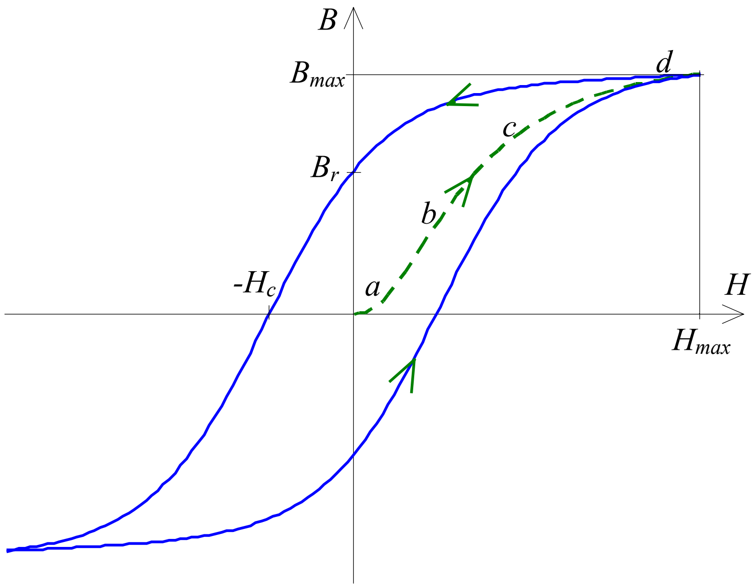
A ferromágneses anyagok jellemző tulajdonságai, a mágneses körök számítási elvei

A ferromágneses anyagok

Az egyes anyagok eltérő makroszkopikus mágneses tulajdonságot mutatnak, eltérően reagálnak a külső mágneses térre. Ez az eltérés bizonyos mikroszkopikus tulajdonságokban (az elektronhéjak felépítése, az elektronok pályamenti mozgása és spinje, illetve ezek érzékenysége a külső mágneses térre) meglévő eltérésekkel magyarázható.
A fizikában dia- para- és ferromágneses anyagokat különböztetnek meg, az elektrotechnikai gyakorlatban általában minden nem-ferromágneses anyag vákuumnak (levegőnek) tekinthető és relatív permeabilitása μ_r=1. A ferromágneses anyagok (vas, nikkel, kobalt és ötvözeteik) relatív permeabilitása a telítésig igen nagy lehet, nagyságrendje akár 10^3-10^6. Nem-ferromágneses összetevőkből is készítenek jól mágnesezhető ötvözeteket (pl. Ag-Mn-Al).
A ferromágneses anyagokat jellemző indukció-térerősség összefüggés (*B*-*H* görbe) erősen nemlineáris, ezért annak meghatározása rendszerint méréssel történik.

A mágnesezési görbe

Az ún. első mágnesezési görbe a mágneses hatásnak korábban nem kitett, vagy mágnességét teljesen elveszített anyagban mutatja az indukció változását a térerősség lassú növelésekor.



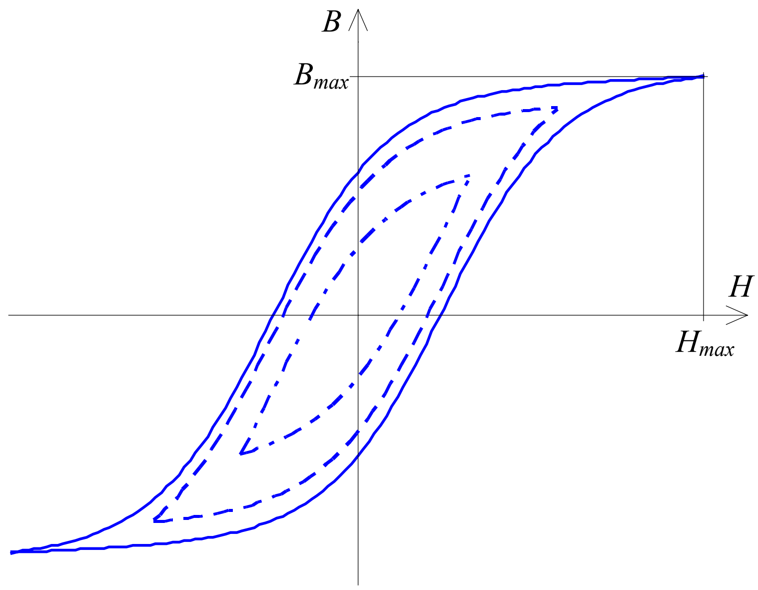
A mágnesezési görbe tipikus alakja

A görbének 4 jellegzetes része van:

- *a* - induló szakasz,
- *b* - lineáris szakasz,
- *c* - könyök szakasz,
- *d* - telítési szakasz.

A telítés elérése után, a térerősség lassú csökkentésénél a görbe leszálló ága az első mágnesezési görbe felett halad *B* változása késik *H* változásához képest (hiszterézis=késlekedés). *H*=0-nál egy remanens indukció $B_r > 0$ érzékelhető, amit csak ellenkező előjelű $-H_c$ koercitív térerősséggel lehet megszüntetni. Az ábrából láthatóan a permeabilitás *B*/*H* nagysága nem egyértékű, változása nemlineáris, függ a mágneses „előélettől”, a *H* térerősség megelőző érté-

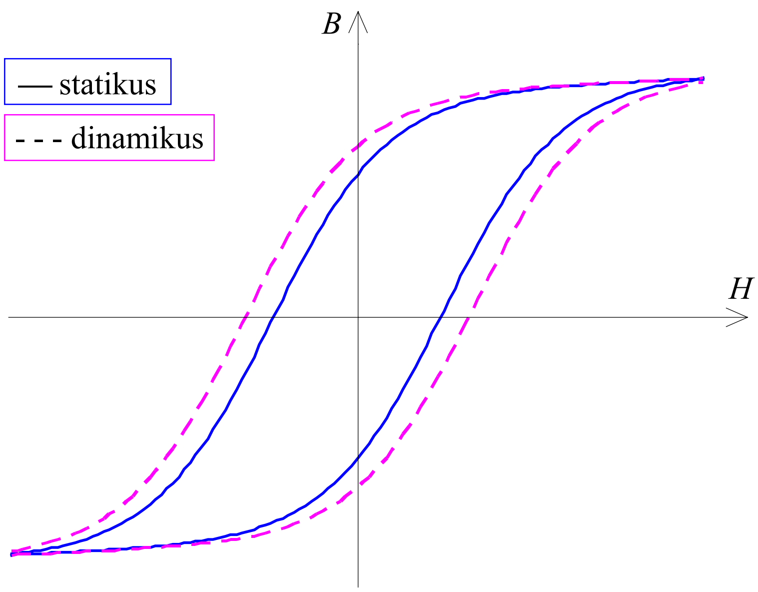
kétől, a változás sebességétől, irányától és mértékétől. A B_{max} telítési indukció feletti változásokra μ_r~1.
A legnagyobb hiszterézis görbe a telítési indukcióval meghatározott B_{max} és H_{max} csúcsértékekhez tartozik, a kisebb csúcsértékek hiszterézise ezen legnagyobb görbén belül helyezkedik el. Lassú változásnál statikus hiszterézis görbéről beszélünk.



