

Digitális Jelfeldolgozás Tételkidolgozás

Kotroczó Nándor

2011. január 17.

Tartalomjegyzék

1. A valószínűség alapjai	5
1.1. Vázlat	5
1.2. A valószínűség alapjai. Miért használható valós jelenségekre a valószínűségelmélet?	5
1.3. Modell és valóság	5
1.4. A becslésmélet alapjai	6
1.5. A becslés célja: kis hiba.	6
1.6. Költségfüggvény	6
1.7. A Bayes-becslés.	6
2. ML – LS becslés, Gaus-Markov becselő	8
2.1. Vázlat	8
2.2. A maximum likelihood becslés indoklása, algoritmus	8
2.3. Likelihood és log-likelihood függvény	8
2.4. ML becslés lineáris megfigyelési egyenlet és normál eloszlású megfigyelések esetén (Gauss-Markov becselő, LS becselő)	8
2.5. ML becslés egyenletes eloszlású zaj esetén	10
3. A jelek csoportosítása	11
3.1. Vázlat	11
3.2. A jelek csoportosítása	11
3.3. Leírás a frekvenciatarományban	12
3.4. Tranziens jelek, energiasűrűség. Tranziens korreláció. Periodogram	13
3.5. Spektrummérés sávszűrővel	13
4. Sztochasztikus folyamatok	15
4.1. Vázlat	15
4.2. A sztochasztikus folyamatok alapjai, fogalmak, mérési lehetőségek, jelentésük	15
4.3. Szemléletes magyarázatok, a véletlen fázisú szinuszjel, stacionaritás, ergodicitás	16
4.4. Periodikus jelek. Véletlen időzítésű jel	17
4.5. A korreláció és a teljesítménysűrűség spektrum	18
5. A mintavételezés	19
5.1. Vázlat	19
5.2. A mintavételezés modellezése	19
5.3. A Dirac-delta értelmezése	20
5.4. A mintavételezett jel Fourier-transzformáltja.	21
5.5. Mintavételi tételek.	21
6. A mintavétel részletesen	23
6.1. Vázlat	23
6.2. A közelítő mintavételi tétel	23
6.3. Fourier-transzformáció közelítése téglányösszeggel	23
6.4. $x = \text{IDFT}\{\text{DFT}\{x\}\}$	24
6.5. Interpoláció formula...	24
6.6. FIR realizáció	25

7. A DFT eredménye	27
7.1. Vázlat	27
7.2. A DFT eredménye szinusz esetén, koherens mintavételezéssel	27
7.3. Keskenysávú jel mintavételezése. Az analóg mintavételező oszcilloszkóp	27
7.4. Mintavételi tétel sztochasztikus jelekre	28
7.5. Mintavételezés a gyakorlatban	28
8. Nem koherens mintavételezés	34
8.1. Vázlat	34
8.2. A DFT eredménye szinusz nem koherens mintavételezéssel	34
8.3. Szivárgás és léckerítés hatás	34
8.4. Ablakozás	35
8.5. LS becslés, Dschrét négyszögjel Fourier-transzformáltja	35
9. DFT eredmények sztochasztikus jelekre	39
9.1. Vázlat	39
9.2. A DFT eredményének tulajdonságai sztochasztikus jelekre	39
9.3. A periodogram varianciája	40
10.A cirkuláris konvolúció	41
10.1. Vázlat	41
10.2. Cirkuláris Konvolúció	41
10.3. A korreláció indirekt elvű becslése	43
10.4. Bartlet ablakos torzítás	43
11.A kvantálás tulajdonságai	44
11.1. Vázlat	44
11.2. A kvantálás tulajdonságai szemléletesen	44
11.3. A karakterisztikus függvény	45
11.4. A karakterisztikus függvény és a momentumok kapcsolata	46
12.A kvantálási zaj tulajdonságai	48
12.1. Vázlat	48
12.2. A kvantálási zaj tulajdonságai	48
12.3. Korlátok újrakvantálás, DSP, határciklus-oszcilláció	49
13.A kvantálási tétel	50
13.1. Vázlat	50
13.2. A kvantálási tétel	50
13.3. A dither, mint átlapolásgátló szűrő	51
13.4. A korrelálatlanság és a fehér zajspektrum feltételi	51
14.A diszkrét átlagolás	52
14.1. Vázlat	52
14.2. A diszkrét átlagolás	52
14.3. Sávkorlátozott fehér zaj	53
14.4. Az analóg átlagolás	53
15.A mozgó átlagolás és additív zajszűrés	54
15.1. Vázlat	54
15.2. A mozgó átlagolás	54
16.Aluláteresztő szűrés, exponenciális átlagolás	56
16.1. Vázlat	56
16.2. Aluláteresztő szűrés, mint átlagolás	56
16.3. Exponenciális átlagolás és aluláteresztő szűrés	56

17.A mozgó átlagolás	57
17.1. Vázlat	57
17.2. A mozgó átlagolás.	57
17.3. A fésűszűrő+integrátor alakú megvalósítás pólus-zérus képe	58
17.4. Fogkitörés	60
17.5. Szűrőbank, ekvivalencia a DFT-vel.	60
18.Megfigyelőelmélet	61
18.1. Vázlat	61
18.2. A megfigyelőelmélet alapjai	61
18.3. Egyenletek, a hiba állapotegyenlete	62
18.4. A véges lépésszámú beállítás feltétele	62
18.5. DFT szűrőbank	63
19.Digitális szűrés. Digitális szűrők, IIR, FIR	65
19.1. Vázlat	65
19.2. A digitális szűrés. Digitális szűrők	65
19.3. IIR, FIR	65
19.4. IIR szűrő tervezése	66
19.5. IIR tervezési módszerek	68
20.FIR tervezés	70
20.1. Vázlat	70
20.2. Remez algoritmus	70

Tételek

1. A valószínűségelmélet alapjai. Miért használható valós jelenségekre a valószínűségelmélet? Modell és valóság. A becslésmélet alapjai. A becslés célja: kis hiba. Költségfüggvény. A Bayes-becslés. A priori ismeretek.
2. A maximum likelihood becslés indoklása, algoritmusai. Likelihood és log-likelihood függvény. Példa: középérték és variancia becslése független normális eloszlású megfigyeléseknél. Az ML becslés tulajdonságai. LS becslés és maximum likelihood becslés. ML becslés lineáris megfigyelési egyenlete és normált eloszlású, független megfigyelések esetén (Gaus-Markov becslő)
3. Jelek csoportosítása. Jelek leírása a frekvenciatartományban. Tranziens jelek, energia-sűrűség. Tranziens korreláció. Periodogram. Spektrummérés sávszűrővel.
4. A sztochasztikus folyamatok alapjai. Fogalmak, mérési lehetőségek jelentései. Szemléletes magyarázatok. A véletlen fázisú szinuszjel, stacionaritás, ergodicitás. Periodikus jelek. Véletlen időzített jel. Korreláció és teljesítménysűrűség.
5. A mintavételezés modellezése: moduláció Dirac-delta sorozattal. A Dirac-delta értelmezése. A mintavételezett jel Fourier-transzformálta. Mintavételi tétel. Mintavételi tétel a frekvencia-tartományban.
6. A közelítő mintavételi tétel. A tételek korlátai: végtelenül sok minta kellene. A Fourier-transzformált közelítése téglányösszeggel. A DFT és az FFT. DFT, FFT, FFT nem 2 hatványra (chirp-FFT) $\{x\} = \text{IDFT}(\text{DFT}(x))$ bizonyítása. Interpolációs formula. A folytonosidejű jel visszaállítása a mintákból FFT-vel, aluláteresztő szűrővel, kauzalitás. Interpoláció módosított ablakfüggvénnyel, túlmintavételezéssel. FIR realizáció.
7. A DFT eredménye szinusz esetén, koherens mintavételezéssel. A mintavételi tétel értelmezése szinuszos jelle. Szinusz mintavételezése, információtartalom. Frekvenciatranszformáció mintavételezéssel. Szinuszos jel paramétereinek meghatározása spektrumból. Az idő- és frekvenciatartomány ellentmondó követelményei. Mintavételezés a gyakorlatban: csalóka ábrák (szinusz mintavételezése csökkenő frekvenciával, az időfüggvény és a spektrumok), jelisméltés és mintavételezés. Keskenysávú jel mintavételezése. Az analóg mintavételező oszcilloszkóp. Mintavételi tétel sztochasztikus jelekre.
8. A DFT eredménye szinusz nem koherens mintavételezéssel. Szivárgás és léckerítés hatás. Ablakozás. A Hann és a Hamming ablak. Flat top ablak. Interpolált FFT. LS becslés. Diszkrét négyzet-ablak Fourier-transzformálta dB-ben megadott spektrum. Átlapolás-gátló szűrő.
9. A DFT eredményének tulajdonságai sztochasztikus jelekre. A periodogram mint spektrumbecslő. $|X_k|$ eloszlása. A periodogram varianciája.
10. A cirkuláris konvolúció. A korreláció indirekt elvű becslése. A variancia megjelenése a korrelációbecslőben: a szomszédos becslő-pontok korreláltak. Az eredmény varianciája. A cirkularitás és a Bartlett-ablakos torzítás kiküszöbölése.
11. A kvantálás tulajdonságai szemléletesen. A kvantálás mint a valószínűségi sűrűségfüggvény speciális mintavételezése. A karakterisztikus függvény. A karakterisztikus függvény és a momentumok kapcsolata.
12. A kvantálási zaj tulajdonságai. Egyenletes eloszlás – korrelálatlanság – fehérség. Korlátok újrakvantálás, DSP, határciklus-oszcilláció.
13. A kvantálási tétel. A dither, mint "átlapolásgátló szűrő". A működés magyarázata. Háromszög-eloszlású dither az audio-technikában. HP analízátor szinuszos ditherrel. A korrelálatlanság és a fehér zajspektrum feltételei.
14. A diszkrét átlagolás eredményének varianciája az N függvényében. Közelítő leírás. A sávkorlátozott fehér zaj. Összfűgges a mintavételi tétellel. Ekvivalens sávszélesség. Variancia sávkorlátozott fehér zaj és kettős exponenciális autokovariancia esetén. Az analóg átlagolás torzítása, varianciája.
15. Mozgó átlagolás (boxcar integration). Additív zajszűrés (indított átlagolás).
16. Aluláteresztő szűrés, mint átlagolás. Exponenciális átlagolás és aluláteresztő szűrés. Az exponenciális átlagolás, mint elsőfokú aluláteresztő szűrő. A digitális és az analóg átlagoló és aluláteresztő szűrő összevetése, ekvivalenciája.
17. A mozgó átlagolás fésűszűrő+integrátor alakú "megvalósításának" stabilitása a pólus módosításával, az átviteli függvény módosulása. Fogkitörés. Fogkitörés 0-tól különböző frekvencián. Szűrőbank. Ekvivalencia a DFT-vel.
18. A megfigyelő-elmélet alapjai. A megfigyelő általános feladata. Általános blokkvázlat. Egyenletek, a hiba állapot-egyenlete. A véges lépésszámú beállítás feltétele. A rezonátoralapú rekurzív DFT analízátor.
19. Digitális szűrés. Digitális szűrők. IIR, FIR. Specifikáció. Alapvető IIR tervezési módszerek: analóg szűrők bilineáris transzformációja, impulzus-invariáns módszer. Modellek átalakulása egymásba, pólus-ekvivalenciák. Frekvencia-mintavételezés – stabilitás. Előnyök – hátrányok.
20. FIRtervezés: ablakozás, Remez algoritmus. FIR szűrő készletetése.

