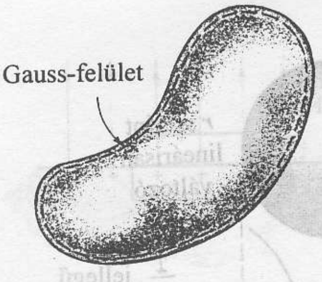
25-8 PÉLDA

Egy R sugarú gömbben a ρ pozitív töltéssűrűség nem konstans, hanem sugárirányban $\rho = Br^2$ függvény szerint változik, ahol B konstans (25-17 ábra). a) Mi B SI mértékegysége? b) Számítsuk ki a gömb teljes Q töltését; c) Mekkora az elektromos térerősség, ha $r < R$?



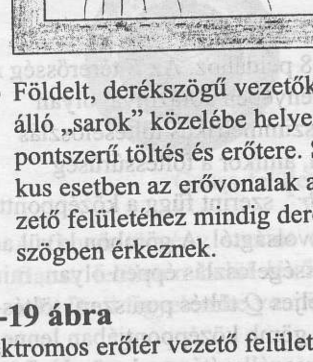
25-17 ábra
A 25-8 példához. Az E térerősség r függvényében ábrázolva, olyan gömbszimmetrikus töltéseloszlás esetén, amikor a töltéssűrűség $\rho = Br^2$ szerint függ a középponttól vett távolságtól. A gömbön kívül a térerősségeloszlás éppen olyan, mintha a teljes Q töltés pontszerű töltésként a gömb középpontjában lenne. (Ez a megállapítás csak gömbszimmetrikus töltéseloszlásokra igaz!) Az ábrán $E(r)$ pozitív, ha $\mathbf{E}(r)$ kifelé mutat.

[6] A 16.5 fejezetben analóg eredményhez jutottunk: homogén tömegeloszlású gömb gravitációs tere a gömbön kívül ugyanolyan, mintha a teljes tömeg a középpontban koncentrálódna. Kár, hogy Newton még nem használhatta Gauss törvényét. Annak, hogy Newton *Principiájá*nak a kiadása majdnem 20 évig elhúzódott, részben az is volt az oka, hogy Newtonnak nehézséget okozott a Holdra gyakorolt gravitációs erők összegzése, minthogy a Föld nem pontszerű. Newtonnak ki kellett dolgoznia a differenciálszámítás elemeit, hogy ezt a problémát megoldja; bár az általa használt formalizmus manapság meglehetősen különösnek tűnik.



25-18 ábra
A szaggatott vonal olyan Gauss-felület, amit az önkényesen felvett alakú szilárd, elszigetelt, feltöltött vezető belsejében, közvetlenül a felület alatt képzelünk el. Gauss törvénye alapján, a vezető belsejében a töltések nem lehetnek nyugalomban. Nyugalomban lévő töltések csak a felületen lehetnek.

a) A térerősségnek nem lehet a felület síkjával párhuzamos, (tangenciális) E_t komponense, mert a felületen lévő szabad töltések elmozdulását idézné elő.



b) Földelt, derékszögű vezetőkből álló „sarok" közelébe helyezett pontszerű töltés és erőtere. Statikus esetben az erővonalak a vezető felületéhez mindig derékszögben érkeznek.

25-19 ábra
Elektromos erőtér vezető felület környezetében, az *elektrosztatikus egyensúly* fennállása esetén.

MEGOLDÁS

a) Minthogy ρ dimenziója töltés/térfogat, B-t kifejezve azt kapjuk, hogy

$$B=\frac{\rho}{r^2}=\frac{(\mathrm{C/m^3})}{\mathrm{m^2}}=\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m^5}}$$

b) Minthogy a ρ töltéssűrűség sugárirányban változik, összegeznünk kell a dV elemi térfogatokban lévő dq töltéseket, *ahol az egyes dV elemi térfogatok a középponttól azonos távolságban vannak.* Ezt azért tehetjük, mert a ρ töltéssűrűség értéke a dV elemi térfogatban állandó. Válasszunk r sugarú, dr vastagságú gömbhéjakat (25-17 ábra), melyek térfogata $dV = 4\pi r^2 dr$; ezen gömbhéjak töltése $dq = \rho 4\pi r^2 dr$. Behelyettesítve a $\rho = Br^2$ kifejezést és az összes gömbhéjra r = 0-tól $r = R$-ig az összegzést elvégezve, azt kapjuk hogy

$$Q=\int dq=\int \rho\, dV=\int_0^R Br^2(4\pi r^2)dr=4\pi B\int_0^R r^4\,dr$$

$$Q=4\pi B\left(\frac{r^5}{5}\right)\Bigg|_0^R=\frac{4}{5}\pi BR^5$$

c) Válasszunk $r < R$ sugarú, gömb alakú Gauss-felületet. A gömb belsejében lévő q_b töltés

$$q_b=\int_0^r \rho\, dV=\int_0^r Br^2(4\pi r^2)dr=\frac{4}{5}\pi Br^5$$

A Gauss törvényt alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A}=\frac{q_b}{\varepsilon_0}$$