A telítési indukciónál kisebb csúcsértékek hiszterézisei

Dinamikus hiszterézis görbe

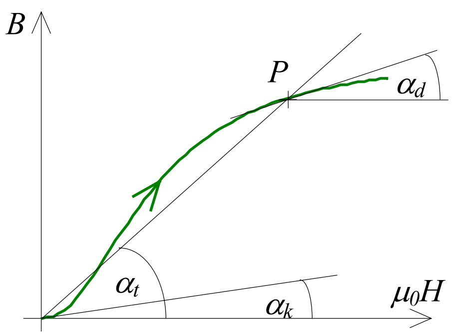
Hálózati vagy nagyobb frekvenciájú váltakozó árammal létrehozott váltakozó mágneses tér esetén a munkapont minden periódus alatt egy teljes hiszterézis görbét ír le. A változó fluxus hatására a ferromágneses anyagban feszültség indukálódik, amely ún. örvényáramot hoz létre. Lenz törvénye értelmében az örvényáram keltette mágneses tér tovább késlelteti a fluxusváltozást, ezért a hiszterézis görbe a frekvencia növekedésével „kövéredik” a statikushoz képest.



Statikus és dinamikus hiszterézis görbe

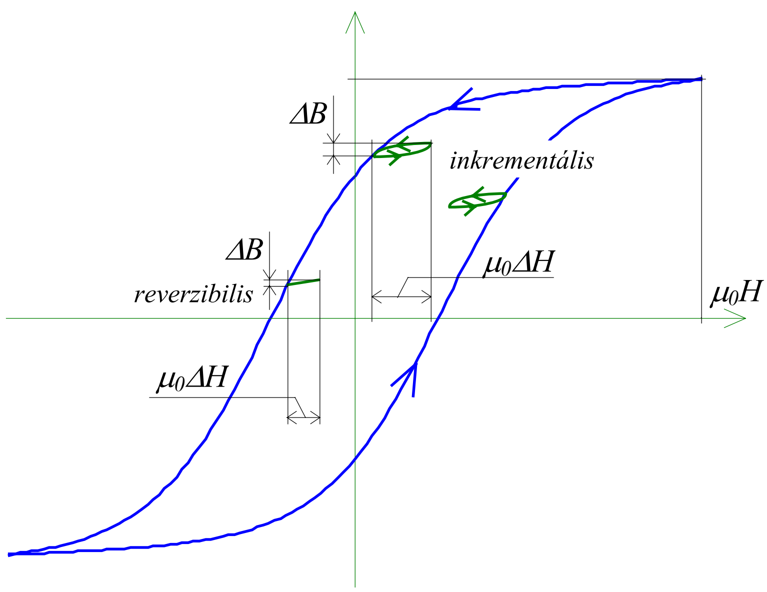
Relatív permeabilitás

A mágnesezési görbe minden munkapontjában meghatározható a $\mu = \frac{B}{H}$ abszolút és a $\mu_r = \frac{B}{\mu_0 H}$ relatív permeabilitás. Az erős nemlinearitás miatt a számításhoz többféle egyszerűsítést használnak:



A teljes, a differenciális és a kezdeti permeabilitás értelmezése

- *teljes (közönséges) permeabilitás*: az első mágnesezési görbéből határozzák meg, az origóból a munkaponthoz húzott egyenes iránytangense, az ábra szerinti *P* ponthoz $\mu_r = \frac{B}{\mu_0 H} = tg\alpha_t$. Ez a leggyakrabban használt egyértékű közelítés.
- *kezdeti permeabilitás*: az első mágnesezési görbe kezdeti szakaszának meredeksége $\mu_{rk}=tg\alpha_k$,

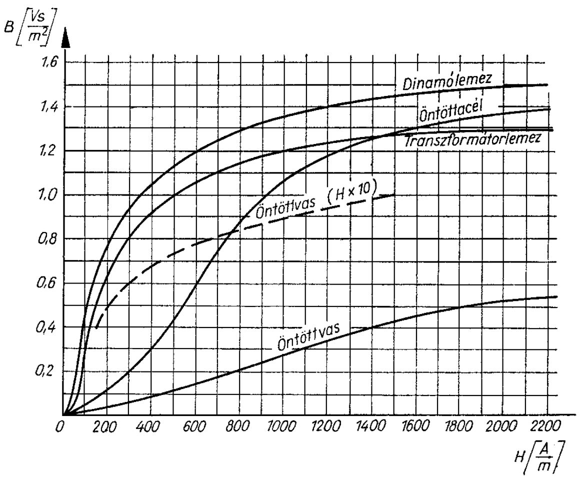


Az inkrementális és a reverzibilis permeabilitás értelmezése

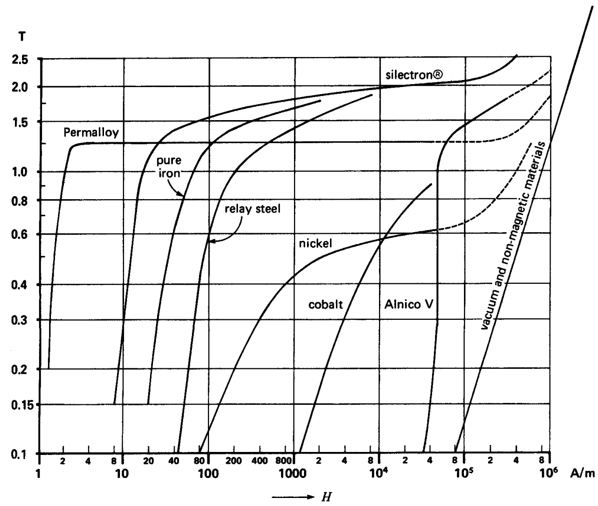
- *differenciális permeabilitás*: a mágnesezési görbe (pl. első mágnesezési görbe) munkaponti meredeksége, az ábra szerinti *P* ponthoz $\mu_{rdiff} = \frac{dB}{\mu_0 dH} = tg\alpha_d$,

- *inkrementális* *permeabilitás*: adott munkapont körüli ciklikus kis változások hatására kialakuló elemi hiszterézisre jellemző érték $\mu_{rink} = \dfrac{\Delta B}{\mu_0 \Delta H}$,
- *reverzibilis* *permeabilitás*: megegyezik az inkrementális permeabilitással, ha a munkapont körüli változás olyan kis mértékű, hogy az elemi hiszterézis egy vonallá olvad össze.

Az erősáramú gyakorlatban legtöbbször a teljes (közönséges) permeabilitást használják.



Néhány ferromágneses anyag (első) mágnesezési görbéje

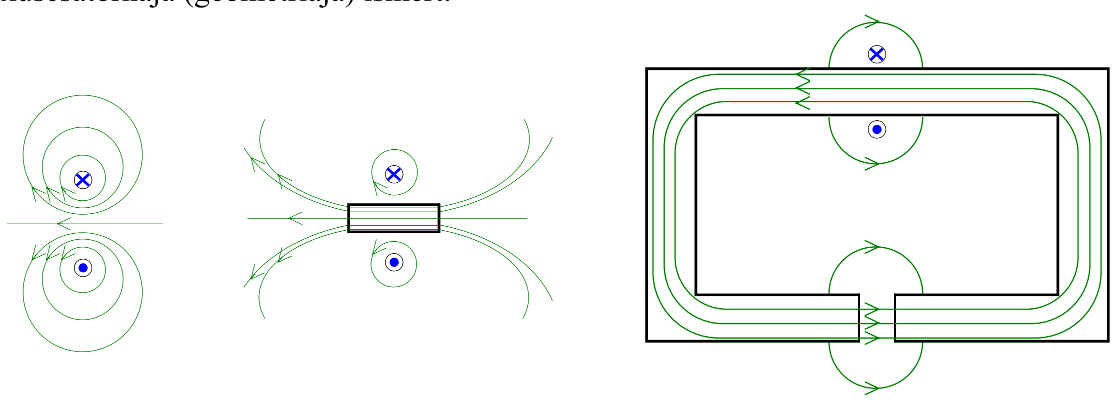


.Ferromágneses és nem ferromágneses anyagok (első) mágnesezési görbéje

A téresősség tengely logaritmikus ábrázolásánál jól látható, hogy telített állapotban a ferromágneses anyagok első mágnesezési görbéje a vákuum egyeneséhez mint aszimptotához tart.