1. A valószínűség alapjai

1.1. Vázlat

- A valószínűség alapjai. Miért használható valós jelenségekre a valószínűségelmélet?
- Modell és valóság?
- A becslésmélet alapjai. A becslés célja: kis hiba.
- Költségfüggvény. A Bayes-becslés. A priori ismeretek

1.2. A valószínűség alapjai. Miért használható valós jelenségekre a valószínűségelmélet?

1.3. Modell és valóság

A modell a világ leírásának, megértésének az eszköze, a világra vonatkozó ismereteinknek kifejezője. *A valóságról alkotott kép, melyben kiemeljük annak bizonyos aspektusait. A vizsgált jelenséget változatlanul hagyva vizsgáljuk a valóságot.*

A modellezés célja a modell megalkotása:

- funkcionális modell
- fizikai modell
- matematikai modell

A priori ismeret: a modellezendő jelenségre vonatkozó a vizsgálat megkezdésekor rendelkezésre álló ismeretek összessége.

A posteriori ismeret: a modellezési eljárás befejezésével rendelkezésünkre álló ismeret, ami a jelenség megfigyelése során nyert információkkal több az a priori ismeretnél.

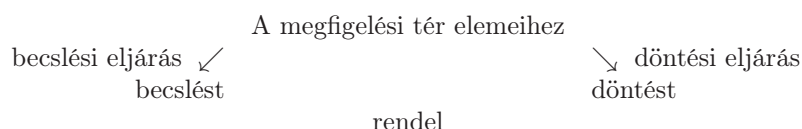
Deduktív modellalkotás: Ismerjük a jelenség belső felépítését, a törvényszerűségekből kiindulva törekszünk a jelenség pontos leírására. Egyértelmű

Induktív modellalkotás: Nem rendelkezünk információval a rendszer belsejéről, a kísérletek információt adnak a rendszer bemenő és kimenő jeleiről. Olyan leírásra törekszünk, mely utánozni képes a modell működését. Nem egyértelmű

A mérés mindig egy modellezési folyamatba van beágyazva, a mérés a modellalkotás autonóm szakasza. A mérés a mért jellemzők halmazát leképezi egy szimbólumhalmazra. A mérési eljárásnak fizikailag vagy koncepcionálisan tartalmaznia kell a mérendő objektum előzetes modelljét.

Ha a mérés eredménye

- folytonos $\rightarrow$ becslésmélet
- diszkrét $\rightarrow$ döntésmélet



A becslések, döntések sztochasztikus jellegűek. A becslések és döntések minősítésére a nagymértékű elvi hasonlóság ellenére eltérő jellemzők megadása szükséges.

1.4. A becsléelmélet alapjai

A becslési folyamatokat úgy jellemeztük, hogy ezek többlépéses sztochasztikus leképezést valósítanak meg a keresett jellemző (a) és a becslés ($\hat{a}$) között.

A becslés jellemzésére az $\hat{a}$ valószínűségi változó statisztikai leírása szolgál, a becslés "jóságára" ezért $\hat{a}$ -nak a rögzített a mellett érvényes eloszlás- és sűrűségfüggvénye jellemző. Az $f(\hat{a}|a)$ a feltételes sűrűségfüggvény adott a esetén a különböző megfigyelésekhez rendelt $\hat{a}$ becslések lehetséges tartományát és ezen tartományon belüli eloszlását adja meg.

A sűrűségfüggvény helyett (mert nehézkes megadni) célszerűbb az $\hat{a}$ valószínűségi változó néhány jellemzőjét tekinteni a "jóság" mértékének. Ilyen jellemzők lehetnek az $E\{\hat{a}|a\}$ feltételes várható értéks és a $cov[\hat{a}, \hat{a}|a]$ feltételes kovariancia.

$$E\{\hat{a}|a\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{a} f(\hat{a}|a) d\hat{a}$$

Hogyan jellemezhetjük a becslőket? Néhány tulajdonság:

Torzítatlanság: $E\{\hat{a}\} = E\{a\}$

Hatásosság: Egy becslő hatásosabb, mint egy másik, ha átlagos négyzetes hibája kisebb

$$var[\hat{a}|a] < var[\hat{\gamma}|a]$$

Elégségesség: elégséges, ha minden lényeges információt tartalmaz a -ról

Aszimptotikus torzítatlanság:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E\{\hat{a}(k)|a\} = 0$$

1.5. A becslés célja: kis hiba.

1.6. Költségfüggvény

A költségfüggvény bármilyen feldolgozási algoritmust jelölhet, amely viszonylag egyszerűen megvalósítható és amely érvényes optimumkritérium alapját képezheti.

Egy egyszerű választás, ha a költségfüggvény csak a becslő hibájától függ, vagyis $C(\hat{a}, a) = C(\tilde{a})$

A Bayes-becslőknék leggyakrabban alkalmazott költségfüggvények a következők:

– négyzetes hibafüggvény:

$$C(\hat{a}, a) = \sum_{i=1}^m (\hat{a}_i - a_i)^2$$

– abszolút hibafüggvény:

$$C(\hat{a}, a) = \sum_{i=1}^m |\hat{a}_i - a_i|$$

– egyenletes költségfüggvény

$$|\hat{a}_i - a_i| < \frac{\Delta}{2} \forall i\text{-re}$$

1.7. A Bayes-becslés.

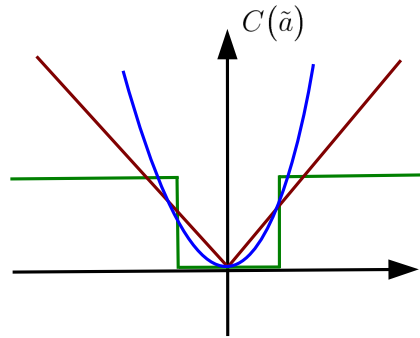
A legtöbb előismeretet a Bayes-becslők igénylik. Tételezzük fel, hogy az ismeretlen a valószínűségi változó paramétert a $\{z_i\}$ megfigyelések felhasználásával kívánjuk becsülni. Tételezzük fel, hogy az ismeretlen paraméterről bizonyos előismerettel rendelkezünk, melyet a paraméter $f_a(a)$ a priori valószínűség-sűrűségfüggvénye ad meg.

Van sok megfigyelés az ismeretlen paraméterről: $z_1, z_2, \dots, z_N$. A vizsgálati modellben feltételeztük, hogy a megfigyeléseket zaj terheli: $z_i = a_i + n_i$.

Emiatt ismerni kell a megfigyelések feltételes sűrűségfüggvényét: $f(z|a)$, a **csatornakarakterisztikát**.

A megfigyelés utáni ismereteket a paraméter $f(a|z)$ a posteriori sűrűségfüggvénye adja meg.

A Bayes-becslési módszerek mindegyike az a posteriori sűrűségfüggvény meghatározására vezet.



1. ábra. Lehetséges Költség függvények

A becslés mindig hibás lesz. A hiba: $\tilde{a} = \hat{a} - a$. Az optimális becslésnél ezt a hibát kívánjuk valahogy minimalizálni.