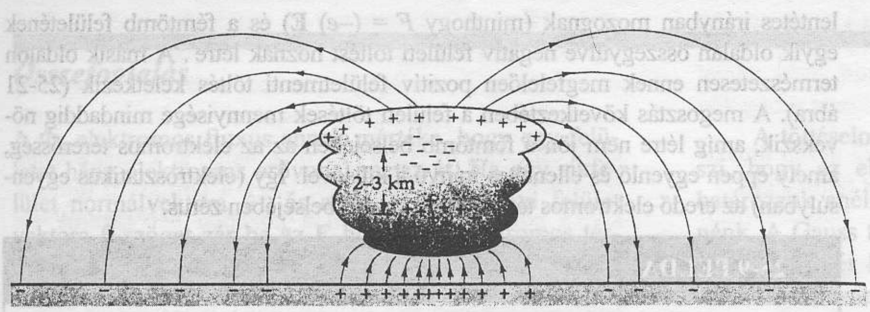
$$E(4\pi r^2)=\frac{4\pi Br^5}{5\varepsilon_0}$$

Innen $$E=\frac{Br^3}{5\varepsilon_0}$$

25.4 A Gauss törvény és az elektromos vezetők

Amikor elektromos töltéseket juttatunk szigetelt fémes vezetőre, akkor azok elektromos erőteret hoznak létre. Az erőtér viszont a töltéseket mindaddig mozgatja, amíg az elektrosztatikus egyensúly be nem áll, azaz mindaddig, amíg az összes töltés nyugalmi helyzetbe nem kerül.[7] Ez a töltésátrendeződés

[7] A leírtak mind pozitív, mind negatív töltések esetén igazak. Noha csak a negatív töltésű elektron képes a fémekben szabadon mozogni, pozitívan töltött vezetőben (amelynek elektronokból hiánya van) vannak olyan atomok, amelyekről elektron hiányzik: ezek a pozitív töltések. Minthogy az elektronok a fémekben szabadon mozoghatnak, az elektronhiányos atomok magukhoz vonzzák a szomszédos atomok valamelyik elektronját, és így a szomszédos atom válik pozitív töltésűvé. Ennek hatása olyan, mintha a pozitív töltés „ugrott" volna át a szomszéd atomra, az elektronokéval megegyező mozgékonysággal. Ennélfogva mind a pozitív, mind a negatív töltések „szabad" töltéseknek tekinthetők: mindaddig szabadon mozognak, amíg a statikus egyensúly be nem áll.



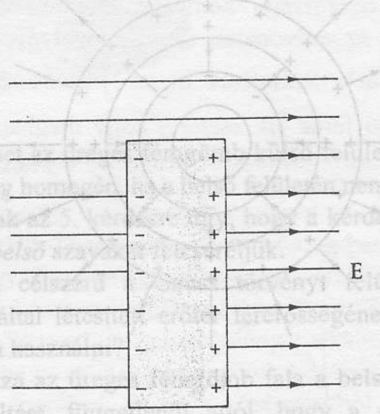
25-20 ábra

Légkörfizikusok sokáig kutatták a légköri elektromosság, a villámok okait. Minthogy pontos méréseket nagyon nehéz végezni, a töltésszétválás mechanizmusát még nem teljesen értjük. Azt tudjuk, hogy mechanikai, termodinamikai és talán kémiai eredetű energiák játszanak szerepet a töltés-szétválasztásban. Ezen az ábrán a zivatarfelhők leggyakrabban előforduló töltéseloszlása látható; bár néha a töltések fordított polaritással helyezkednek el. (A felhőn belül az erővonalakat nem ábrázoltuk.) A földfelszín feletti elektromos térerősség iránya tehát felhős, illetve napos időben ellentétes. Viharfelhő alatt az elektromos térerősség 10^4 N/C vagy még nagyobb is lehet. Ha az elektromos térerősség eléri a 10^5–10^6 N/C nagyságrendű értéket, villámok képződhetnek a felhők és a föld, de felhők között is. Egy villámcsapás során általában néhányszor tíz C töltés semlegesítődik. A villámban a csúcsáram 10–20 kA. A Föld teljes felszínét egyidejűleg mintegy 100 villám éri, amelyek 10 és 2 *s* közötti időtartamúak, villámlásonként 1–20 kisüléssel. Kontinensek felett mintegy tízszer gyakoribbak a villámok mint az óceánok felett. (J. V. Iribarne és H. R. Cho: *Atmospheric Physics*, (Reidel Publishing Co., 1980) című könyvéből átvéve.) Lásd még a 28-12 ábrát is.

nagyon gyorsan végbemegy: a legtöbb esetben az ehhez szükséges idő elhanyagolhatóan kicsi. Gauss törvényéből következik, hogy a *vezetőre juttatott többlettöltés statikus egyensúlyban a vezető külső felületén helyezkedik el.* Ezt demonstrálandó, tekintsünk egy elszigetelt, tetszés szerinti alakú fémes vezetőt (25-18 ábra). Vegyünk fel egy Gauss-felületet a vezető belsejében közvetlenül a vezető felülete alatt (szaggatott vonal). Elektrosztatikus egyensúlyban a vezető belsejében az elektromos térerősségnek zérusnak kell lennie, így a Gauss-felület egyetlen pontját sem metszheti elektromos erővonal, továbbá $\oint \mathbf{E}\, d\mathbf{A} = 0$. Ugyanezeknek a feltételeknek teljesülniök kell bármely, a felület alatt mélyebben rajzolt Gauss felület esetére is. A Gauss törvényből tehát arra következtethetünk, hogy a vezetőben sehol sem lehet többlettöltés, vagyis a többlettöltésnek a felületen kell lennie.[8]

Elektrosztatikus egyensúlyban az elektromos erővonalak mindig a vezetők felületére merőlegesen futnak be, és ott a megfelelő előjelű töltésekben végződnek (25-19 ábra). Ha lenne ugyanis az elektromos térerősségnek a felülettel párhuzamos komponense, akkor a felületen lévő töltéseket elmozdítaná, azaz nem lenne statikus egyensúly.