A mágneses körök számítása

Mágneses kör a mágneses tér olyan zárt része (fluxuscsatornája), amelyben a fluxus állandónak tekinthető, belőle indukcióvonalak nem lépnek ki. Lényegében minden zárt indukcióvonal mágneses kör. A mágneses körökben általában ferromágneses anyagok terelik az indukcióvonalakat a tér kijelölt részébe. Egyszerűen azok a körök számíthatók, amelyek fluxuscsatornája (geometriája) ismert.



Néhány mágneses kör illusztrációja

Egy összetett, eltérő geometriájú és tulajdonságú szakaszokból álló mágneses körben az előírt fluxus létrehozásához szükséges gerjesztés könnyen, fordítva - az eredő gerjesztésből valamelyik szakasz fluxusa - csak bonyolultan számítható a mágnesezési görbe nemlinearitása miatt.
A szórt erővonalakat számítással vagy becsléssel veszik tekintetbe, gyakran el is hanyagolják.
A mágneses körök mentén rendszerint különböző tulajdonságú (permeabilitású és geometriájú) anyagok vannak és lehetnek elágazások is.
A gerjesztési törvény időben állandó térre és lassú változások esetére érvényes, egyenáramra és váltakozó áram pillanatértékére alkalmazható. Gyorsan változó fluxusnál figyelembe kell venni az indukált feszültség hatását is.

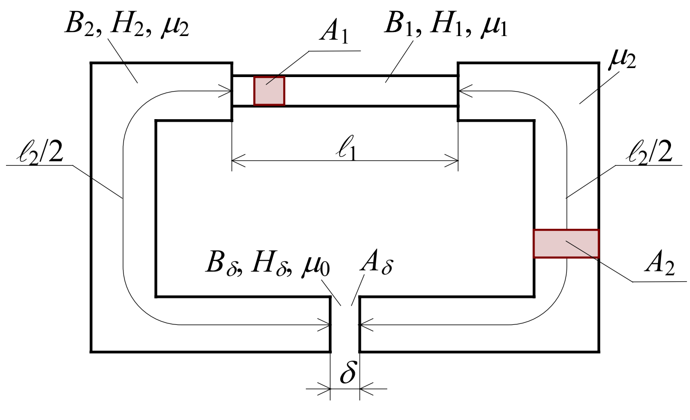
Soros mágneses körök

A soros mágneses körök rendszerint egymást követő különböző keresztmetszetű és különböző anyagú szakaszokból állnak, az egyes szakaszokon belül a mágneses tér jellemzőit állandónak tekintik.

Adott fluxus létrehozásához és fenntartásához szükséges gerjesztés számítása

Legyen a vizsgált kör mentén (vagy annak egy szakaszán) a fluxus Φ adott, előírt és a szórás legyen elhanyagolható $\Phi_s=0$.

Ekkor a légrés indukciója $B_\delta = \dfrac{\Phi}{A_\delta}$, a további, homogénnek tekinthető ferromágneses szakaszok indukciója $B_1 = \dfrac{\Phi}{A_1}$, $B_2 = \dfrac{\Phi}{A_2}$ stb.



Soros mágneses kör vázlata

A légrés térerőssége könnyen számítható, $H_\delta = \dfrac{B_\delta}{\mu_0}$, míg az egyes ferromágneses szakaszok H_1, H_2 stb. térerőssége vagy a μ_{r1} és a μ_{r2} stb. relatív permeabilitás rendszerint csak a mágnesezési görbéből olvasható le ($B_i \rightarrow H_i$).

$$H_1 = f(B_1) = \frac{B_1}{\mu_0\mu_{r1}} = \frac{\Phi}{\mu_0\mu_{r1}A_1} \text{ és } H_2 = f(B_1) = \frac{B_2}{\mu_0\mu_{r2}} = \frac{\Phi}{\mu_0\mu_{r2}A_2}.$$

A gerjesztési törvény alkalmazásával a kör eredő gerjesztése $\mu_i=\mu_0\mu_{ri}$ jelöléssel:

$$\Theta = \sum_i \Theta_i = \sum_i H_i\ell_i = \frac{B_\delta}{\mu_0}\delta + H_1\ell_1 + H_2\ell_2 + \ldots = \sum_i \frac{\Phi}{\mu_i A_i}\ell_i = \Phi\sum_i \frac{\ell_i}{\mu_i A_i},$$

mivel az összegezésnél Φ kiemelhető, ha állandó. Az összefüggés úgy értelmezhető, hogy az eredő gerjesztés a mágneses kör egyes szakaszaira jutó gerjesztések összege.

Azokban az esetekben, amikor a légrésre esik a gerjesztés legnagyobb része (mert $\mu_{vas} \gg \mu_0$, ezért $H_\delta \gg H_{vas}$), a kör ferromágneses (vas) része gyakran elhanyagolható.

Példa

Legyen $B_\delta = B_{vas} = 1$T (a szórás elhanyagolható), $\delta = 1$ mm, $\ell_{vas} = 1$ m, a mágnesezési görbéből $\mu_{rvas} = 10^6$.

A térerősség a légrésben:

$$H_\delta = \frac{B_\delta}{\mu_0} = \frac{B_\delta}{1{,}256 \cdot 10^{-6}} = 0{,}8 \cdot 10^6 B_\delta = 0{,}8 \cdot 10^6 \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}},$$

a vasban: $H_{vas} = \dfrac{B_{vas}}{\mu_0 \mu_{rvas}} = \dfrac{B_\delta}{\mu_0 \mu_{rvas}} = 0{,}8 B_\delta = 0{,}8 \dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}.$

A teljes gerjesztés a vas és a légrés gerjesztés-igényének összege: $\Theta = \Theta_{vas} + \Theta_\delta$.

A vasra jutó gerjesztés $\Theta_{vas} = H_{vas} \ell_{vas} = 0{,}8$ A, a légrés gerjesztése $\Theta_\delta = H_\delta \ell_\delta = 800$ A, a teljes gerjesztés $\Theta = 800{,}8$ A (a vas gerjesztés-szükséglete az eredő gerjesztés 0,1%-a).

Egy N menetszámú tekercsnél a szükséges áram: $I = \dfrac{\Theta}{N} = \dfrac{800{,}8}{\mathrm{N}}(\mathrm{A})$.

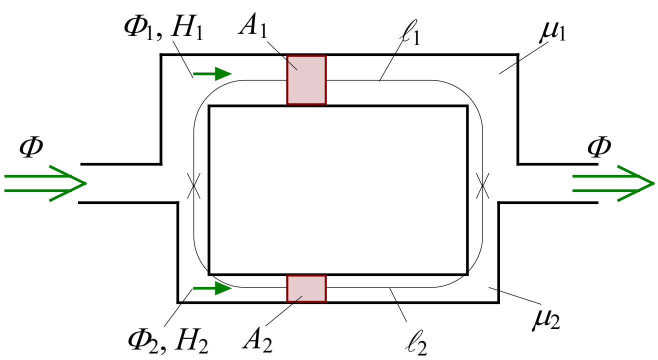
<u>Kisebb permeabilitású</u> vasnál nő a vas gerjesztés-szükséglete és akkor már nem elhanyagolható. Pl. $\mu_{rvas} = 10^3$-értéknél $H_{vas} = 800 \dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$, $\Theta_{vas} = H_{vas} \ell_{vas} = 800$ A, az eredő gerjesztés ($\Theta = 1600$ A) 50%-a.

