Valószínűségszámítás zh
2013. április 26.
A. MEGOLDÁS

1. Egy teherautó 200 láda tojást szállít, mindegyik ládában pontosan 100 tojással. Szállításkor minden tojás 0,01 valószínűséggel összetörhet (a többitől függetlenül). A megrendelő akkor vesz át egy ládát a szállítótól, ha a ládában lévő összetört tojások száma nem haladja meg a 2-őt. *Mennyi annak a valószínűsége, hogy legfeljebb két ládát nem fognak átvenni?
Megoldás: $p = \mathbf{P}$ (egy ládában nem több az összetört tojás mint 2) $=$
$= \sum_{k=0}^{2} \binom{100}{k} (0,01)^k (0,99)^{100-k}$,
A Poisson eloszlással is számolhatunk, ahol $\lambda = 1 : p = \sum_{k=0}^{2} \frac{1}{k!} e^{-1}$,
$\mathbf{P}$ (legfeljebb két ládát nem fognak átvenni) $= \sum_{k=0}^{2} \binom{200}{k} p^k (1-p)^{200-k}$.

2. Egy csomag magyar kártyacsomagból találomra kihúzunk egy lapot. Vegye fel X a kártya pontértékét! (alsó:2, felső:3, király:4, ász:11, hetes:7, nyolcas:8, kilences:9, tízes:10). $F_X(2 \cdot \pi) = ?$
Megoldás: X lehetséges értékei, az értékkészlete az $\{2, 3, 4, 7, 8, 9, 10, 11\}$ számhalmaz. Mindegyik i értéket $\mathbf{P}(X = i) = \frac{1}{8}$ valószínűséggel veheti fel. $[2 \cdot \pi] = 6, F_X(2 \cdot \pi) = F_X(6) = \mathbf{P}(X < 6) = \mathbf{P}(X = 2) + \mathbf{P}(X = 3) + \mathbf{P}(X = 4) = \frac{3}{8}$.

3. Az $[-1, 1] \times [-1, 1]$ négyzeten egymás után sorsolunk ki véletlen pontokat. Akkor állunk meg, amikor az első kisorsolt pont beleesik az $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ kör belsejébe. Mi a pontok számának eloszlása? *Mi a várható értéke és szórása?
Megoldás: A körbe-esés valószínűsége $p = \frac{\frac{1}{4}\pi}{4} = \frac{\pi}{16}$. A keresett X valószínűségi változó így $G\left(\frac{\pi}{16}\right)$ eloszlású, és $\mathbf{P}(X = k) = \left(1 - \frac{\pi}{16}\right)^{k-1} \frac{\pi}{16}, k = 1, 2, 3, ...$
$\mathbf{E}X = \frac{16}{\pi}, \boldsymbol{\sigma} X = \frac{16}{\pi} \left(\sqrt{1 - \frac{\pi}{16}}\right)$.

4. Ha X 2-paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó, akkor mi a sűrűségfüggvénye az $Y = 3X + 3$ valószínűségi változónak? Mennyi Y várható értéke és szórása?
Megoldás: $\mathbf{P}(Y < x) = \mathbf{P}(X < \frac{x-3}{3}) = 1 - e^{-2\frac{x-3}{3}}$, ha $x > 3$. $f_Y(x) = \frac{2}{3} e^{-2\frac{x-3}{3}}$, $x > 3$. $\mathbf{E}Y = 3\mathbf{E}X + 3 = \frac{3}{2} + 3 = 4.5, \boldsymbol{\sigma} Y = 3\boldsymbol{\sigma} X = \frac{3}{2}$.

5. Az A paraméter milyen értékénél lesz az $f(x) = Ae^{-3(x+1)^2}, x \in \mathbb{R}$ függvény sűrűségfüggvény? Mennyi ekkor a várhatóérték és a szórásnégyzet?
Megoldás: A megadott sűrűségfüggvény speciális paraméterekkel egy $N\left(-1, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ eloszláshoz tartozó sűrűségfüggvény. Így $A = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\pi}}$ azaz $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\frac{1}{\sqrt{6}}} e^{-\frac{(x+1)^2}{2\frac{1}{6}}}$.
$\mathbf{E}X = -1, \boldsymbol{\sigma}^2 X = \frac{1}{6}$.