Mi történik, ha feltöltetlen fémdarabot elektromos erőtérbe helyezünk? Kezdetben a vezető elektronjai egyenletesen oszlanak el az anyagban, és a fémdarab mindenütt elektromosan semleges. Azonban, a külső elektromos erőtérre válaszul, a szabad elektronok gyorsan az **E** térerősség irányával el-

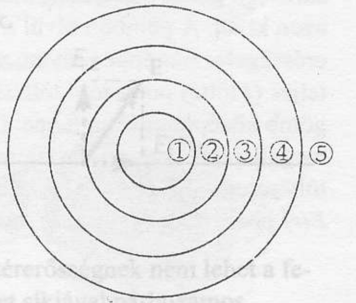


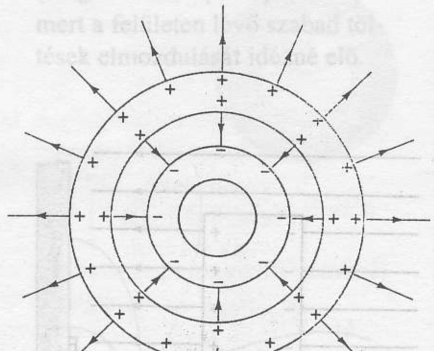
25-21 ábra

Egy külső elektromos erőtérbe helyezett töltetlen fémhasáb felületén töltések jelennek meg: a vezető belsejében, a megosztással keletkező felületi töltések által létrehozott belső erőtér kioltja az eredeti erőtér hatását, így a hasábon belül zérus nagyságú térerősség alakul ki.

[8] Vajon a töltések a felületen, vagy közvetlenül azalatt helyezkednek el? E kérdésre válaszolandó, az atomi mérettartományban kellene a „felület" fogalmát definiálnunk. Ezt a problémát pillanatnyilag megkerüljük; a „felületen" és a „felületnél" kifejezések egyaránt jól fedik a lényeget.

lentétes irányban mozognak (minthogy $F = (-e)\,\mathbf{E}$) és a fémtömb felületének egyik oldalán összegyűlve negatív felületi töltést hoznak létre[9]. A másik oldalon természetesen ennek megfelelően pozitív felületmenti töltés keletkezik (25-21 ábra). A megosztás következtében a felületi töltések mennyisége mindaddig növekszik, amíg létre nem jön a fémtömb belsejében az az elektromos térerősség, amely éppen egyenlő és ellentétes irányú a külsővel. Így (elektrosztatikus egyensúlyban) az eredő elektromos térerősség a vezető belsejében zérus.





25-22 ábra

A 25-9 példához. Két koncentrikus vezető gömbhéj. A belső gömbhéjon $-Q$, a külsőn $+3Q$ töltés van.

25-9 PÉLDA

Üreges vezető gömb üregében kisebb, vele koncentrikus, szintén üreges vezető gömb van (25-22a ábra). A belső gömb $-Q$ negatív, a külső gömb pedig $+3Q$ pozitív töltésű. A töltések elektrosztatikus egyensúlyban vannak. Gauss törvényét alkalmazva, számítsuk ki, hol mekkora a töltés és a térerősség.

MEGOLDÁS

A vezetők gömbszimmetriája miatt az elektromos térerősség mindenütt sugárirányú, akár kifelé, akár befelé mutat.

1. tartomány: A belső gömb belsejében lévő Gauss gömb felületén belül nincsenek töltések. Szimmetriaokokból ezen a felületen (ha létezne) az $\mathbf{E}$ térerősségnek mindenütt azonos értékünek kellene lennie. Minthogy $\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = 0$, az $\mathbf{E}$ térerősség mindenütt zérus ebben a tartományban.

2. tartomány: Minthogy statikus esetben vezetők belsejében nincsenek erővonalak, ha a Gauss törvényt alkalmazzuk olyan gömb alakú Gauss felületre, amelyik éppen a belső gömb külső felülete alatt van, azt kapjuk, hogy $\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = 0$, tehát a $-Q$ töltésnek a belső gömb külső felületén kell lennie.

3. tartomány: Minthogy a 3. tartományban megszerkesztett Gauss-felületre $\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = -Q/\varepsilon_0$, az erővonalaknak szimmetriaokokból sugárirányban befelé kell mutatniuk, mintha a $-Q$ pontszerű töltés a gömbök közös középpontjában lenne. Ennélfogva

$$\mathbf{E}_3 = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

4. tartomány: Minthogy vezető belsejében $\mathbf{E} = 0$, és $\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = 0$, következésképpen a gömb alakú Gauss-felület belsejében az eredő töltés zérus, vagyis a külső gömb belső falán $+Q$ töltésnek kell lennie, hogy a belső gömb $-Q$ töltését kompenzálja.