Fordított feladatnál, amikor adott az I áram (gerjesztés) és a kialakuló fluxus vagy indukció a kérdés, az jelent nehézséget, hogy a gerjesztés eloszlása az egyes szakaszokra a permeabilitások arányától függ, aminek meghatározásához viszont a térerősség ismerete lenne szükséges. Ilyenkor egy célszerű megoldás különböző felvett fluxusértékekhez a gerjesztés vagy az áram meghatározása, felrajzolása és a kapott $\Phi(\Theta)$ vagy $\Phi(I)$ görbéből a feladat megoldásának leolvasása vagy számítása.

<u>Párhuzamos mágneses körök</u>

Az indukcióvonalak zártsága miatt a teljes belépő- és a teljes kilépő fluxus azonos:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2.$$



Párhuzamos mágneses kör vázlata

A gerjesztési törvény alapján az ℓ_1-ℓ_2 zárt görbére, ha a görbe nem fog körbe áramot:

$H_1 \ell_1 - H_2 \ell_2 = 0$, ebből $H_1 \ell_1 = H_2 \ell_2 = \Theta_p$,

vagyis a párhuzamos szakaszokra jutó Θ_p gerjesztés azonos. Behelyettesítve a H_1 és H_2 értékeket:

$\Theta_p = \dfrac{\Phi_1}{\mu_1 A_1}\ell_1 = \dfrac{\Phi_2}{\mu_2 A_2}\ell_2$, amiből $\Phi_1 = \Theta_p \dfrac{\mu_1 A_1}{\ell_1}$, illetve $\Phi_2 = \Theta_p \dfrac{\mu_2 A_2}{\ell_2}$.

Ha a párhuzamos ágakat egyetlen szakasszal helyettesítjük, annak a teljes Φ fluxust kell vezetnie Θ_p gerjesztés mellett:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = \Theta_p\left(\frac{\mu_1 A_1}{\ell_1} + \frac{\mu_2 A_2}{\ell_2}\right) = \Theta_p \sum_i \frac{\mu_i A_i}{\ell_i}.$$

A „mágneses Ohm-törvény”

A gerjesztési törvény $\Theta = \oint \overline{H} d\overline{\ell}$ alakját módosítva – formai hasonlóságok miatt – az összetett mágneses körök egyenleteire kapott összefüggést mágneses Ohm-törvénynek is nevezik.

$H = \dfrac{B}{\mu}$ és $B = \dfrac{\Phi}{A}$ helyettesítéssel a térerősség vonalmenti integráljára és a soros mágneses kör eredő gerjesztésére kapott összefüggés

$$\Theta = \sum_i \frac{\Phi}{\mu_i A_i}\ell_i = \Phi \sum_i \frac{\ell_i}{\mu_i A_i}$$

felépítése emlékeztet a véges ellenállással bíró vezető szakaszok soros eredő villamos feszültségének alábbi képletre:

$$U = \sum_i \frac{I}{\gamma_i A_i}\ell_i = I \sum_i \frac{\ell_i}{\gamma_i A_i} = I \sum_i R_i,$$

ahol $\gamma = \dfrac{1}{\rho}$ – a fajlagos villamos vezetőképesség, a ρ fajlagos ellenállás reciproka.

A soros mágneses kör eredő gerjesztése ennek alapján így is felírható:

$$U_m = \Phi \sum_i R_{m\,i},$$

ahol $U_m = \Theta$ – az eredő mágneses feszültség (gerjesztés),

$R_{m\,i} = \dfrac{\ell_i}{\mu_i A_i}$ – az i-dik szakasz mágneses ellenállása (reluktancia). A soros szakaszok eredő mágneses ellenállása: $R_m = \sum_i R_{m\,i}$, ezzel $U_m = \Phi R_m$.

Az egyes mennyiségek mértékegysége: $[U_m]$= A, $[\Phi]$= Vs=Wb, $\left[R_m\right] = \dfrac{A}{Vs} = \dfrac{A}{Wb}$.

Minél nagyobb a permeabilitás, annál kisebb a mágneses kör adott szakaszának mágneses ellenállása és azonos fluxus esetére a gerjesztés-szükséglete, mágneses feszültsége.

A soros mágneses kör egyes szakaszainak gerjesztés-szükséglete a szakasz mágneses feszültségének is nevezhető, az i-dik szakaszra:

$$U_{m\,i} = \Phi \frac{\ell_i}{\mu_i A_i}.$$

Ennek alapján a gerjesztési törvény úgy is megfogalmazható, hogy egy felületet határoló zárt görbe mentén a mágneses feszültségek eredője a kör gerjesztése $\Theta = \sum_i U_{mi}$.

A párhuzamos mágneses kör eredő fluxusára kapott

$$\Phi = \Theta_p \sum_i \frac{\mu_i A_i}{\ell_i}$$

összefüggés az előbbiek szerint

$$\Phi = U_{m\,p} \sum_i \Lambda_i \,,$$

alakban is írható, ahol U_{mp} – a párhuzamos szakaszok mágneses feszültsége, $\Lambda_i = \frac{\mu_i A_i}{\ell_i} = \frac{1}{R_{m\,i}}$ – az i-dik szakasz mágneses vezetőképessége (permeancia), a mágneses ellenállás reciproka, mértékegysége $\left[\Lambda_m\right] = \frac{Vs}{A} = \frac{Wb}{A}$.

A párhuzamos szakaszok eredő mágneses vezetése: $\Lambda_m = \sum_i \Lambda_{m\,i}$, amivel $\Phi = U_m \Lambda_m = \Theta \Lambda_m$.

A fenti analógia alapján felrajzolhatók a mágneses körök helyettesítő villamos áramkörei. Az ilyen helyettesítéssel azonban nagy körültekintéssel kell bánni, mivel a hasonlóság csak formai, ugyanis a fizikai jelenségek alapvetően eltérőek:

a) Az I villamos áram a töltések (töltéshordozó részecskék) valóságos fizikai áramlása, a Φ mágneses fluxus pedig a tér, az anyag állapotát jellemzi, nem jár semmilyen részecskemozgással.

b) A villamos áram fenntartása veszteséggel jár (az állandó egyenáramé is), az állandó fluxus fenntartásához nincs szükség energiára (létrehozásához, megváltoztatásához igen).

c) A mágneses feszültség zárt görbe menti integrálja $\oint \overline{H} d\overline{\ell}$ csak akkor zérus, ha nem fog körül áramot ΣI=0, a villamos feszültség zárt görbe menti integrálja $\oint \overline{E} d\overline{\ell}$ akkor zérus, ha nem fog körül változó fluxust $\frac{d\Phi}{dt} = 0$.

d) A γ villamos vezetőképesség – állandó hőmérsékleten – rendszerint állandó, nem függ az áramtól, a ferromágneses anyagok μ permeabilitása viszont a fluxussal (indukcióval) jelentősen változik.

e) A villamos vezető és a villamos szigetelőanyagok vezetőképessége közötti arány 10^{20} nagyságrendű, ezért a szigetelőben folyó szivárgási áram rendszerint elhanyagolható. A mágneses vezető és „mágneses szigetelőanyagok” esetén ez az arány 10^3-10^6, ezért a szórt fluxusokat, azok hatását gyakran figyelembe kell venni.

f) A szuperpozíció módszere ferromágneses anyagot tartalmazó körökben nem használható, általában csak a gerjesztések összegezhetők, az egyes gerjesztések által létrehozott indukciók nem. A lineárisnak tekinthető villamos áramkörök viszont szuperpozícióval számíthatók.