Valószínűségszámítás zh
2013. április 26.
B. MEGOLDÁS

1. Egy teherautó 100 láda tojást szállít, mindegyik ládában pontosan 500 tojással. Szállításkor minden tojás 0,02 valószínűséggel összetörhet (a többitől függetlenül). A megrendelő akkor vesz át egy ládát a szállítótól, ha a ládában lévő összetört tojások száma nem haladja meg a 5-öt. *Mennyi annak a valószínűsége, hogy legalább 5 ládát nem fognak átvenni?
   Megoldás: $p = \mathbf{P}$ (egy ládában nem több az összetört tojás mint 5) $=$
   $= \sum_{k=0}^{5} \binom{500}{k} (0,02)^k (0,98)^{500-k}$,
   A Poisson eloszlással is számolhatunk, ahol $\lambda = 1 : p = \sum_{k=0}^{5} \frac{1}{k!} e^{-1}$,
   $\mathbf{P}$ (legalább öt ládát nem fognak átvenni) $= 1 - \sum_{k=0}^{4} \binom{100}{k} p^k (1-p)^{100-k}$.

2. Egy csomag magyar kártyacsomagból találomra kihúzunk egy lapot. Vegye fel X a kártya pontértékét! (alsó:2, felső:3, király:4, ász:11, hetes:7, nyolcas:8, kilences:9, tízes:10). $F_X(2+\pi) =$?
   Megoldás: X lehetséges értékei, az értékkészlete az $\{2, 3, 4, 7, 8, 9, 10, 11\}$ számhalmaz. Mindegyik i értéket $\mathbf{P}(X = i) = \frac{1}{8}$ valószínűséggel veheti fel. $[2+\pi] = 5, F_X(2+\pi) = F_X(5) = \mathbf{P}(X < 5) = \mathbf{P}(X = 2) + \mathbf{P}(X = 3) + \mathbf{P}(X = 4) = \frac{3}{8}$.

3. Az $[-1, 1] \times [-1, 1]$ négyzeten egymás után sorsolunk ki 20 db véletlen pontot. X jelölje azoknak a pontoknak a számát, amelyek az $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ kör belsejébe esnek. Mi X eloszlása? *Mennyi X várható értéke és szórása?
   Megoldás: A körbe-esés valószínűsége $p = \frac{\frac{1}{4}\pi}{4} = \frac{\pi}{16}$. A keresett X valószínűségi változó így $B\left(20, \frac{\pi}{16}\right)$ eloszlású, és $\mathbf{P}(X = k) = \binom{20}{k} \left(\frac{\pi}{16}\right)^k \left(1 - \frac{\pi}{16}\right)^{20-k}, k = 0, 1, 2, ...20$.
   $\mathbf{E}X = \frac{5\pi}{4}, \boldsymbol{\sigma}X = \sqrt{20 \cdot \frac{\pi}{16} \cdot \left(1 - \frac{\pi}{16}\right)}$.

4. Ha X 3-paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó, akkor mi a sűrűségfüggvénye az $Y = 2X + 2$ valószínűségi változónak? Mennyi Y várható értéke és szórásnégyzete?
   Megoldás: $\mathbf{P}(Y < x) = \mathbf{P}(X < \frac{x-2}{2}) = 1 - e^{-3\frac{x-2}{2}}$, ha $x > 2$. $f_Y(x) = \frac{3}{2} e^{-2\frac{x-2}{2}}$, $x > 2$. $\mathbf{E}Y = 2\mathbf{E}X + 2 = \frac{2}{3} + 2 = \frac{8}{3}, \boldsymbol{\sigma}^2 Y = 4 \cdot \boldsymbol{\sigma}^2 X = \frac{4}{9}$.

5. Az A paraméter milyen értékénél lesz az $f(x) = Ae^{-2(x-2)^2}, x \in \mathbb{R}$ függvény sűrűségfüggvény? Mennyi ekkor a várhatóérték és a szórás?
   Megoldás: A megadott sűrűségfüggvény speciális paraméterekkel egy $N\left(2, \frac{1}{2}\right)$ eloszláshoz tartozó sűrűségfüggvény. Így $A = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}$ azaz $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\frac{1}{2}} e^{-\frac{(x-2)^2}{2\frac{1}{4}}}$.
   $\mathbf{E}X = 2, \boldsymbol{\sigma}X = \frac{1}{2}$.