5. tartomány: A külső gömbhéjon $+3Q$ töltés van. Minthogy $-Q$ a belső felületen van, $+2Q$ töltés lehet a külső felületen. Az 5. Gauss-felületen belül $-Q + 3Q = +2Q$ össztöltés van, aminek következtében a (szimmetriaokokból) sugárirányú, kifelé irányuló térerősség olyan, mint amilyet a középpontban elhelyezett $+2Q$ ponttöltés hozna létre:

$$\mathbf{E}_5 = \frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

A töltés- és térerősségeloszlást a 25-22b ábrán vázoltuk.

[9] Az elektronok általában a felülethez kötött állapotban vannak, noha megfelelően erős külső tér hatására a téremissziónak nevezett folyamatban ki is léphetnek onnan. Feltételezzük, hogy ez a példánkban nem történik meg

Összefoglalás

A Φ_E elektromos fluxus annak mértéke, hogy egy felületet hány elektromos erővonal metsz át. Ha egy síkfelület normálvektora $\hat{\mathbf{n}}$, és a $d\mathbf{A} = nd\mathbf{A}$ elemi felület vektora θ szöget zár be az $\mathbf{E}$ homogén elektromos térerősséggel, akkor a fluxus az alábbi egyenlettel számítható:

$$\Phi_E = EA\cos\theta$$

Általánosabban: $$\Phi_E = \int_A \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A}$$

Zárt felület esetében, a $d\mathbf{A}$ elemi felületvektor a kifelé mutató normálvektor irányába mutat.

A Gauss *törvény*:

$$\oint_A \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = \frac{q_b}{\varepsilon_0}$$ [ahol A tetszőleges zárt felület amelyen belül, tetszőleges térbeli eloszlásban, összesen q_b töltés van]

$$\oint_A \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho\, dV$$ [ahol a ρ töltéssűrűség az A felület által bezárt V térrészben van]

A töltéseloszlások elnevezései, jelölései:

Eloszlás	Szimbólum	Egység	Elemi töltés
Pontszerű töltés	q	C	q
Vonalmenti töltés	λ	C/m	$dq = \lambda dx$ (ahol dx egy elemi vonalszakasz)
Felületmenti töltés	σ	C/m^2	$dq = \sigma dA$ (ahol dA egy elemi felület*)
Térfogatmeni töltés	ρ	C/m^3	$dq = \rho dV$ (ahol dV egy elemi térfogat*)

* A felületet és a térfogatot úgy kell kiválasztani, hogy bennük a töltés sűrűsége állandó legyen.

A töltéseloszlás szimmetriája gyakran lehetővé teszi, hogy az elektromos térerősség szerkezetét meghatározzuk anélkül, hogy a konkrét számítást elvégeznénk. A Gauss törvény akkor alkalmazható könnyen az elektromos tér kiszámítására, ha olyan Gauss-felületet választunk, amely megfelel a térerősség szimmetriájának: vagy legyen mindenütt merőleges az erővonalakra és azonos térerősségű pontokon haladjon át, vagy a térerősség irányával legyen párhuzamos és így az integrál értékét nem befolyásolja.

Ha egy felületen a felületmenti töltéssűrűség σ, akkor annak közvetlen környezetében a térerősség értéke

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

A feltöltött vezető anyagok *elektrosztatikus egyensúlyban* a következőkkel jellemezhetők:

1) Statikus egyensúlyban a többlettöltések mindig a vezető külső felületén helyezkednek el.
2) Az elektromos erőtér a vezető belsejében mindenütt zérus.
3) Elektrosztatikus egyensúlyban az elektromos erővonalak a vezetők felületére mindig merőlegesen futnak be. Az elektromos térerősség nagysága a vezető felületén σ / ε_0, ahol σ a lokális felületmenti töltéssűrűség.

Kérdések

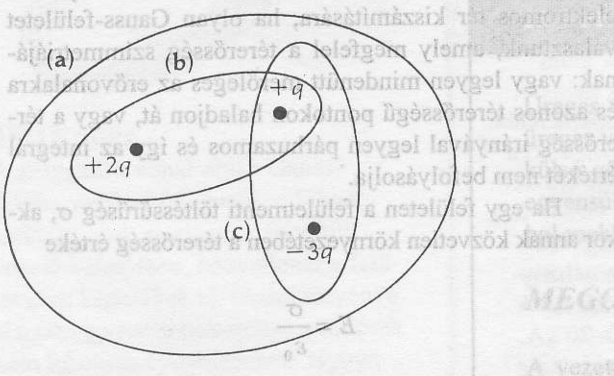
1. Belül üres nagy gömb középpontjában egy kis tömegű test van. Ha a gömbön kívül elhelyezünk egy másik testet, vajon az üregben lévő test érzékeli-e a külső test gravitációs hatását?
2. Üreges, feltöltetlen fémgömb középpontjában egy töltés van. Ha a gömbön kívül elhelyezünk egy másik töltést, vajon az üregben lévő test érzékeli-e a külső töltés elektromos erőterét?
3. Üreges vezető gömb belsejében lévő töltés elmozdulásakor megváltozik-e a gömbön kívüli elektromos erőtér?
4. Olajon úszó üreges fémgömbre töltést juttatunk. Feltöltött állapotban a gömb jobban vagy kevésbé merül az olajba, netán ugyanolyan mélyen marad? Miért?
5. Hogyan lehet az üreges fémgömb külső felületén a töltéssűrűség homogén, ha a belső felületén nem az?
6. Válaszoljunk az 5. kérdésre úgy, hogy a kérdésben a *külső* és *belső* szavakat felcseréljük.
7. Miért nem célszerű a Gauss törvényt feltöltött fémkocka által létesített erőtér térerősségének kiszámítására használni?
8. Miért vonzza az üreges fémgömb fala a belsejébe juttatott töltést, függetlenül attól, hogy a gömb töltött vagy sem?
9. Ha egy kisméretű pozitív töltés és egy nagyméretű fémgömb vonzza egymást, akkor az azt jelenti vajon, hogy a fémgömbnek negatív töltése van?