Önindukció, önindukciós tényező

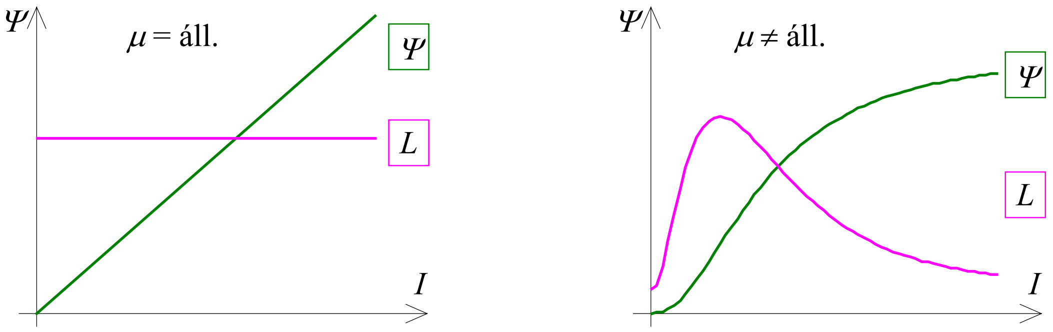
Az indukció törvény értelmében egy vezetőben vagy tekercsben $u_i(t) = \frac{d\psi(t)}{dt}$ indukált feszültség keletkezik. Ez arra az esetre is igaz, ha a fluxusváltozást a vezetőben vagy tekercsben magában folyó (saját) áram megváltozása idézi elő. A tekercs áramának változása a tekercsben magában indukál feszültséget: önindukció. Az indukált feszültség – Lenz törvénye szerint – gátolja az indukciót okozó folyamatot, tehát az áramváltozás ellen hat, azt akadályozza.

Az indukált feszültség általánosan, a tekercsfluxus változásából, mivel $\psi = \psi\big(i(t)\big)$:

$$u_i(t) = \frac{d\psi\big(i(t)\big)}{dt} = \frac{d\psi(t)}{di(t)} \frac{di(t)}{dt}.$$

A tekercsfluxus és az áram közötti kapcsolatot az $L=\dfrac{d\psi(t)}{di(t)}$ induktivitás vagy önindukciós tényező teremti meg, aminek SI mértékegysége Henry[1] tiszteletére

$$[L]=\mathrm{H}=\mathrm{henry}=\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{A}}=\Omega\mathrm{s}\,.$$



Az induktivitás áramfüggése, ha a Ψ(I) mágnesezési görbe
lineáris *nemlineáris*

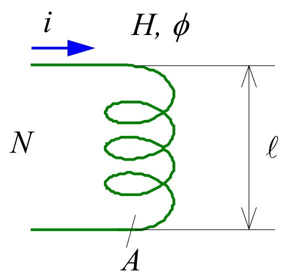
Ezzel az önindukciós feszültség kifejezése: $u_i(t)=L\dfrac{di(t)}{dt}$. Az induktivitás segítségével a mágneses tér állapotváltozását egy villamos áramkör áramváltozására vezetjük vissza.

Nem ferromágneses közegben a $\psi(i)$ összefüggés lineáris, így $L=\dfrac{d\psi(t)}{di(t)}=\dfrac{\Psi}{I}=$ áll., ferromágneses közegben $L\neq$áll.

Vasmentes szolenoid homogén terére a gerjesztési törvény szerint, mivel a tekercsen kívüli tér elhanyagolható:

$$NI=H\ell=\frac{\Phi}{\mu_0 A}\ell=\frac{N\Phi}{N\mu_0 A}\ell=\frac{\Psi}{N\mu_0 A}\ell\text{, amiből } L=\frac{\Psi}{I}=N^2\mu_0\frac{A}{\ell}=N^2\Lambda\,.$$

Az induktivitás a tekercs menetszámától, geometriájától és a kitöltő közeg anyagától függ, ferromágneses közegben áramfüggő.



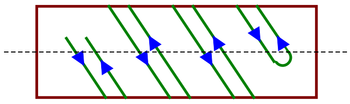
A szolenoid induktivitásának közelítő számítása

N^2 értelmezése: egyrészt az N menetben folyó I áram a gerjesztési törvény szerint N-szeres mágneses teret hoz létre, másrészt az N menetben az indukció törvény alapján N-szeres feszültség indukálódik.

Az induktivitás $L=\dfrac{d\psi}{di}$ változása a mágnesezési görbe alapján meghatározható.

[1] Henry, Joseph (1797-1878) amerikai fizikus

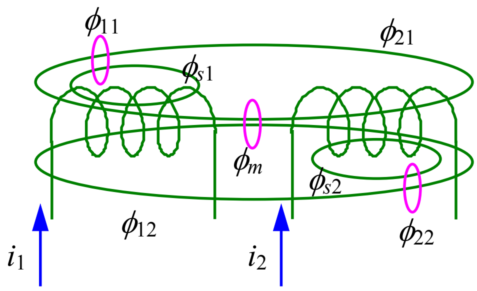
Induktivitás-szegény áramköri elemet (pl. dobra tekercselt huzalból készült ellenállást) ún. bifiláris (filum = szál, fonál) tekercs-kialakítással lehet előállítani. Ennél a megoldásnál tulajdonképpen két tekercsünk van, az ellentétes irányban gerjesztett fluxus miatt a két tekercs lerontja egymás mágneses terét. Az eredő kis (ideális esetben zérus) fluxusnak megfelelően $d\Psi$ kicsi (az u_i önindukciós feszültség kicsi), tehát az L induktivitás is kicsi.



Induktivitás-szegény tekercselés vázlata

Csatolt tekercsek fluxusának felbontása összetevőkre

Csatolt tekercsekről akkor beszélünk, ha az egyes tekercsek (legegyszerűbb esetben 2 tekercs) egymás mágneses terében helyezkednek el, és egymás terének hatása nem elhanyagolható. Alkalmazástól függően lehet cél a minél jobb csatolás (pl. energia- vagy jelátvitelnél), illetve a csatolás elkerülése (pl. az elektromágneses zavarcsökkentés érdekében).



A fluxus felbontása összetevőkre

A következőkben a kettős index első tagja jelöli azt a tekercset, amelyikre a második taggal jelölt tekercs áramának mágneses tere hatást fejt ki.

Az egyetlen valóságos (eredő) mágneses tér a rendszer geometriai kialakításától függően különböző mértékben kapcsolódhat az egyes tekercsekkel. A szemléltetés és az egyszerűbb tárgyalás érdekében a teret reprezentáló fluxust (2 tekercs esetében) 4 összetevőre bontják:

- az i_1 áram által az 1. tekercsben létrehozott ϕ_{11} fluxus egy része kapcsolódik a 2. tekerccsel is (ϕ_{21}), másik része – az első tekercs szórt fluxusa – csak az 1-vel (ϕ_{s1}),

$$\phi_{11}=\phi_{21}+\phi_{s1}.$$

- az i_2 áram által a 2. tekercsben létrehozott ϕ_{22} fluxus egy része kapcsolódik az 1. tekerccsel is (ϕ_{12}), másik része – a második tekercs szórt fluxusa – csak a 2-kal (ϕ_{s2}),

$$\phi_{22}=\phi_{12}+\phi_{s2}.$$

A két áram (i_1 és i_2) által létrehozott fluxus komponensek eredője:

$$\phi=\phi_{11}+\phi_{22}=\phi_{21}+\phi_{s1}+\phi_{12}+\phi_{s2}.$$

Ezeket a komponenseket kétféle módon szokták csoportosítani.

