2024.06.04.
Analízis 2. informatikusoknak vizsga, feleletválasztós rész (50 pont)

címke névvel, Neptun kóddal

$\boldsymbol{\alpha}$ ■, $\boldsymbol{\beta}$ □

Válassza ki az egyetlen helyes megoldást![1] **($4 \times 5 = 20$ pont)**

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(xy)}{|xy|} = ?$

□ 0; □ 1; □ -1; ■ nem létezik; □ más válasz.

2. Az $y''(x) - 2y'(x) + y(x) = e^{-x}$ differenciálegyenlet megoldásakor a próbafüggvényt $y(x) = \dots \quad (x \in \mathbb{R}, A \in \mathbb{R})$ alakban keressük.

□ Ae^{x}; ■ Ae^{-x}; □ Axe^{x}; □ Ax^2e^{x}; □ Ax^2e^{-x}; □ más válasz.

3. Tudjuk, hogy a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n(x+2)^n$ hatványsor $x = 1$ esetén konvergens. Ekkor $x = -3$ esetén a hatványsor

■ az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ együttható-sorozat választásától függetlenül konvergens;
□ az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ együttható-sorozat választásától függően lehet konvergens és divergens;
□ az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ együttható-sorozat választásától függetlenül divergens.

4. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{2^{n+1} + 3^n}{2^{2n+1}} = ?$

□ 0; □ 1; ■ 4; □ $+\infty$; □ más válasz.

Minden állításról döntse el, hogy igaz (I) vagy hamis (H)![2] **($10 \times 3 = 30$ pont)**

5. Legyenek $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan számsorozatok amelyekre teljesül, hogy a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n$ sor konvergens, és létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ és $n \geq N$ esetén $|a_n| \leq b_n$. Ekkor:

a) $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ konvergens ■ I; □ H;
b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ ■ I; □ H;
c) $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n$ abszolút konvergens. ■ I; □ H;

6. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ (azaz $\mathbb{R}^2$ minden pontjában értelmezve van, és nemnegatív értékű) folytonos függvény, amelyre $f(0,0) = 0$ teljesül.

a) Az f függvénynek lokális szélsőértéke van az origóban. ■ I; □ H;
b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$. ■ I; □ H;
c) f-nek létezik maximuma az $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\}$ halmazon. ■ I; □ H;
d) $\int\limits_0^1 \int\limits_0^x f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^x \int\limits_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. □ I; ■ H;

7. Az $y'(x) = \mathrm{sh}(x)(y(x) - 1)$ differenciálegyenlet

elsőrendű ■ I; □ H;
homogén lineáris □ I; ■ H;
szeparálható ■ I; □ H;

[1] A helyes megoldás előtti négyzetet **satírozza be**! Helyes válasz: 5 pont; helytelen vagy nem egyértelmű válasz: 0 pont.
[2] A helyes válasz előtti négyzetet **satírozza be**! Helyes válasz: 3 pont; nem egyértelmű válasz: 0 pont; helytelen válasz: -3 pont, azonban egy-egy feladat teljes pontszáma nem csökken nulla alá.

1, $x=y$ esetén $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x^2)}{|x^2|}=1$

$x=-y$ esetén $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(-x^2)}{|-x^2|}=-1$

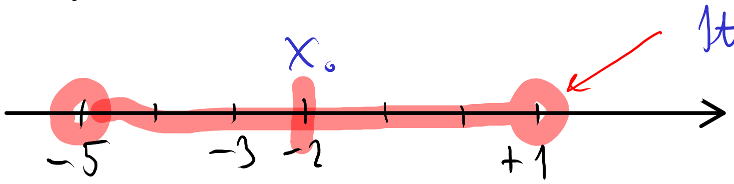
$\Rightarrow$ nem létezik a limesz

2, $\lambda^2-2\lambda+1=(\lambda-1)^2=0 \Rightarrow \lambda_{1,2}=+1 \Rightarrow y_{H,ált}(x)=C_1e^x+C_2xe^x$

Nincs külső rezonancia $\Rightarrow$ $y_{I,p}(x)=Ae^{-x}$

3, $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n(x+2)^n$; $x_0=-2$; $x-x_0=1-(-2)=3 \Rightarrow R\geq 3$

Itt biztos konvergens.