Feladatok

25.2 Az elektromos fluxus

25.3 Gauss törvénye

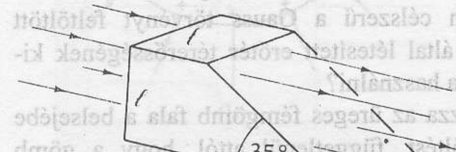
25A-1 Számítsuk ki a Φ_E fluxust a 25-23 ábrán illusztrált töltéseloszlás esetére, az *a*, *b* és *c* zárt felületekre.



25-23 ábra
A 25A-1 feladathoz.

25A-2 Egy inhomogén elektromos térerősség az $x > 0$ térrészben pozitív *x* irányú és nagysága $20x$ N/C, az $x < 0$ térrészben negatív *x* irányú és nagysága $20x$ N/C. Helyezzünk el egy 1 m élhosszúságú (szigetelő) kockát úgy, hogy középpontja a koordinátarendszer origójába essen, és élei legyenek párhuzamosak a koordinátarendszer tengelyeivel. a) Vázoljuk fel a térerősségeloszlást. b) Számítsuk ki a kocka egyes lapjain a fluxust. c) Számítsuk ki, mekkora töltés van a dobozban.

25A-3 A 25-24 ábrán vázolt, $\ell = 5$ cm oldalhosszúságú négyzetes keresztmetszetű csövet helyezzük az $E = 30$ N/C térerősségű homogén elektromos erőtérbe úgy, hogy az erővonalak a cső tengelyével párhuzamosak legyenek. Számítsuk ki az $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$ értékét az ábrán látható ferde sík esetére, hogy meghatározzuk a teljes Φ_E elektromos fluxust, ami kilép ebből az oldallapból.



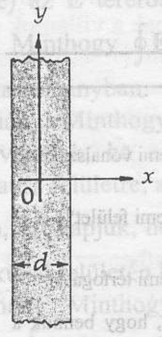
25-24 ábra
A 25A-3 feladathoz.

25A-4 Egy *L* élhosszúságú kocka alakú Gauss felület középpontjában $+Q$ ponttöltés helyezkedik el. *Tételezzük fel, hogy a töltésből 1200 erővonal indul ki szimmetrikusan.* a) Szimmetria meggondolásokkal számítsuk ki a kocka egyes lapjain a kilépő erővonalak számát (tételezzük fel hogy egy erővonal sem esik éppen élre vagy csúcsra); b) Hány erővonal halad át a kocka teljes felszínén? c) Tételezzük fel, hogy a pontszerű töltés a kocka belsejében, de nem a közepén helyezkedik el. Melyik kérdésre kellene más választ adni, és miért?

25A-5 Két végtelen, szigetelő sík mindegyikén egyenletes σ töltéssűrűség van. A síkok egymással párhuzamosak. A szuperpozíciós elv használatával határozzuk meg a két sík közötti, illetve az azokon kívül lévő elektromos térerősséget.

25A-6 Oldjuk meg az előző példát úgy is, hogy az egyik síkon a töltéssűrűség $-\sigma$.

25B-7 Egy *d* vastagságú lemezben egyenletes ρ térfogatmenti töltés van. A lemez a $\pm y$ és $\pm z$ irányokban gyakorlatilag végtelen (25-25 ábra); az *x* tengely zéruspontját úgy választottuk meg, hogy az a lemez *d* szélességének a felénél legyen. Számítsuk ki az elektromos térerősség nagyságát *x* pozitív értékeire az a) $0 < x < d/2$; b) $x > d/2$ esetekre.



25-25 ábra
A 25B-7 feladathoz.

25B-8 Legyen a Föld felszíne felett kis távolságban, az üres térben egy proton. a.) Számítsuk ki azt a *Q* töltést, amit (egyenletesen elosztva) a Föld felszínére kellene juttatnunk, hogy akkora elektromos taszítóerőt okozzon, mint ami éppen kiegyenlíti a Föld gravitációs vonzóerejét. b.) Ez a *Q* töltés a nagyobb távolságban lévő szabad protonokra ható gravitációs erőt is kiegyenlítené vajon? Magyarázzuk meg.