A csatolt körös elmélet „eredet” szerint választja szét az összetevőket, az egyes tekercsek eredő fluxusa a teljes „saját” fluxus és a másik tekercs csatlakozó fluxusának összege:

az 1. tekerccsel kapcsolódó összes fluxus

$$\phi_1=\phi_{11}+\phi_{12}=\phi_{21}+\phi_{s1}+\phi_{12},$$

a 2. tekerccsel kapcsolódó összes fluxus

$$\phi_2=\phi_{22}+\phi_{21}=\phi_{12}+\phi_{s2}+\phi_{21}.$$

A térelmélet „funkció” szerint választja szét az összetevőket, az egyes tekercsek eredő fluxusa a közös (hasznos, fő) ϕ_m fluxus és a saját szórt fluxus összege:
az 1. tekerccsel kapcsolódó összes fluxus

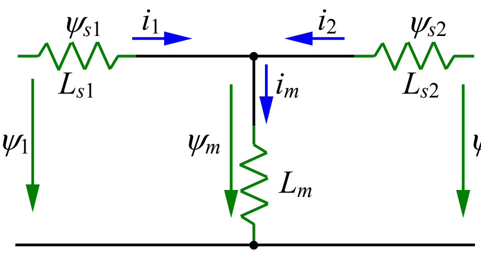
$$\phi_1=\phi_m+\phi_{s1}=\phi_{21}+\phi_{12}+\phi_{s1},$$

a 2. tekerccsel kapcsolódó összes fluxus

$$\phi_2=\phi_m+\phi_{s2}=\phi_{12}+\phi_{21}+\phi_{s2}.$$

A teljes fluxus természetesen mindkét értelmezés szerint azonos.
A közös ϕ_m fluxusnak két összetevője van: $\phi_{m1}=\phi_{21}$ és $\phi_{m2}=\phi_{12}$, így $\phi_m=\phi_{m1}+\phi_{m2}=\phi_{21}+\phi_{12}$.
A villamos gépeket (pl. a transzformátorokat, aszinkron gépeket) rendszerint térelméleti megközelítéssel tárgyalják, ennek megfelelő a fluxusokra vonatkozó helyettesítő áramkör is, amelyben az egyes fluxusösszetevőket (a tekercsfluxus-összetevőket) az áramok egy-egy induktivitáson hozzák létre: a szórt fluxusokat a szórási, a főfluxust a főmező induktivitáson,

$$\psi_{s1}=i_1L_{s1} \qquad \psi_{s2}= i_2L_{s2} \qquad \psi_{m1}=i_1L_m \qquad \psi_{m2}=i_2L_m \qquad \psi_m=\psi_{m1}+\psi_{m2} =(i_1+ i_2)L_m=i_mL_m.$$



A térelméti felbontást tükröző helyettesítő áramkör

Csatolási és szórási tényező
A mágneses kölcsönhatást kifejező k csatolási (vagy kapcsolódási) tényező úgy értelmezhető, hogy az i_1 áram által az 1. tekercsben létrehozott ϕ_{11} fluxus mekkora része kapcsolódik a 2. tekerccsel $k_1=\dfrac{\phi_{21}}{\phi_{11}}$, illetve fordítva, az i_2 áram által a 2. tekercsben létrehozott ϕ_{22} fluxus mekkora része kapcsolódik az 1. tekerccsel $k_2=\dfrac{\phi_{12}}{\phi_{22}}$.

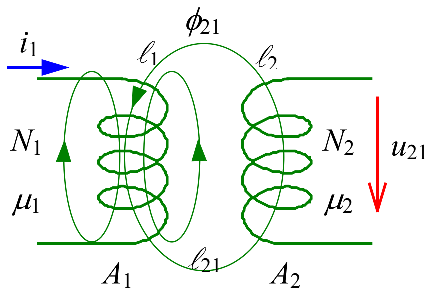
A σ szórási tényező azt fejezi ki, hogy pl. az i_1 áram által az 1. tekercsben létrehozott ϕ_{11} fluxus mekkora része nem kapcsolódik a 2. tekerccsel, így a csatolási tényező komplementuma.
A szórási és a csatolási tényezők kapcsolata:

$$\sigma_1=\frac{\phi_{s1}}{\phi_{11}}=\frac{\phi_{11}-\phi_{21}}{\phi_{11}}=1-\frac{\phi_{21}}{\phi_{11}}=1-k_1 \text{ és } \sigma_2=\frac{\phi_{s2}}{\phi_{22}}=\frac{\phi_{22}-\phi_{12}}{\phi_{22}}=1-k_2.$$

(A szakirodalomban a csatolási- és a szórási tényező más meghatározása is előfordul.)

A kölcsönös indukció
Az előzőek szerint, ha két tekercs egymás közelében helyezkedik el, akkor az első árama által létrehozott fluxus a második tekerccsel (vagy annak egy részével) is kapcsolódik. Az első (primer) tekercs $i_1(t)$ áramának megváltozásakor a második (szekunder) tekercs vezetőivel kapcsolódó $\phi_{21}(t)$ fluxus megváltozása feszültséget indukál a második tekercsben. A nyitott szekunder tekercsben indukált feszültség:

$$u_{21}(t)=\frac{d\Psi_{21}(t)}{dt}=\frac{d\Psi_{21}(t)}{di_1(t)}\frac{di(t)_1}{dt}.$$



Csatolt tekercsek mágneses terének összetevői

A $\frac{d\psi_{21}}{di_1}$ deriváltat kölcsönös indukciós tényezőnek vagy kölcsönös induktivitásnak nevezik, jelölése M_{21} vagy L_{21}, SI mértékegysége megegyezően az önindukciós tényező mértékegységével: [M]=H (henry). A kölcsönös indukciós tényező a két tekercs kialakításától, egymáshoz képesti elhelyezkedésétől, menetszámától és a kitöltő közeg anyagától függ. Állandó permeabilitás esetén (pl. vasmentes közegben), állandósult állapotban a kölcsönös induktivitás állandó $M_{21} = \frac{\Psi_{21}}{I_1}$. A gerjesztési törvényt alkalmazva a két tekercsre, mint szolenoidokra a ϕ_{21} által kijelölt fluxuscsatorna mentén, $\ell_{21}=\ell_1+\ell_2$ közelítéssel:

$$\Theta_1 = N_1 i_1 = \frac{\phi_{21}}{A_1\mu_1}\ell_1 + \frac{\phi_{21}}{A_2\mu_2}\ell_2 = \phi_{21}\left(\frac{\ell_1}{A_1\mu_1} + \frac{\ell_2}{A_2\mu_2}\right) = \phi_{21}R_{m21},$$

$$\phi_{21} = \frac{\Theta_1}{R_{m21}} = \frac{\Theta_1}{\frac{\ell_1}{A_1\mu_1} + \frac{\ell_2}{A_2\mu_2}} = \Theta_1\Lambda_{21} = N_1 i_1 \Lambda_{21},$$

$\psi_{21}=N_2\phi_{21}=N_1N_2i_1\Lambda_{21}$, amiből $M_{21} = \frac{\psi_{21}}{i_1} = N_1N_2\Lambda_{21}$.