Költségfüggvény: $C(a - \hat{a})$, a hibakritériuma.

Átlagos Bayes költség: $E\{C(a, \hat{a})\}$, ezt kellene minimalizálni

$$E\{C(a, \hat{a})\} = \int_{-\infty}^{+\infty} C(a, \hat{a}) f(a|z) da \quad (1.7.1)$$

A becslők származtatásához írjuk fel az átlagos hibát. Mivel a becslés a z megfigyeléstől, és az a tényleges paramétertől függ, és mivel mind z , mind a valószínűségi változó, ezért a várható érték az $f(z, a)$ együttes sűrűségfüggvény szerint kell képezni.

$$R = E_z\{E_a\{C(a, \hat{a})\}\} = \int_z \int_a C(a, \hat{a}) f(z, a) dz da \quad (1.7.2)$$

Az együttes sűrűségfüggvényt szorzat alakban felírva nyerjük az átlagos hiba következő alakját:

$$R = \int_z \left[f(z) \int_a C(a, \hat{a}) f(a|z) da \right] dz \quad (1.7.3)$$

Az összefüggésben a belső integrál rögzített z megfigyelés mellett adja meg a hibát, melyet **Feltételes Bayes költségnek**, vagy feltételes átlagos hibának nevezünk, és amelynek z szerinti várható értékét a külső integrállal határozzuk meg. Mivel $f(z)$ nem negatív, ezért az átlagos hiba minimalizálása ekvivalens a Feltételes Bayes költség minimalizálásával.

$$\frac{\partial}{\partial \hat{a}} \int_a C(a, \hat{a}) f(a|z) da = 0$$

Az a posteriori sűrűségfüggvény meghatározása a Bayes-szabály alkalmazásával lehetséges:

$$f(a|z) = \frac{f(a)f(z|a)}{f(z)} = \frac{f(a)f(z|a)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(a)f(z|a) da}$$

A Bayes-becslő tehát

- a becsülni kívánt paraméter $f(a)$ a priori sűrűségfüggvényétől
- a megfigyelések $f(z|a)$ feltételes sűrűségfüggvényétől
- és a $C(a, \hat{a})$ költségfüggvénytől függ.

2. ML – LS becslés, Gaus-Markov becslő

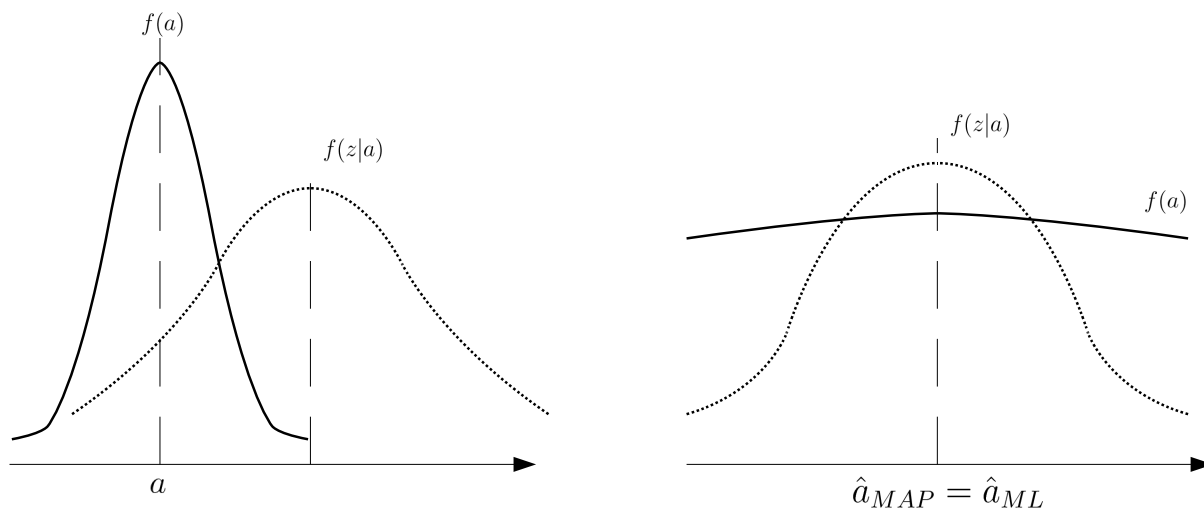
2.1. Vázlat

- A maximum likelihood becslés indoklása, algoritmus. Likelihood és log-likelihood függvény
- LS becslés és maximum likelihood becslés.
- ML becslés lineáris megfigyelési egyenlet és normál eloszlású megfigyelések esetén (Gauss-Markov becslő, LS becslő)
- ML becslés egyenletes eloszlású zaj esetén.

2.2. A maximum likelihood becslés indoklása, algoritmus

Amennyiben **csak** az $f(z|a)$ feltételes sűrűségfüggvény adott (tehát a Bayes-becslő származtatható), ilyenkor a legjobb becslést az ún. Maximum Likelihood becslő eredményezi.

A Bayes-becslőknél az $f(a)$ a priori sűrűségfüggvény ismeretére szükség volt. A maximum likelihood becslőknél $f(a)$ -t nem ismerjük, ami úgy modellezhető, mintha egyre jobban szétterülő sűrűségfüggvényünk volna. Az a mérendő paramétert tehát egyre nagyobb varianciájú valószínűségi változónak tekintjük.



2. ábra. Az a priori sűrűségfüggvény hatása

A maximum likelihood becslésnek szemléletes értelmezést is adhatunk. Minthogy vagy nem ismerjük a paraméter eloszlását, vagy a paraméter ismeretlen, nem valószínűségi változó, csak a megfigyelésekre támaszkodhatunk. Az ML becslésnek ezért azt a paraméterértéket tekintjük, amely mellett a kapott megfigyelés a legvalószínűbb. A likelihood függvény tehát a kapott megfigyelés hihetőségének mértékét a keresett paraméterérték függvényében adja meg.

A maximum likelihood becslőnek nagyon kellemes tulajdonságai vannak:

- aszimptotikusan torzítatlan (nagy N -ekre a torzítás nullához tart)
- aszimptotikusan hatásos
- aszimptotikusan normális eloszlású
- egy függvény becslője egyenlő a becslő függvényével

2.3. Likelihood és log-likelihood függvény

Likelihood függvénynek a következőkben a megfigyelés feltételes sűrűségfüggvényét $f(z|a)$ tekintjük, melynek a szerinti maximumhelyéhez tartozó paraméterérték adja meg definíciószerűen az optimális becslést. A szélsőérték feladatot a likelihood egyenlet írja le:

$$\frac{\partial f(z|a)}{\partial a} \Big|_{a=\hat{a}} = 0$$

Kihasználva a logaritmus függvény monotonitását:

$$\frac{\partial \ln f(z|a)}{\partial a} \Big|_{a=\hat{a}} = 0$$

Példa:

Határozzuk meg a középérték becslőjét N független, normális eloszlású megfigyelésből.

Az együttes sűrűségfüggvény a következő:

$$L(z, \mu) = f(z, \mu) \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N \sigma^N} e^{-\frac{(z-\mu)^T(z-\mu)}{2\sigma^2}}$$

Ennek logaritmusát célszerű minimalizálni.

$$\ln L(z, \mu) = -\frac{N}{2} \ln(2\pi) - N \ln(\sigma) - \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^N (z_i - \mu)^2$$

Jól látszik, hogy az első két tag nem függ μ -tól, ezért a harmadik tagot kell maximalizálni, vagyis minimalizálni a $\sum_{i=1}^N (z_i - \mu)^2$ kifejezést (tehát LS problémára jutottunk).

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^N (z_i - \mu)^2}{\partial \mu} = \sum_{i=1}^N -2(z_i - \mu) = 0$$

vagyis

$$\hat{\mu} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N z_i, \text{ a számtani középérték.}$$

2.4. ML becslés lineáris megfigyelési egyenlet és normál eloszlású megfigyelések esetén (Gauss-Markov becslő, LS becslő)

Vizsgáljuk meg az ML becslőt Gauss-megfigyelési zaj és lineáris megfigyelési egyenlet feltételezésével. Legyen a megfigyelési zaj várható értéke és kovarianciamátrixa a következő:

$$E\{\mathbf{n}\} = 0; \quad \text{cov}[\mathbf{n}, \mathbf{n}] = \sum_{\mathbf{nn}}$$

tehát n megfigyelések mellett a zaj sűrűségfüggvénye:

$$f(\mathbf{n}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |\sum_{\mathbf{nn}}|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2} \mathbf{n}^T \sum_{\mathbf{nn}}^{-1} \mathbf{n}}$$