25.4 Gauss törvénye és az elektromos vezetők

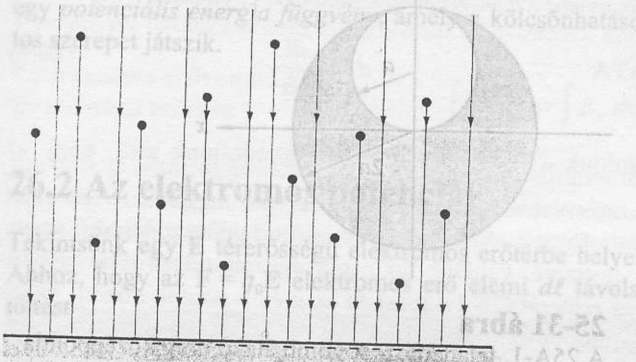
25A-9 Tekintsünk egy nagyon nagy sugarú, elszigetelt vezető gömböt, amelyen a (C/m^2 egységekben kifejezett) homogén felületmenti töltéssűrűség σ. a) Vezessük le, hogy mekkora az elektromos térerősség a gömb közvetlen környezetében. b) Határozzuk meg, hogy mekkora az *elektromos térerősség egy olyan, nagyméretű sík vezető* környezetében, amely a gömbbel azonos felületű és töltésű. Tételezzük fel, hogy a síkon a töltés egyenletesen oszlik el, vagyis a szélek hatását elhanyagolhatjuk.

25A-10 Tekintsünk egy 10 cm sugarú üreges fémgömböt, amelyen +10 μC töltés van. Legyen a gömb középpontja a koordinátarendszer origójában. A gömb belsejében, az $x = 5$ cm pontban legyen egy -3 μC nagyságú pontszerű töltés. Számítsuk ki az elektromos térerősséget a gömbön kívül, az x tengely mentén. Vázoljuk fel az erővonalakat a gömbön kívül és azon belül.

25A-11 Tiszta, napos időben sík terepen vagy vízfelszín felett az elektromos térerősség kb. 130 V/m nagyságú és iránya lefelé mutat. (Felhők alatt a térerősség nagysága lényegesen változhat, az iránya akár ellentétes is lehet.) Mekkora a felületmenti töltéssűrűség ilyenkor?

25B-12 Egy nagyon hosszú, R sugarú fémrúdon σ egyenletes felületmenti töltéssűrűség van. a) Elhanyagolva a rúd végeinek hatását, számítsuk ki az **E** térerősséget a henger felszínétől R távolságban. b) Számítsuk ki azt a v sebességet, amellyel egy elektron a rúd körül R távolságban stacionárius körpályán mozogna.

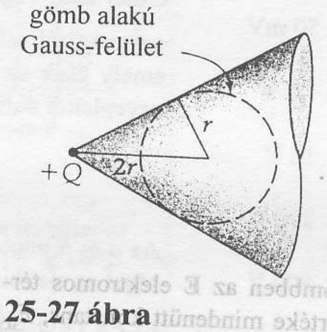
25B-13 A Föld felszíne fölötti elektromos térerősség a felszín felületi töltésének következménye. Az elektromos térerősség a felszín feletti magassággal változhat, mert a levegőben is lehetnek szabad töltések, amelyeken az erővonalak végződhetnek, miként azt a 25-26 ábra illusztrálja. Tételezzük fel, hogy 300 méter magasságban a térerősség 100 N/C és lefelé irányul, és 100 m magasságban 150 N/C és ott is lefelé irányul. a) Gauss törvényének felhasználásával számítsuk ki az átlagos ρ töltéssűrűséget a fenti két magasság közötti tartományban; b) Fejezzük ki a töltéssűrűséget úgy is, hogy megadjuk a többlet- vagy hiányzó elektronok köbméterenkénti számát.



25-26 ábra
A 25B-13. feladathoz.

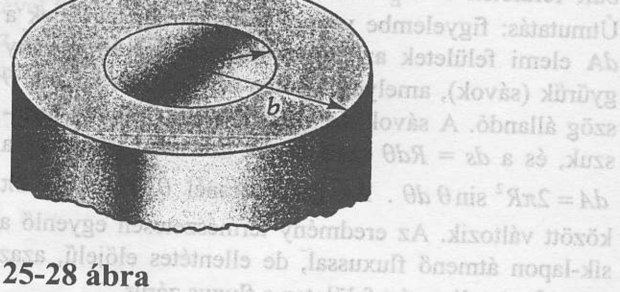
További feladatok

25C-14 Egy $+Q$ töltésből 1200 erővonal indul ki, szimmetrikusan minden irányban. A Gauss-felület egy r sugarú gömb, melynek középpontja a pontszerű töltéstől $2r$ távolságban van (25-27 ábra). a) Hány erővonal halad át ezen a Gauss felületen? (Útmutatás: A D függelékben megtalálható az Ω térszög és egysége, a szteradián definíciója. Egy pont körüli teljes tér 4π szteradián térszögű; egy kúp, melynek nyílásszöge 2θ, $\Omega = 2\pi(1 - \cos\theta)$ szteradián térszögű.) b) Számítsuk ki a Gauss-felület $\Phi_E = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$ eredő elektromos fluxusát, figyelembe véve, hogy a belépő erővonalak negatív, a kilépők pedig pozitív fluxust adnak.



25-27 ábra
25C-14. feladathoz.