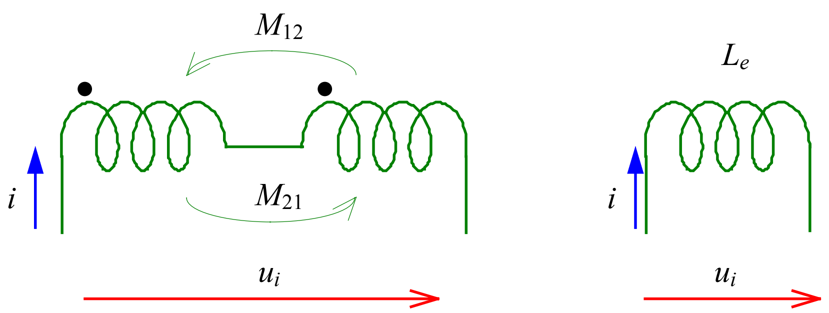
Azért a két tekercs menetszámának szorzata szerepel M_{21} képletében, mert N_1 menetek mágneseznek, a feszültség pedig N_2 menetekben indukálódik.
A kapcsolat fordítva is fennáll, a második tekercs gerjesztésekor az elsőben indukálódik feszültség.
Izotrop közegben $M_{12}=M_{21}$, mivel $\Lambda_{12}=\Lambda_{21}$.
A második tekercsben indukálódó $u_{i21}(t)$ feszültség:

$$u_{i21} = \frac{d\psi_{21}}{dt} = M_{21}\frac{di_1}{dt},$$

szinusz függvény szerint változó áramnál, lineáris esetben $U_{i21eff}= X_{21}I_{1eff}$. Ebből $X_{21}=2\pi f M_{21}$ helyettesítéssel a kölcsönös indukciós tényező $M_{21} = \frac{1}{2\pi f}\frac{U_{i21eff}}{I_{1eff}}$, ami méréssel is meghatározható az U_{i21eff} indukált feszültségből és az I_{1eff} gerjesztő áramból.

Csatolt tekercsek soros kapcsolása
A soros kapcsolás miatt egyetlen i áram folyik. Tételezzük fel, hogy az eredő ellenállás elhanyagolható az induktivitások mellett, $R\approx 0$.
Amennyiben a két tekercs fluxusa egymást erősíti, az eredő indukált feszültség az ön- és kölcsönös indukált feszültségek összege:

$$u_i = L_1\frac{di}{dt} + M_{12}\frac{di}{dt} + L_2\frac{di}{dt} + M_{21}\frac{di}{dt} = \left(L_1 + L_2 + M_{12} + M_{21}\right)\frac{di}{dt} = L_e\frac{di}{dt},$$



Csatolt tekercsek egyirányú soros kapcsolása

L_e – az eredő egyenértékű induktivitás.
Ha a két tekercs menetszáma N_1 és N_2 megegyezik, továbbá $M_{12}=M_{21}=M$, akkor az eredő induktivitás $L_e=L_1+L_2+2M$, csatolás hiányában ($M_{12}=M_{21}=0$) $L_e=L_1+L_2$.
<u>Szoros csatolásnál</u> $\sigma=0$, $k=1$.
$\phi_{21}=\phi_{11}$,

$$\left.\begin{aligned} \psi_{11} &= N_1\phi_{11} \quad\rightarrow\quad L_1 = \frac{\psi_{11}}{i_1} = N_1\frac{\phi_{11}}{i_1} \\ \psi_{21} &= N_2\phi_{11} \quad\rightarrow\quad M_{21} = \frac{\psi_{21}}{i_1} = N_2\frac{\phi_{11}}{i_1} \end{aligned}\right\} \quad M_{21} = \frac{N_2}{N_1}L_1$$

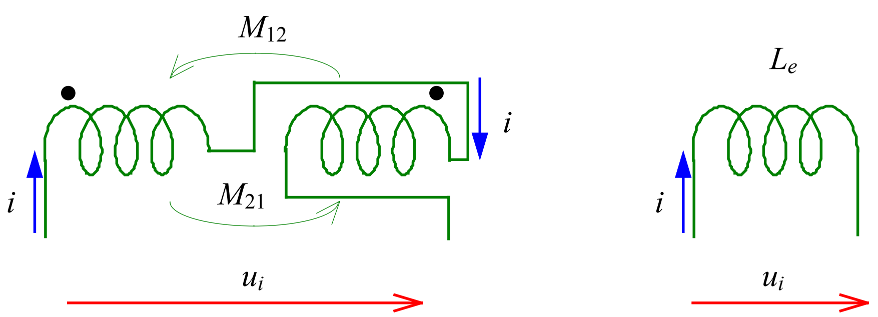
$$M_{12} = \frac{N_1}{N_2}L_2$$

$$L_e = L_1\left(1+\frac{N_2}{N_1}\right) + L_2\left(1+\frac{N_1}{N_2}\right)$$

Ha $M_{12}=M_{21}$, akkor $L_1\frac{N_2}{N_1} = L_2\frac{N_1}{N_2}$, vagy $L_1 = L_2\frac{N_2^2}{N_1^2}$

Ezzel $L_e = L_1\left(1+2\frac{N_2}{N_1}+\frac{N_2^2}{N_1^2}\right)$

Szoros csatolásnál, ha a két tekercs menetszáma azonos $L_1=L_2=M_{12}=M_{21}=L$, így L_e=4L, csatolás hiányában $M_{12}=M_{21}=0$ és $L_e=2L$.



Csatolt tekercsek soros szembe kapcsolása

<u>Szembe kapcsoláskor</u> a kölcsönös fluxusok indukáló hatása ellentétes a saját fluxuséval:

$$u_i = \left(L_1 + L_2 - M_{12} - M_{21}\right)\frac{di}{dt} = L_e \frac{di}{dt},$$

Ha $M_{12}=M_{21}=M$, akkor $L_e=L_1+L_2-2M$.
Szoros csatolásnál $L_e=0$ (tulajdonképpen megegyezik a bifiláris tekerccsel), csatolás hiányában, amennyiben a kölcsönös induktivitások elhanyagolhatók, az eredő induktivitás ebben az esetben is $L_e=L_1+L_2$.
A kölcsönös induktivitás értéke például a két tekercs egyirányú és szembe kapcsolt állapotban mért eredő induktivitásából is megállapítható: L_1+L_2+2M - (L_1+L_2-2M)= $4M$.

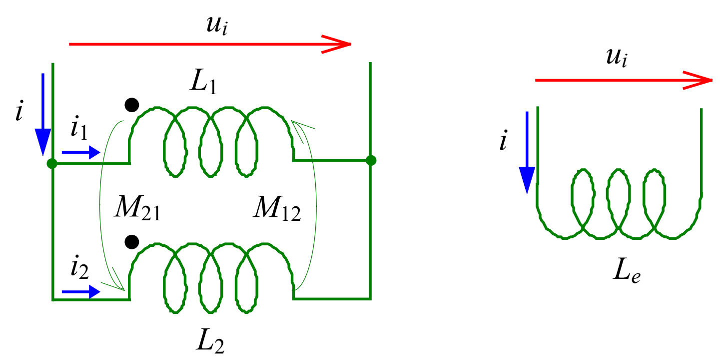
Csatolt tekercsek párhuzamos kapcsolása
A párhuzamos kapcsolásnál indukált eredő feszültség mindkét tekercsen azonos. A feszültség egyenlet ha a két tekercs fluxusa egymást erősíti:

$$u_i = L_1 \frac{di_1}{dt} + M_{12}\frac{di_2}{dt} = L_2 \frac{di_2}{dt} + M_{21}\frac{di_1}{dt}.$$

Amennyiben $M_{12}=M_{21}=M$, akkor

$$\frac{di_1}{dt}\left(L_1 - M\right) = \frac{di_2}{dt}\left(L_2 - M\right),\ \text{amiből}\ \frac{di_1}{dt} = \frac{di_2}{dt}\frac{L_2 - M}{L_1 - M},\ \text{illetve}\ \frac{di_2}{dt} = \frac{di_1}{dt}\frac{L_1 - M}{L_2 - M},$$

$L_1 \neq M$ és $L_2 \neq M$ megkötés mellett.