Felhasználva a $\mathbf{z} = \mathbf{U}\mathbf{a} + \mathbf{n}$ lineáris megfigyelési egyenletet a likelihood függvény a következőre adódik:

$$f(z|a) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |\sum_{\mathbf{nn}}|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2} (\mathbf{z} - \mathbf{U}\mathbf{a})^T \sum_{\mathbf{nn}}^{-1} (\mathbf{z} - \mathbf{U}\mathbf{a})}$$

melynek szélső értékét a likelihood egyenletből határozhatjuk meg:

$$\frac{\partial f(\mathbf{z}|\mathbf{a})}{\partial \mathbf{a}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{a}} \left\{ (\mathbf{z} - \mathbf{U}\mathbf{a})^T \sum_{\mathbf{nn}}^{-1} (\mathbf{z} - \mathbf{U}\mathbf{a}) \right\} \Big|_{\mathbf{a}=\hat{\mathbf{a}}_{ML}} = 0$$

vagy:

$$\mathbf{U}^T \sum_{\mathbf{nn}}^{-1} \mathbf{U}\mathbf{a} - \mathbf{U}^T \sum_{\mathbf{nn}}^{-1} \mathbf{z} \Big|_{\mathbf{a}=\hat{\mathbf{a}}_{ML}} = 0$$

Ha az $[\mathbf{U}^T \sum_{\mathbf{n}\mathbf{n}}^{-1} \mathbf{U}]^{-1}$ inverz létezik, a paraméter Gauss-Markov-becslése a következő:

$$\hat{a}_{GM} = [\mathbf{U}^T \sum_{\mathbf{n}\mathbf{n}}^{-1} \mathbf{U}]^{-1} \mathbf{U}^T \sum_{\mathbf{n}\mathbf{n}}^{-1} \mathbf{z}$$

A Gauss-Markov becslésnél nem ismerjük az $f(\mathbf{a})$ a priori sűrűségfüggvényt. Mint az előzőekben már láttuk úgy vehető figyelembe, hogy $f(\mathbf{a})$ -t végtelen varianciájú Gauss-sűrűségfüggvénynek tekintjük.

A Gauss-Markov becslőkre igazak az ML becslők tulajdonságai, plusz:

- A becslés a megfigyelés lineáris függvénye
- A becslő torzítatlan, hiszen felhasználva a megfigyelési egyenletet:

$$E\{\hat{a}_{MG}|a\} = [\mathbf{U}^T \sum_{\mathbf{n}\mathbf{n}}^{-1} \mathbf{U}]^{-1} \mathbf{U}^T \sum_{\mathbf{n}\mathbf{n}}^{-1} [\mathbf{U}\mathbf{a} + E\{\mathbf{n}\}] = [\mathbf{U}^T \sum_{\mathbf{n}\mathbf{n}}^{-1} \mathbf{U}]^{-1} [\mathbf{U}^T \sum_{\mathbf{n}\mathbf{n}}^{-1} \mathbf{U}] \mathbf{a} = a$$

- A becslő hatásos

2.5. ML becslés egyenletes eloszlású zaj esetén

3. A jelek csoportosítása

3.1. Vázlat

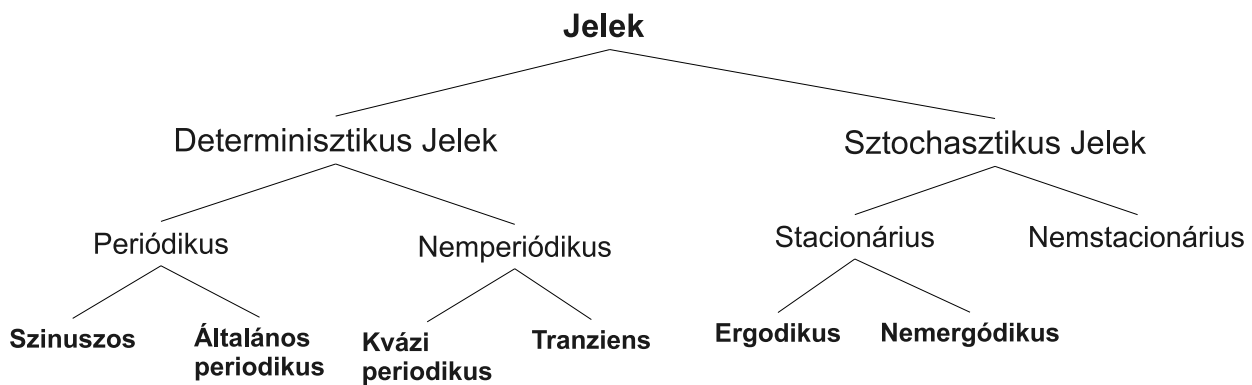
- A jelek csoportosítása
- Leírás a frekvenciatartományban
- Tranziens jelek, energiasűrűség. Tranziens korreláció. Periodogram
- Spektrummérés sávszűrővel

3.2. A jelek csoportosítása

Időparaméter szerint

- Folytonos időparaméter
- Diszkrét sorozat

E kettő kapcsolatával a mintavételezés foglalkozik.



3. ábra. Jelek csoportosítása

Determinisztikus: a jelenség által meghatározott formájú jel

Sztochasztikus: "látszólag" véletlenszerű, determinisztikus ismeretek hiánya ill. elhanyagolása. A jelenség nem határozza meg egyértelműen a jel alakját.

periodikus $x(t) = x(t + T_p) \quad \exists T_p$, amelyre a fenti összefüggés teljesül.

szinusz

$$\begin{aligned}
 x(t) &= A_1 \cos(2\pi f_1 t + \varphi_1) \\
 &= A_1 \cos(2\pi f_1 t + \varphi_1) + C \\
 &= A \cos(2\pi f_1 t) + B \sin(2\pi f_1 t)
 \end{aligned}$$

$$A_1 = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad \varphi_1 = \arctan \frac{B}{A} (+\pi, \text{ ha } A < 0)$$

$$A = A_1 \cos \varphi_1$$

$$B = A_1 \sin \varphi_1$$

$$x(t) = C_1 e^{j2\pi f_1 t} + C_{-1} e^{-j2\pi f_1 t}, \quad C_1 = \frac{A_1}{2} e^{j\varphi_1} \quad C_{-1} = \overline{C_1} \quad \text{ha } x(t) \text{ valós}$$

általános periodikus

Fourier-sorba fejthető

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_k e^{j2\pi k f_1 t}$$

 $C_{-k} = \overline{C_k}$ ha $x(t)$ valós

$$C_n = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-j2\pi n f_1 t} dt = \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{j2\pi k f_1 t} e^{-j2\pi n f_1 t} dt$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T e^{-j2\pi f_1 k t} e^{-j2\pi f_1 n t} dt = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq n \end{cases}$$

Fourier sor bázisfüggvényei ortogonálisak egymásra

kváziperiodikus

szinuszos, de nincs közös alapharmonikus vagy nem vesszük figyelembe (nem fejezhetők ki a frekvenciák két kis egész szám hányadosaként, nagy a periódushossz)

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_k e^{-j2\pi f_k t}, \quad f_{-k} = -f_k, \quad C_{-k} = \overline{C_k} \quad \text{ha } x(t) \text{ valós} \quad (3.2.1)$$

tranziens jelek egy idő után eltűnnek: $x(t) = 0$ ha $t > T$ **3.3. Leírás a frekvenciatartományban**

Fourier-transzformált:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \quad (3.3.1)$$

Diszkrét Fourier-transzformált:

$$x_k = \sum_{i=0}^{N-1} x_i e^{-j2\pi \frac{k i}{N}} \quad (3.3.2)$$

Inverz Fourier-transzformált:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{-j2\pi f t} df \quad (3.3.3)$$

Inverz Diszkrét Fourier-transzformált:

$$x_i = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{-j2\pi \frac{k i}{N}} \quad (3.3.4)$$

Folytonos esetben értelmezett, ha $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < \infty$ Szinuszos jelek leírására is alkalmas, a δ és az inverz Fourier-transzformáció alapján:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \delta(x - x_0) dx = g(x_0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(f - f_1) e^{j2\pi f t} df = e^{j2\pi f_1 t}$$

A szinuszjel matematikai értelemben nem Fourier-transzformálható, azonban a δ felhasználásával megadható olyan spektrum, melynek inverze az időtartományban szinusz:

$$\begin{aligned} F\{A_1 \cos(2\pi f_1 t + \varphi_1)\} &= F\{C_1 e^{j2\pi f_1 t} + C_{-1} e^{-j2\pi f_1 t}\} = C_1 \delta(f - f_1) + C_{-1} \delta(f + f_1) \\ &= \frac{A_1}{2} e^{j\varphi_1} \delta(f - f_1) + \frac{A_1}{2} e^{-j\varphi_1} \delta(f + f_1) \end{aligned}$$

Általános periodikus jelekre:

$$F\left\{\sum_{-\infty}^{\infty} C_k e^{j2\pi k f_1 t}\right\} = \sum_{-\infty}^{\infty} C_k \delta f - k f_1$$

Kváziperiodikus jelekre:

$$F\left\{\sum_{-\infty}^{\infty} C_k e^{j2\pi f_k t}\right\} = \sum_{-\infty}^{\infty} C_k \delta f - f_k$$

3.4. Tranziens jelek, energiasűrűség. Tranziens korreláció. Periodogram

A tranziens jelek egy idő után eltűnnek: $x(t) = 0$ ha $t > T$. Ha a tranziens jelekre igaz (a gyakorlatban általában igaz):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt < \infty, \text{ akkor}$$

értelmezett a tranziens korreláció:

$$\begin{aligned} R_{tr}(\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot x(t + \tau) dt \\ R_{tr}(\tau) &= x(-t) * x(t) \\ F\{R_{tr}(\tau)\} &= F\{x(-t) * x(t)\} = \overline{X(f)} \cdot X(f) = |X(f)|^2 = E(f) \end{aligned} \tag{3.4.1}$$

$E(f)$ – Energia-sűrűségfüggvény, $E(f_0)df$ megadja az f_0 körüli df sávban szállított energia mennyiségét. Nemnegatív, ez következik a definícióból.