25C-15 A 25-28 ábrán illusztrált a belső és b külső sugarú, végtelen hosszú cső fala pozitív töltésű. A ρ töltéssűrűség nem egyenletes: a és b között a tengelytől vett távolsággal fordított arányban változik, azaz ha $a \leq r \leq b$, $\rho = k / r$, ahol k egy SI egységekben megadott konstans. a) Mi a k egysége? b) Számítsuk ki az L hosszúságú csődarab Q töltését. c) Gauss törvényét felhasználva, határozzuk meg az E elektromos térerősséget az r pontban ($a < r < b$).

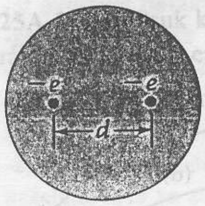


25-28 ábra
A 25C-15. feladathoz.

25C-16 Egy korai (és helytelen) hidrogénatom-modell szerint, amelyet J. J. Thomson javasolt, az atomban a $+e$ pozitív töltés egy R sugarú gömbben egyenletesen van elosztva. Ennek közepén foglal helyet a pontszerű $-e$ töltésű negatív elektron. a) Gauss törvényét alkalmazva, mutassuk meg, hogy az elektron a gömb közepén nyugalmi helyzetet foglal el, és ha a középpontból $r < R$ távolságra kimozdítanánk, $F = -kr$ visszatérítő erő hatna rá. b) Mutassuk meg, hogy $k = e^2 / 4\pi\varepsilon_0 R^3$. c) Határozzuk meg az elektron középpont körüli kis amplitúdójú ($< R$) harmonikus rezgésének f frekvenciáját. d) Számítsuk ki, hogy R milyen értéke esetén kapunk a rezgés frekvenciájára 2,47 10^{15} Hz értéket (ez a hidrogénszínkép legintenzívebb vonalának frekvenciája).

25C-17 A héliumatom Thomson-modellje (lásd az előző feladatot) szerint a $+2e$ pozitív töltés egyenletesen eloszolva egy R sugarú gömböt alkot, melyben a két $-e$

töltésű, pontszerű elektron szimmetrikusan helyezkedik el (25-29 ábra). Mutassuk meg, hogy az elektronok d egyensúlyi távolsága R.

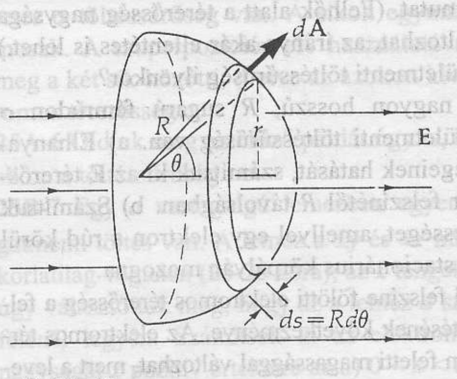


25-29 ábra
A 25C-17. feladathoz.

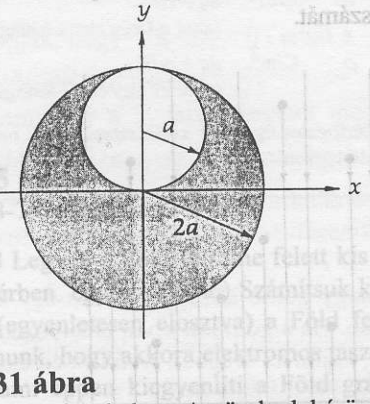
25C-18 Egy R sugarú gömbben az **E** elektromos térerősség kifelé mutat, és értéke mindenütt konstans, E_0. Így, $E = E_0\,\hat{\mathbf{r}}$, ahol $\hat{\mathbf{r}}$ a kifelé mutató sugárirányú egységvektor. a) Felhasználva Gauss törvényét vezessük le hogy hogyan függ a $\rho(r)$ térfogatmenti töltéssűrűség az r sugártól. (Útmutatás: az integrálszámítás alaptétele szerint ha $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, akkor $dg/dx = f(x)$. b) A gömb középpontjával kapcsolatban milyen nehézség adódik?

25C-19 Ahogyan a 25-30 ábrán látható, az **E** térerősségű homogén elektromos térbe úgy helyezünk egy R sugarú, sík lappal zárt félgömböt, hogy az erővonalak e sík lapon merőlegesen haladjanak. Számítsuk ki a görbült felületen a Φ_E elektromos fluxust integrálással. Útmutatás: figyelembe véve a szimmetriát, legyenek a $d\mathbf{A}$ elemi felületek az ábrán illusztrált olyan vékony gyűrűk (sávok), amelyek mentén az **E** és $d\mathbf{A}$ közötti θ szög állandó. A sávok dA területe a $2\pi(R \sin\theta)$ hosszuk, és a $ds = Rd\theta$ szélességük szorzata. Ennélfogva $dA = 2\pi R^2 \sin\theta\, d\theta$. Az összegzésnél θ, zérus és 2π között változik. Az eredmény természetesen egyenlő a sík-lapon átmenő fluxussal, de ellentétes előjelű, azaz $-E(\pi r^2)$. A teljes zárt felületen a fluxus zérus.