Csatolt tekercsek párhuzamos kapcsolása azonos irányú gerjesztésnél

Ezzel

$$u_i = \frac{di_1}{dt}\left(L_1 + M\frac{L_1 - M}{L_2 - M}\right) = \frac{di_1}{dt}\frac{L_1L_2 - M^2}{L_2 - M} = \frac{di_2}{dt}\left(L_2 + M\frac{L_2 - M}{L_1 - M}\right) = \frac{di_2}{dt}\frac{L_1L_2 - M^2}{L_1 - M}.$$

Az i_1 és i_2 áramot a deriváltak $\frac{di_1}{dt}$, illetve $\frac{di_2}{dt}$ integrálásával kapjuk, az i eredő áram:

$$i = i_1 + i_2 = \frac{L_2 - M}{L_1L_2 - M^2}\int u_i dt + \frac{L_1 - M}{L_1L_2 - M^2}\int u_i dt = \frac{L_1 + L_2 - 2M}{L_1L_2 - M^2}\int u_i dt = \frac{1}{L_e}\int u_i dt.$$

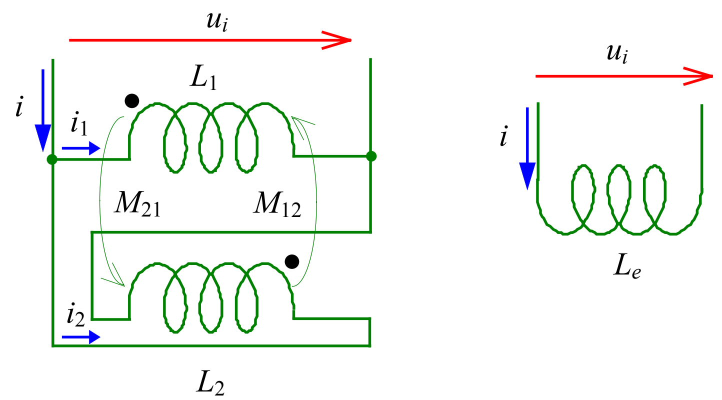
Amiből az L_e eredő induktivitás:

$$L_e = \frac{L_1L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}.$$

Szoros csatolásnál, ha a két tekercs menetszáma azonos $L_1=L_2=M_{12}=M_{21}=L$, az eredő induktivitás értéke a l'Hospital-szabály alkalmazásával $L_e=L$.

Ha a kölcsönös induktivitás elhanyagolható $M \approx 0$, akkor $L_e = \frac{L_1L_2}{L_1 + L_2} = L_1 \times L_2$,

$L_1=L_2=L$ esetén $L_e=\dfrac{L}{2}$.



Csatolt tekercsek párhuzamos kapcsolása ellenirányú gerjesztésnél

Ha a két tekercs fluxusa egymást gyengíti az indukált eredő feszültség:

$$u_i=L_1\frac{di_1}{dt}-M_{12}\frac{di_2}{dt}=L_2\frac{di_2}{dt}-M_{21}\frac{di_1}{dt}.$$

Amennyiben $M_{12}=M_{21}=M$, akkor

$$\frac{di_1}{dt}\left(L_1+M\right)=\frac{di_2}{dt}\left(L_2+M\right),\ \text{amiből}\ \frac{di_1}{dt}=\frac{di_2}{dt}\frac{L_2+M}{L_1+M},\ \text{illetve}\ \frac{di_2}{dt}=\frac{di_1}{dt}\frac{L_1+M}{L_2+M},$$

Ezzel

$$u_i=\frac{di_1}{dt}\left(L_1-M\frac{L_1+M}{L_2+M}\right)=\frac{di_1}{dt}\frac{L_1L_2-M^2}{L_2+M}=\frac{di_2}{dt}\left(L_2+M\frac{L_2+M}{L_1+M}\right)=\frac{di_2}{dt}\frac{L_1L_2-M^2}{L_1+M}.$$

Az i_1 és i_2 áramot a deriváltak integrálásával kapjuk, az i eredő áram:

$$i=i_1+i_2=\frac{L_2+M}{L_1L_2-M^2}\int u_i dt+\frac{L_1+M}{L_1L_2-M^2}\int u_i dt=\frac{L_1+L_2+2M}{L_1L_2-M^2}\int u_i dt=\frac{1}{L_e}\int u_i dt.$$

Amiből az L_e eredő induktivitás:

$$L_e=\frac{L_1L_2-M^2}{L_1+L_2+2M}.$$

Ha a kölcsönös induktivitás elhanyagolható $M\approx 0$, akkor a végeredmény természetesen független az egyes tekercsek gerjesztési irányától.

Szoros csatolásnál, ha a két tekercs menetszáma azonos $L_1=L_2=M_{12}=M_{21}=L$, az eredő induktivitás értéke $L_e=0$, megegyezik a bifiláris tekercsre kapott eredménnyel.

Összeállította: Kádár István
2016. március

Ellenőrző kérdések

1. Melyek a ferromágneses anyagok legfontosabb jellemzői?
2. Illusztrálja az első mágnesezési görbe jellemző szakaszait.
3. Illusztrálja és értelmezze a hiszterézis görbe jellemzőit.
4. Értelmezze a statikus és a dinamikus hiszterézis görbét.
5. Mutasson be néhány permeabilitás értelmezést.
6. Hogyan definiálják a teljes (közönséges) permeabilitást?
7. Hogyan definiálják a differenciális permeabilitást?
8. Hogyan definiálják a kezdeti permeabilitást?
9. Hogyan definiálják az inkrementális és a reverzibilis permeabilitást?
10. Mi a mágneses kör fogalma?
11. Mi a soros mágneses kör számításának alapgondolata?
12. Mi a párhuzamos mágneses kör számításának alapgondolata?
13. Milyen analógián alapul a „mágneses Ohm-törvény”, melyek az analógia korlátai?
14. Ismertesse az önindukció jelenségét.
15. Értelmezze az önindukciós tényezőt (induktivitást).
16. Hogyan határozható meg közelítően egy vasmentes szolenoid induktivitása?
17. Illusztrálja a vasmagos és a vasmentes tekercs önindukciós tényezőjének áramfüggését.
18. Milyen összetevőkre szokták felbontani a csatolt tekercsek fluxusát?
19. Hogyan csoportosítják a csatolt tekercsek összetevőkre felbontott fluxusát?
20. Ismertesse a kölcsönös indukció jelenségét.
21. Értelmezze a kölcsönös indukciós tényezőt.
22. Mekkora két csatolt soros tekercs eredő induktivitása azonos és ellentétes irányú gerjesztés esetén?
23. Mekkora két csatolt párhuzamos tekercs eredő induktivitása azonos és ellentétes irányú gerjesztés esetén?