Az ebben a sávban működő szávszűrőt vizsgálva:

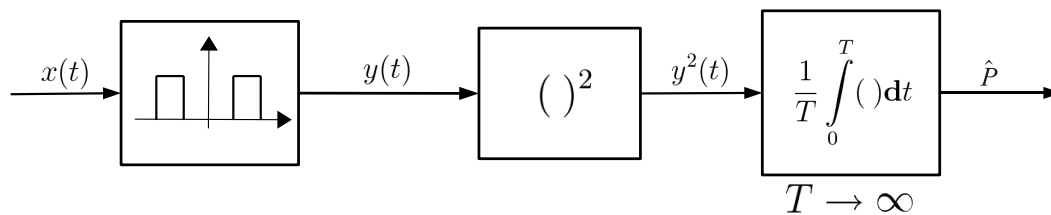
$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |Y(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f) \cdot H(f)|^2 df \approx |X(f_0)|^2 df + |X(-f_0)|^2 df = E(f_0)df + E(-f_0)df$$

↑ Parseval-tétel

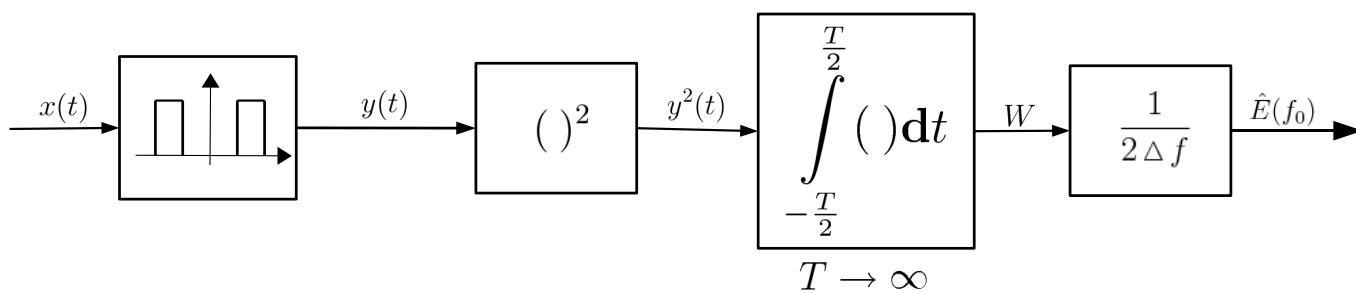
Periodogram: a teljesítmény-sűrűségspektrum becslője közvetlenül a minták alapján, a regisztrátumból. T ill. N hosszú regisztrátumot készítünk, ezt Fourier-transzformáljuk, majd normáljuk. Ez a teljesítményspektrum becslője.

$$\begin{aligned} \hat{S}(f) &= \frac{1}{T} |X(f, T)|^2 & \hat{S}_{xy}(f) &= \frac{1}{T} \overline{X(f, T)} Y(f, T) \\ \hat{S}(k) &= \frac{1}{N} |X_k|^2 & \hat{S}_{xyk} &= \frac{1}{N} \overline{X_k} Y_k \end{aligned}$$

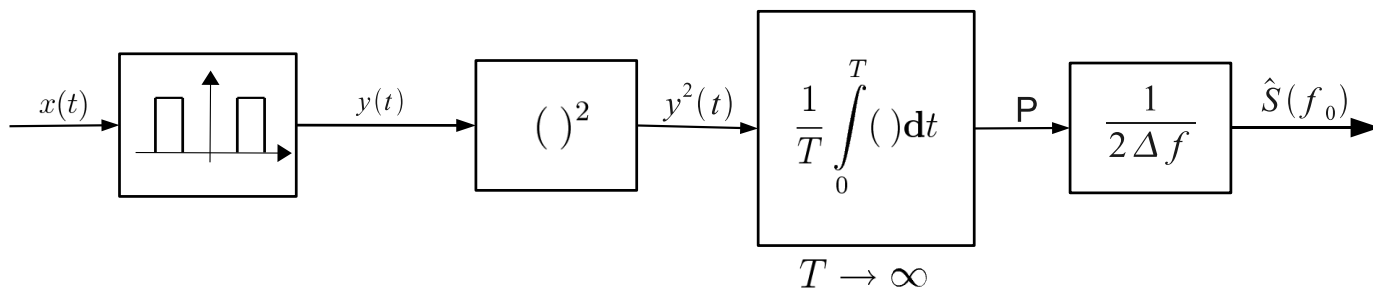
3.5. Spektrummérés sávszűrővel



4. ábra. sávteljesítmény mérése



5. ábra. energia-sűrűségfüggvény mérése



6. ábra. teljesítmény-sűrűségfüggvény mérése

4. Sztocasztikus folyamatok

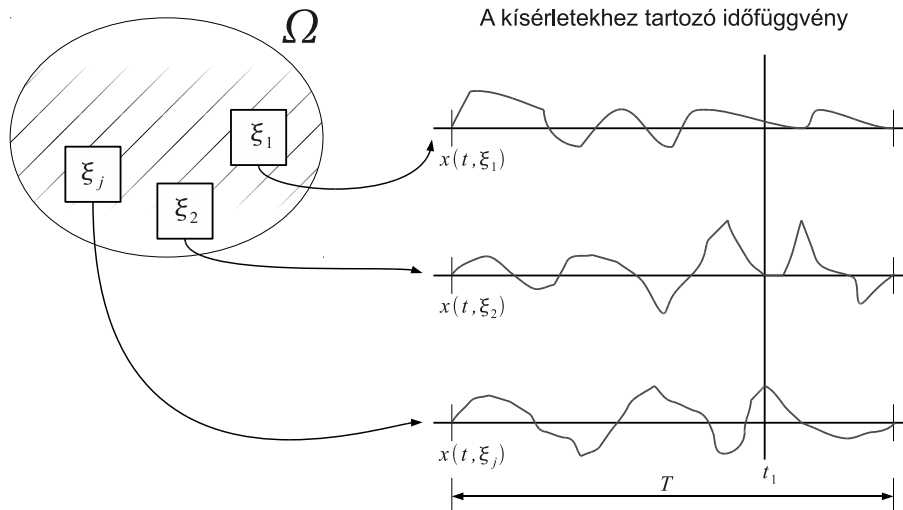
4.1. Vázlat

- A sztochasztikus folyamatok alapjai, fogalmak, mérési lehetőségek, jelentésük
- Szemléletes magyarázatok, a véletlen fázisú szinuszjel, stacionaritás, ergodicitás
- Periodikus jelek. Véletlen időzítésű jel
- korreláció és teljesítménysűrűség

4.2. A sztochasztikus folyamatok alapjai, fogalmak, mérési lehetőségek, jelentésük

Sztocasztikus jelek: A kísérlet megismétlésekor előforduló látszólag véletlen ingadozásokat tapasztalunk. A körülmények, a jelenség nem definiálja egyértelműen a kísérlet eredményét. Determinisztikus ismeretek hiánya, illetve elhanyagolása, zaj.

Sztocasztikus jelek **sztocasztikus folyamattal** modellezhetők: egy függvényhalmazon (lehetséges realizációk = elemi események = mintafüggvény) értelmezett valószínűségi eloszlás. Minden elemi esemény 1-1 függvény, pl.: $[-2; 3]$ -on $x < 1 \forall t$ -re. A függvények minden t időpillanatbeli értékéhez valószínűségi változó tartozik, ezek sűrűség illetve eloszlásfüggvénye jellemzi a folyamatot.



7. ábra. A sztochasztikus folyamat, mint mintafüggvény-sokasság

Kolmogorov-féle alaptétel: A függvények t időpillanatbeli értéke $x(t)$, t paraméterű valószínűségi változó. Adjuk meg az összes $x(t)$ valószínűségi változó eloszlását, majd az összes $x(t_1), x(t_2)$ valószínűségi változó pár eloszlását és így tovább, hogy ezek kompatibilisek legyenek (az alacsonyabb rendszámúak a magasabb rendszámúak peremeloszlásai).

Ez a két megadás ekvivalens. A sztochasztikus folyamat valószínűségi változó sorozat, melyet eloszlásaik egyértelműen definiálnak. Elegendő tehát paraméterfüggő eloszlásseregben gondolkodni.

Eloszlást mérni nehéz, a paraméter eloszlásseregéből momentumokat definiálhatunk, amik mérhetők.

Várható érték:

$$\mu_x(t) = E\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx, \text{ ergodikus folyamatoknál helyettesíthető az időátlaggal}$$

Átlagos négyzetes érték és variancia:

$$\Psi_x^2(t) = E\{x^2(t)\}$$

$$E\{x^2\} = \int x^2 f(x) dx = R_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) df = \sigma_x^2 + \mu_x^2$$

Ez egyben teljesítmény is.

$$\text{var}\{x(t)\} = \sigma_x^2(t) = \Psi_x^2(t) - \mu_x^2(t)$$

$$\text{var}\{x\} = E\{x - Ex\}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(f) df = \Psi_x^2 - \mu_x^2$$

Szórás: a mért érték ingadozásának amplitúdójának átlagos értéke.