4, $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+1}+3^n}{2^{2n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{2^{n+1-(2n+1)}}_{\left(\frac{1}{2}\right)^n}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n=\underbrace{\frac{1}{1-\frac{1}{2}}}_{2}+\underbrace{\frac{1}{2}\,\frac{1}{1-3/4}}_{2}=4$$

5, a, majoráns kritérium alapján $\sum_n |a_n|$ konv. $\Rightarrow \sum_n a_n$ is konv.

b, $\sum_n a_n$ konv. $\Rightarrow a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$

c, $\forall n$: $0\leq |a_n|\leq b_n$, tehát $0\leq b_n$, tehát $b_n=|b_n|$.

6, a, $\forall x,y$-ra $f(x,y)\geq 0$, és $f(0,0)=0 \Rightarrow$ IGAZ

b, Mivel f folytonos, $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)=0$ ✓

c, Az adott halmaz korlátos és zárt, így kompakt, f folytonos, ezért Weierstrass tétele szerint a függvény felveszi szélsőértékeit a halmazon.

d, A jobb oldali kétszeres integrálnak nincs értelme, mert a külső integrál felső határa (x) a belső integrál változója.

7,

a) elsőrendű, hiszen y-nak csak első deriváltja szerepel.

b) Az egyenlet inhomogén lineáris. (Tehát nem homogén.)
Ha a jobb oldalon felbontjuk a zárójelet, látjuk, hogy a zavaró függvény -sh(x).

c) A jobb oldal egy x-től és egy y-tól függő tényező szorzata, tehát sz egyenlet szeparálható.

A β változat megoldása az α-hoz hasonló.

2024.06.04.
Analízis 2. informatikusoknak vizsga, feleletválasztós rész (50 pont)

címke névvel, Neptun kóddal

$\boldsymbol{\alpha}$ ☐, $\boldsymbol{\beta}$ ■

Válassza ki az egyetlen helyes megoldást![1] **($4 \times 5 = 20$ pont)**

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(xy)}{x|y|} = ?$

☐ 0; ☐ 1; ☐ -1; ■ nem létezik; ☐ más válasz.

2. Az $y''(x)+2y'(x)+y(x) = e^x$ differenciálegyenlet megoldásakor a próbafüggvényt $y(x) = \dots \quad (x \in \mathbb{R}, A \in \mathbb{R})$ alakban keressük.

■ Ae^x; ☐ Ae^{-x}; ☐ Axe^x; ☐ Ax^2e^x; ☐ Ax^2e^{-x}; ☐ más válasz.

3. Tudjuk, hogy a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n(x-2)^n$ hatványsor $x = 1$ esetén divergens. Ekkor $x = -2$ esetén a hatványsor

☐ az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ együttható-sorozat választásától függetlenül konvergens;
☐ az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ együttható-sorozat választásától függően lehet konvergens és divergens;
■ az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ együttható-sorozat választásától függetlenül divergens.

4. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{2^{n+2} - 3^n}{2^{2n+2}} = ?$

☐ 0; ■ 1; ☐ 4; ☐ $+\infty$; ☐ más válasz.

Minden állításról döntse el, hogy igaz (I) vagy hamis (H)![2] **($10 \times 3 = 30$ pont)**

5. Az $y'(x) = e^x(1 - y(x))^2$ differenciálegyenlet

elsőrendű ■ I; ☐ H;
lineáris ☐ I; ■ H;
szeparálható ■ I; ☐ H;

6. Legyenek $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan számsorozatok amelyekre teljesül, hogy a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n$ sor abszolút konvergens, és létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ és $n \geq N$ esetén $-b_n \leq a_n \leq b_n$. Ekkor:

a) $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ abszolút konvergens ■ I; ☐ H;
b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ ■ I; ☐ H;
c) $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n$ konvergens. ■ I; ☐ H;

7. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ (azaz $\mathbb{R}^2$ minden pontjában értelmezve van, és nemnegatív értékű) folytonos függvény, amelyre $f(0,0) = 0$ teljesül.

a) f-nek létezik minimuma az $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ halmazon. ■ I; ☐ H;
b) $\int\limits_0^1 \int\limits_0^x f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^x \int\limits_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. ☐ I; ■ H;
c) Az f függvénynek lokális szélsőértéke van az origóban. ■ I; ☐ H;
d) Létezik a $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ határérték. ■ I; ☐ H;

---

[1] A helyes megoldás előtti négyzetet **satírozza be**! Helyes válasz: 5 pont; helytelen vagy nem egyértelmű válasz: 0 pont.

[2] A helyes válasz előtti négyzetet **satírozza be**! Helyes válasz: 3 pont; nem egyértelmű válasz: 0 pont; helytelen válasz: -3 pont, azonban egy-egy feladat teljes pontszáma nem csökken nulla alá.