25C-20 Szigetelő anyagból készült $2a$ sugarú gömbben az egyenletes térfogatmenti töltéssűrűség ρ. (Tételezzük fel, hogy a gömb anyagának nincs hatása a térerősség nagyságára.) A 25-31 ábrán látható helyen a gömbben a sugarú gömb alakú üreget képezünk. Mutassuk meg, hogy az üregben az elektromos térerősség homogén és nagysága $E_x = 0$ és $E_y = \rho a / 3\varepsilon_0$. (Útmutatás: Az üregben lévő erőtér az eredeti gömb erőterének és az üreg helyén elképzelt $-\rho$ negatív töltéssűrűség erőterének szuperpozíciója. Hasznos lehet az $\mathbf{r}\hat{\mathbf{r}} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}}$ vektorösszefüggés is.)



25-30 ábra
A 25C-19. feladathoz.



25-31 ábra
A 25A-1. feladathoz. A gömb alakú üreg középpontja az $y = a/2$ pontban van.

AZ 24–45 FEJEZETEK PÁRATLAN SZÁMOZÁSÚ FELADATAINAK MEGOLDÁSAI

XXIV. Fejezet

24A-1 649 kg
24A-3 $2{,}27 \times 10^{39}$
24A-5 110 N 157°-ra a +x tengelytől
24B-7 $2{,}51 \times 10^{-10}$
24B-9 $x = 0{,}817$ m
24B-11 9,55 elektront
24A-13 $4{,}90 \times 10^{-3}$ C
24B-15 $y = (qE_o/2mv_o^2)x^2$
24A-17 $1{,}70 \times 10^{-10}$ m
24B-19 $Q/4\pi\varepsilon_o d(d + L)$
24B-21 A válasz adott.
24C-23 A válasz adott.
24C-25 A válasz adott.
24C-27 $W = Q2/8\pi\varepsilon_o R$
24C-29 3,67 cm
24C-31 $2\pi\sqrt{ml / 2qE}$
24C-33 $d = \frac{\pi}{2\omega}\left[v_1 + \frac{eE_o}{m\omega\sqrt{2}}\right] l = \frac{3\pi}{2\omega}\left[v_1 + \frac{eE_o\sqrt{2}}{m\omega}\right]$
24C-35 a) $E_y = \lambda L / 4\pi\varepsilon_o a\sqrt{L^2 + a^2}$
b) $E_x = (\lambda / 4\pi\varepsilon_o)\left[(1/a) - (1/\sqrt{L^2 + a^2})\right]$
24C-37 A válasz adott.
24C-39 A válasz adott.
24C-41 $E = (Q/4\pi^2\varepsilon_o R_2)\sin(l/2R)$, a megmaradó körívtől kifelé irányítva

XXV. Fejezet

25A-1 a) zérus b) $3q/\varepsilon_o$ c) $-2q/\varepsilon_o$
25A-3 $7{,}50 \times 10^{-2}$ N·m²/C
25A-5 a) zérus b) σ/ε_o
25B-7 a) px/ε_o b) $pd/2\varepsilon_o$
25A-9 a) σ/ε_o b) $\sigma/2\varepsilon_o$
25A-11 $-1{,}15 \times 10^{-9}$ C/m²
25B-13 b) $1{,}38 \times 10^7$ elektron/m³ hiány
25C-15 a) C/m² b) $Q = k2\pi L(b - a)$
c) $E = (k/\varepsilon_o)(1 - a/r)$
25C-17 A válasz adott.
25C-19 $E(\pi R^2)$

XXVI. Fejezet

26A-1 a) $2{,}05 \times 10^6$ m/s
b) 12 eV, $1{,}92 \times 10^{-18}$ J c) 3,89 ns
26A-3 a) $2{,}19 \times 10^6$ m/s c) $-13{,}6$ eV
26B-5 0,0415 kq/a; a középpontban
26B-7 A válasz adott.
26B-9 1,01 × 10-19 N, 18,4° az x tengelyhez képest
26B-11 $Q_o/2$, $3Q_o/2$
26B-13 A gömb belsejében $E = 0$, $V = -(140/3\pi\varepsilon_o)\ \mu$V
a gömbök közt
$E = (80/4\pi\varepsilon_o r^2)\ \mu N/C$ befelé,
$V = -(1/4\pi\varepsilon_o)(80/r - 40/0{,}5)\ \mu$V
a gömbökön kívül $E = (40/4\pi\varepsilon_o r^2)\ \mu N/C$,
befelé,
$V = -(40/4\pi\varepsilon_o r)\ \mu$V
26C-15 $\frac{Q}{4\pi\varepsilon_o l}\ln\frac{l + \sqrt{l^2 + y^2}}{y}$
26C-17 a) C/m⁴ b) $Q = A\pi R^4$
c) $E = Ar^2/4\varepsilon_o$ d) r ≥ R esetén $V = AR^4/4\varepsilon_o r$
r ≤ R esetén $V = (A/12\varepsilon_o)(4R^3 - r^3)$
26C-19 2000 V
26C-21 A válasz adott.
26C-23 a) $2{,}72 \times 10^{-5}$ m
b) $2{,}65 \times 10^7$ m/s és $6{,}19 \times 10^5$ m/s
c) 2000 eV, $3{,}20 \times 10^{-16}$ J
26C-25 a) $(q / 2\pi\varepsilon_o)\left\{\left[x^2 + (l/2)^2\right]^{-1/2} - 1/x\right\}$
b) $(q / 4\pi\varepsilon_o)\left[(y + l/2)^{-1} + (y - l/2)^{-1} - 2/y\right]$