Autokorrelációs függvény:

$$R_x(t, \tau) = E\{x(t)x(t+\tau)\} \rightarrow \tau = 0 \Rightarrow R_x(t, 0) = \Psi_x^2(t)$$

Autokovariancia függvény

$$C_x(t, \tau) = R_x(t, \tau) - \mu_x(t)\mu_x(t+\tau) \rightarrow \tau = 0 \Rightarrow C_x(t, 0) = \sigma_x^2(t)$$

4.3. Szemléletes magyarázatok, a véletlen fázisú szinuszjel, stacionaritás, ergodicitás

Stacionárius sztochasztikus folyamat: olyan sztochasztikus folyamat, amelynek jellemzői időinvariánsak.

gyenge stacionaritás: első két momentumra igaz. erős stacionaritás-minden momentum és a sűrűségfüggvényekre is igaz – a felvett változók együttes eloszlása időinvariáns

$$F_{x_1 \dots x_N}(z_1 \dots z_N, t_1 \dots t_N) = F_{x_1 \dots x_N}(z_1 \dots z_N, t_1+t \dots t_N+t) \quad \forall t_1 \dots t_N\text{-re } t\text{-től függetlenül}$$

A momentumok időinvariánsak stacionárius folyamatok esetén:

$$\begin{aligned} \mu(t) &= \mu \\ \Psi^2(t) &= \Psi^2 \\ \text{var}\{x(t)\} &= \text{var}\{x\} = \sigma^2(t) = \sigma^2 \\ R(t, \tau) &= R(\tau) \\ C(t, \tau) &= C(\tau) \end{aligned}$$

Stacionaritás ellenőrzése:

- sokat kell átlagolni
- ha nincs időben módosító tényező, akkor feltételezhető

Ha csak egyszer megfigyelhető a jel? *Ergodikus hipotézis*

Ergodikus sztochasztikus folyamat: olyan stacionárius sztochasztikus folyamat, melyben az időbeli átlagok és a sokaság szerinti átlagok megegyeznek. Szükséges felétele a stacionaritás.

Szemléletesen $x(t)$ és $x(t+t_0)$ egyre függetlenebbé válnak t_0 növelésével. Az ergodicitás akkor nem teljesül, ha az egyes realizációk valamilyen átlagértékükben különböznek egymástól.

Realizációként beálló *memória nincs*. $\rightarrow$ általában teljesül az ergodikus hipotézis.

plélda:
flip-flop, aminek a kimenete beáll.
Sokaság: két érték közt. Idő szerint: az egyik érték.
Ez stacionárius, de nem ergodikus

Gyenge ergodicitás

$$\mu_x = E\{x(t)\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$$

$$\Psi_x^2 = E\{x^2(t)\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt$$

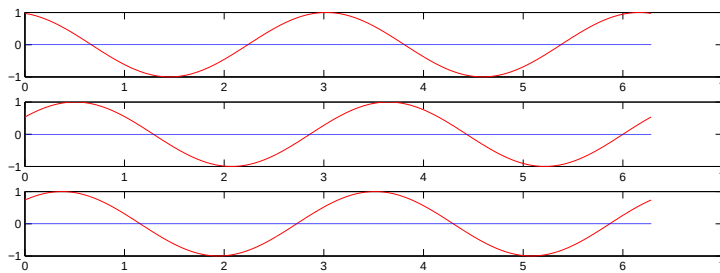
$$R(\tau) = E\{x(t)x(t+\tau)\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t+\tau) dt$$

Az erős ergodicitás minden momentumra teljesül.

4.4. Periodikus jelek. Véletlen időzítésű jel

periodikus jelek a 3. tételben

Véletlen időzítésű jelek



általában

$$x_d(t) \rightarrow x_d(t+T) \\ [t_0, t_0 + T_p]\text{-n egyenletes}$$

8. ábra. Véletlen fázisú szinusz

pl.:szinkronizálás nélkül mérnek, mindenhol különböző kezdőfázis, ehhez rendelünk egy eloszlást. Szemléletesen: álló szinuszra egy ablak, kezdeti idő egyenletes eloszlású. idő $\rightarrow$ fázishelyzet

$$\sin(t+T) \Rightarrow \left. \begin{array}{ll} A \sin(\omega t + \varphi) & \omega \text{ egyenletes } [0, 2\pi]\text{-n} \\ A \sin(\omega t + \varphi) & T \text{ egyenletes } [0, \frac{1}{f}]\text{-n} \end{array} \right\}$$

A valószínűségi változót leképezem függvénnyel.
várható érték:

$$E\{x(t_0)\} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A \sin(\omega_0 t + \varphi) d\varphi = 0$$

első rendben stacionárius (mivel időfüggetlen)
ergódikus-e?

$$\frac{1}{T} \int_0^T A \sin(\omega_0 t + \varphi_1) dt \rightarrow 0 \text{ elsőrendben ergódikus}$$

2. momentumok:

$$E\{x^2(t_0)\} \quad \text{ez a másik speciális eset}$$

$$E\{x(t_0)x(t_1)\}$$

$$\begin{aligned} E\{x(t_0)x(t_1)\} &= \int_0^{2\pi} A \sin(\omega t_0 + \varphi) A \sin(\omega t_1 + \varphi) \frac{1}{2\pi} d\varphi \quad (\varphi \text{ azonos, mert ugyanaz a függvény}) \\ &= \int_0^{2\pi} A^2 \left\{ \frac{\cos(\omega(t_0 + t_1)) + 2\varphi}{2} + \frac{A \cos(t_1 - t_0)}{2} \right\} \frac{1}{2\pi} d\varphi \\ &= \frac{A^2}{2} \cos(\omega(t_1 - t_0)) = \frac{A^2}{2} \cos(\omega\tau) \end{aligned}$$

Nem függ az időtől, csak az időkülönbségtől $\rightarrow$ másodrendben stacionárius.

Bizonyítható, hogy másodrendben ergódikus és magasabb rendben is.

$$R(t_0, t_1) = E\{x(t_0)x(t_1)\} = \frac{A^2}{2} \cos(\omega\tau)$$

$$F\{R(\tau)\} = S(f) \leftarrow \text{Wiener-Hincsin összfüggése,}$$

$$S_{yy}(f) = S_{xx}(f)|H(f)|^2$$

$$P = \Psi_{yy}^2 = R_{yy}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{yy}(f)df = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(f)|H(f)|^2df \approx S_{xx}(f_0)df + S_{xx}(-f_0)df$$

$$F\{C(\tau)\} = \text{kovariancia-teljesítménysűrűség spektrum}$$

$$F\{F_{xy}(\tau)\} = F\{E\{x(t)y(t+\tau)\}\} = S_{xy}(f) \text{ kereszt-teljesítménysűrűség spektrum}$$

$$S_{xy}(f) = S_{xx}(f) \cdot H(f)$$

$$S_{yx}(f) = \overline{S_{xy}(f)}$$

$$S_{yy}(f) = S_{xx}(f)|H(f)|^2$$

$$R_{xy}(\tau) = R_{xx}(\tau) \star h(t)$$

$$R_{yx}(\tau) = R_{xx}(\tau) \star h(-t)$$

$$R_{yx}(\tau) = R_{xy}(-\tau)$$

$$R_{yy}(\tau) = R_{xx}(\tau) \star h(t) \star h(-t)$$

4.5. A korreláció és a teljesítménysűrűség spektrum

- adott frekvencián szállított teljesítmény ($S(f)$)
- korreláció lokális maximumai $\rightarrow$ ismétlődő komponensek ($R(\tau)$)

Keresztkorreláció: jelterjedési viszonyok $F\{R(\tau)\} = S(f)$ stacionaritás arra kell, hogy csak τ -tól függjön.
pl.: Gauss folyamat: stacionárius folyamat, melynek tetszőleges (együttes) valószínűség-sűrűségfüggvény-e Gauss eloszlású

1-D-s sűrűségfüggvény:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

5. A mintavételezés

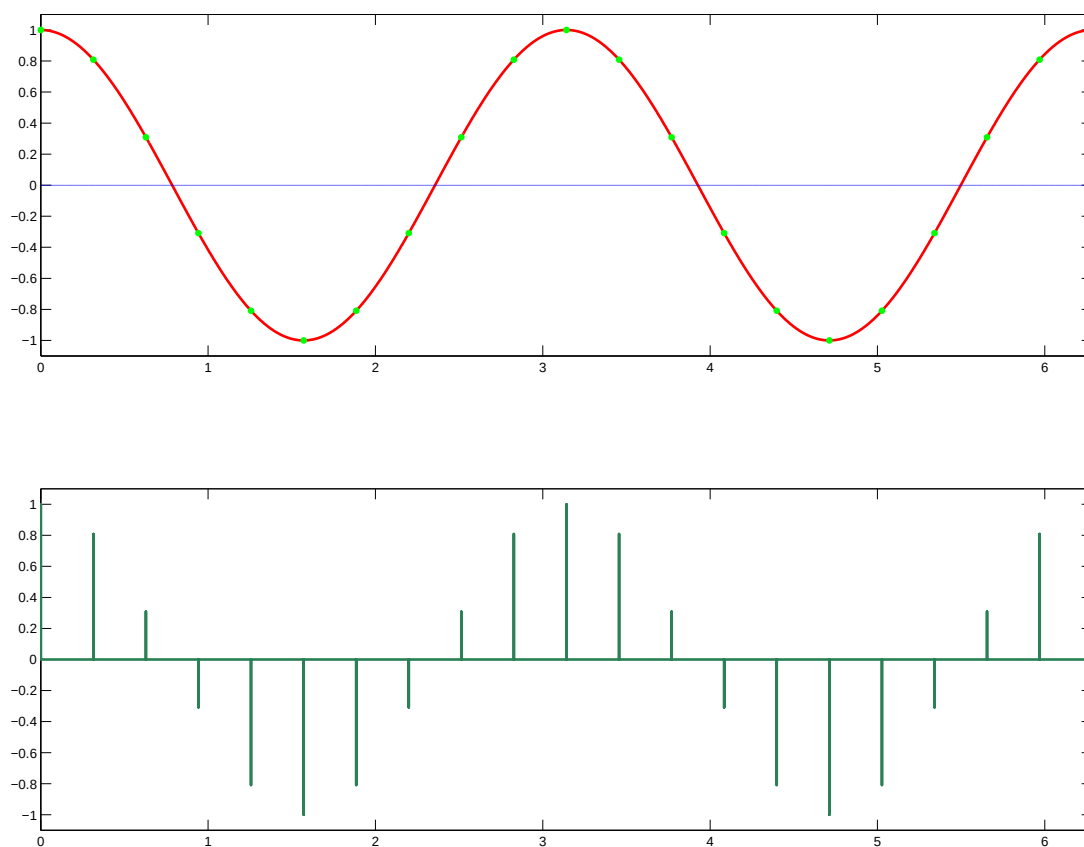
5.1. Vázlat

- A mintavételezés modellése: moduláció Dirac-delta sorozattal.
- A Dirac-delta értelmezése.
- A mintavételezett jel Fourier-transzformáltja.
- Mintavételi tétel. Mintavételi tétel a frekvenciatartományban.

5.2. A mintavételezés modellezése

Ahhoz, hogy analóg jeleket digitális eszközökkel feldolgozhassunk, először véges bitszámon ábrázolt számsorozatokká kell átalakítanunk őket. Az időben való diszkretizálás a mintavételezés.

Mintavételezéskor az időben folytonos jelnek mintasorozatot feleltetünk meg. Leggyakoribb módja, a mintasorozat a jel egyenletes időközökben felvett értékeit tartalmazza.



9. ábra. Mintavételezés egyenlő időközökkel

Fourier-transzformáció:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt$$

A számsorozatnak önmagában 0 a Fourier-transzformáltja, mert csak diszkrét helyeken különbözik nullától. A vizsgálat céljából Dirac-impulzusokat rendelünk az mintákhoz, úgy, hogy az impulzussorozat integrálja ne különbözzön jelentősen az eredeti jel integráljától.

$$x_m(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(t_i) \delta\left(\frac{t-t_i}{T_s}\right) = x(t) \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta\left(\frac{t-iT_s}{T_s}\right)$$

x_m : a mintavételezett jelet reprezentáló Dirac-impulzussorozat

x : az eredeti jel

T_s : mintavételi időköz

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x_m(t) dt = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left(x(t_i) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta\left(\frac{t-iT_s}{T_s}\right) dt \right) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(t_i) T_s \approx \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt$$

Matematikai mintavételezés: szorzás Dirac-impulzussorozattal

5.3. A Dirac-delta értelmezése

Matematikai értelemben nem függvény, hanem disztribúció.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \delta(x - x_0) dx = g(x_0) \quad (5.3.1)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1 \quad (5.3.2)$$

Konvolúció

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(u) \delta(x - u) du = g(x) \quad (5.3.3)$$

inverz Fourier-transzformáció

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(f - f_1) e^{j2\pi f t} df = e^{j2\pi f_1 t} \quad (5.3.4)$$

Ezzel tudunk szinuszos jelekhez is Fourier-transzformáltat rendelni.

Matematikai függvények argumentuma általában dimenziótlan, így itt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta\left(\frac{f}{f_0}\right) d\frac{f}{f_0} = 1$$

$\delta\left(\frac{f}{f_0}\right)$ -t lenne szabad felírnunk

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta\left(\frac{f}{f_0}\right) df = f_0$$

Szemléletesen végtelen magas és végtelen keskeny impulzus, melynek intenzitása (integrálja) 1.

5.4. A mintavételezett jel Fourier-transzformáltja.

A Dirac-impulzussorozat Fourier-sorba fejthető:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \delta\left(\frac{t - iT_s}{T_s}\right) = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi \frac{k}{T_s} t}$$

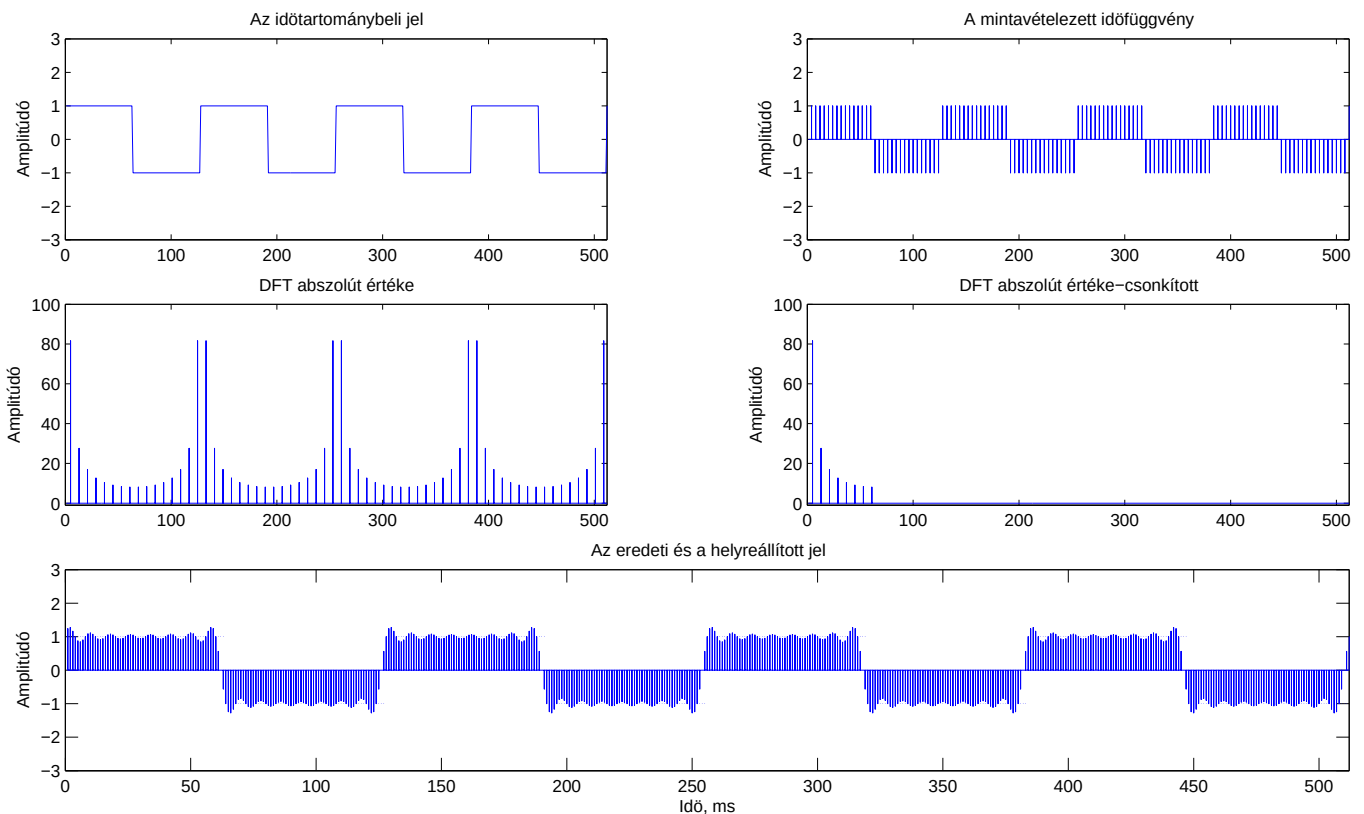
Ez pedig már Fourier-transzformálható:

$$F\left\{\sum_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi \frac{k}{T_s} t}\right\} = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta\left(\left(f - \frac{k}{T_s}\right)T_s\right) T_s$$

$$\begin{aligned} X_m(f) &= F\{x_m(t)\} = F\left\{x(t) \sum_{-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k - iT_s}{T_s}\right)\right\} = F\{x(t)\} \star F\left\{\sum_{-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k - iT_s}{T_s}\right)\right\} \\ &= X(f) \star \sum_{-\infty}^{\infty} \delta\left(\left(f - \frac{k - iT_s}{T_s}\right)T_s\right) T_s = X\left(f - \frac{k}{T_s}\right) \end{aligned}$$

A mintavételezett jel spektruma az eredeti spektrum $\frac{1}{T_s}$ távolságban vett ismétlődésiből áll.

Az az érzés, hogy ebből aluláteresztő szűréssel megadható az eredeti jel spektruma, ha nem lapolódnak át, mert az "elrontja" a spektrumot, ha T_s -t megfelelően kicsire választjuk.



10. ábra. Négyzögjel mintavételezése

5.5. Mintavételi tételek.

I. Mintavételi tétel : ha egy jel Fourier-transzformáltja sávkorlátozott, azaz

$$X(f) = 0, \text{ ha } |f| \geq B \text{ akkor } f_s = \frac{1}{T_s} \geq 2B, \text{ azaz } T_s \leq \frac{1}{2B}$$

esetén a folytonos időfüggvény hibátlanul visszaállítható.

Shannon/Nyquist tétel

$\frac{f_s}{2}$: Nyquist frekvencia

$f = B$ -nél sem lehet értéke zérustól különböző. Ha itt véges, az nem zavaró, de $\delta(f - B)$ olyan szinuszjelet jelent, amiből mindig azonos fázisban veszünk mintát, ez meghamisítja az eredményt.

II. Mintavételi tétel : ha egy jel időkorlátozott, azaz

$$x(t) = 0, \text{ ha } t \notin [t_0, t_0 + T]$$

akkor spektrumát (Fourier-transzformáltját) $\Delta f \leq \frac{1}{T}$ távolságban mintavételezve a spektrum hibátlanul helyreállítható.

Fontos szerepe van a digitális jelfeldolgozásban, hiszen ha áttérünk frekvenciatartományba, akkor a spektrumot csak diszkrét pontokban ismerjük/tudjuk kezelni, hasonlóan az időtartománybeli mintavételezéshez.

6. A mintavétel részletesen

6.1. Vázlat

- A közelítő mintavételi tétel. A tételek korlátai.
- Fourier-transzformált közelítése téglányösszeggel.
- A DFT. A DFT és az FFT. DFT,FFT,FFT nem 2 hatványra (Chirp FFT).
- $x = \text{IDFT}\{\text{DFT}(x)\}$ bizonyítása.
- Interpolációs formula. A folytonos idejű jel visszaállítása a mintákból FFT-vel, aluláteresztő szűrővel, kauzalitás. Interpoláció módosított ablakfüggvénnyel, túlmintavételezéssel.
- FIR realizáció

6.2. A közelítő mintavételi tétel

Az I. és II. mintavételi tétel segít a jelek mintavételezésében és helyreállíthatóságában, de a digitális feldolgozáshoz nem elegendő.

Bizonyítható, hogy egy jel és Fourier-transzformáltja nem lehet egyszerre idő- és sávkorlátozott, de a gyakorlatban adott időtartamon és frekvenciasávon kívül csak elhanyagolhatóan tér el 0-tól, elegendő pontossággal jellemezhetők véges sok adattal.

Közelítő mintavételi tétel Ha egy jel T hosszúságú időtartamon kívül közelítőleg 0 és spektruma is közelítőleg sávkorlátozott B korláttal, akkor $N \geq 2BT$ adattal kis hibával jellemezhető.

$$x(t) \simeq 0 \text{ ha } t \notin [t_0, t_0 + T]$$

$$x(f) \simeq 0 \text{ ha } |f| \geq B$$

pl.: az I. mintavételi tételt felhasználva, $N = \frac{T}{T_s} \geq \frac{T}{\frac{1}{2B}} = 2BT$. Ha $f_s > 2B$, akkor több adatot veszünk, de ezek redundánsak, $2BT = N$ a jelből nyerhető független adatok száma.

Mivel nem lehet ideálisan egyszerre idő és sávkorlátozott, ezért elvben nem tekinthetünk el az $i \rightarrow \infty$ átmenettől az interpolációs formulában.

6.3. Fourier-transzformáció közelítése téglányösszeggel

$$X_T(f) = \int_0^T x(t) e^{-j2\pi f t} dt \approx \sum_{i=0}^{N-1} x(iT_s) e^{-j2\pi f i T_s} T_s$$

Diszkrét frekvenciákon számítjuk ki (számítógépes feldolgozás miatt), legyenek ezek a $k \Delta f$ pontokban.

$$X(k \Delta f) = \sum_{i=0}^{N-1} x(iT_s) e^{-j2\pi k \Delta f i T_s} T_s$$

II. mintavételi tétel miatt: $\Delta f \leq \frac{1}{T}$

$$N \text{ minták száma } N_F = \frac{\frac{1}{T_s}}{\Delta f} = \frac{T}{T_s} = N \text{ pontban kell számítani}$$

$\Delta f = \frac{1}{T}$, ahol $T = NT_s$, a redundancia elkerülése miatt.

Valós bemenő jel esetén elég lenne $\frac{N}{2}$ adat is, mert ekkor $X(k \Delta f) = \overline{X(-k \Delta f)}$, de a DFT-nél megengedünk komplex adatokat is.

$$T_s \Delta f = T_s \frac{1}{T} = \frac{1}{N}$$

szimmetria miatt k -t is ugyanazon az értékeken futtatjuk, mint i -t

$$X_k = \sum_{i=0}^{N-1} x_i e^{-j2\pi \frac{k i}{N} T_s} \quad k = 0 \dots N-1$$

$$T_s = 1$$

DFT:

$$X_k = \sum_{i=0}^{N-1} x_i e^{-j2\pi \frac{ki}{N}} \quad k = 0 \dots N-1 \quad (6.3.1)$$

Ha $T_s = 1$, akkor $\Delta f = \frac{1}{N}$, és így inverz DFT:

$$x_i = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{j2\pi \frac{ki}{N}} \quad i = 0 \dots N-1 \quad (6.3.2)$$

FFT : a DFT műveleteinek csoportosításával gyorsabb algoritmushoz juthatunk. Cooley-Tukey FFT alap-gondolata: N pont DFT-je N^2 szorzás. Ha az N pontot 2 részre bontjuk, akkor a két rész külön-külön transzformációja $2(\frac{N}{2})^2 = \frac{N^2}{2}$ szorzást igényel, ha könnyen összekombinálhatók, akkor érdemes ezt választani és N -t 2 hatványnak

pl.: $N = 1024$ pontos DFT $\rightarrow \sim 1M$ szorzás $(\frac{N}{2}) \log_2 N \sim 10000$ szorzás FFT-vel

Chirp-FFT : Valós bemenő adatoknál: $X_k = \overline{X_{N-k}}$, a DFT visszavezetése visszavezetése FFT-re, hogy kihasználhassuk az algoritmus gyorsaságát.

$$-\frac{nk}{2} = (n-k)^2 - n^2 - k^2$$

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-j2\pi \frac{kn}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{j\frac{\pi}{N}[(n-k)^2 - n^2 - k^2]} = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-j\frac{\pi}{N}n^2} e^{j\frac{\pi}{N}(n-k)^2} \cdot e^{-j\frac{\pi}{N}k^2}$$

6.4. $x = \text{IDFT}\{\text{DFT}\{x\}\}$

Átnézni, mert nem tiszta

$$x_{i_2} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{i=0}^{N-1} x_i e^{-j2\pi \frac{ki}{N}} e^{j2\pi \frac{ki_2}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{i=0}^{N-1} x_i e^{-j2\pi \frac{k(i-i_2)}{N}}$$

$$\text{ha } i_2 = i \Rightarrow x_{i_2} = x_i$$

$$\text{ha } i_2 \neq i \Rightarrow 0$$

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{i=0}^{N-1} x_i e^{-j2\pi \frac{k}{N}(i-i_2)} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x_i \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j2\pi \frac{k(i-i_2)}{N}} = \frac{1}{N} \sum_i x_i \sum_k e^{j\frac{2\pi}{N}k(i_2-i)}$$

$$\text{ha } i \neq i_2 \quad i_2 - i \neq 0$$

mértani sor összegképletét felhasználva:

$$\text{ha } i_2 \neq i$$

$$\frac{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}k(i_2-i)N}}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}k(i_2-i)}} = 0$$

$$\text{ha } i_2 = i$$

$$\frac{1}{N} \sum_i x_i \sum_k e^0 \quad x_{i_2} = x_i$$

6.5. Interpolláció formula...

Interpollációs formula $X_m(f) = X(f - \frac{k}{T_s})$

Aluláteresztő szűréssel visszahozhatjuk az eredeti Fourier-transzformáltat

$$X(f) = X_m(f) \cdot \text{rect}\left(\frac{f}{f_s}\right)$$

$$\text{rect}(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 0,5 \\ 0 & \text{élt} \end{cases}$$

Ezt inverz Fourier-transzformálva:

$$x(t) = x_m(t) \star F^{-1}\left\{\text{rect}\left(\frac{f}{f_s}\right)\right\} = \left[\sum_{i=-\infty}^{\infty} x(iT_s)\delta\left(\frac{t-iT_s}{T_s}\right)\right] \star \text{sinc}\left(\pi\frac{t}{T_s}\right) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(iT_s)\text{sinc}\left(\pi\frac{t-iT_s}{T_s}\right)$$

Ha $t \neq iT_s$, akkor az összes mintára szükség van az interpolációhoz. A gyakorlatban a sinc "elnyomása" miatt közelítőleg jó eredmény érhető el véges számú minta felhasználásával.

Interpoláció FFT-vel

FFT-be 0-kat szúrok be, így széttolva a spektrumot. Olyan, mintha túlmintavételeztem volna, az IFFT-t ezen végzem el. Ez a diszkrét sinc interpoláció.

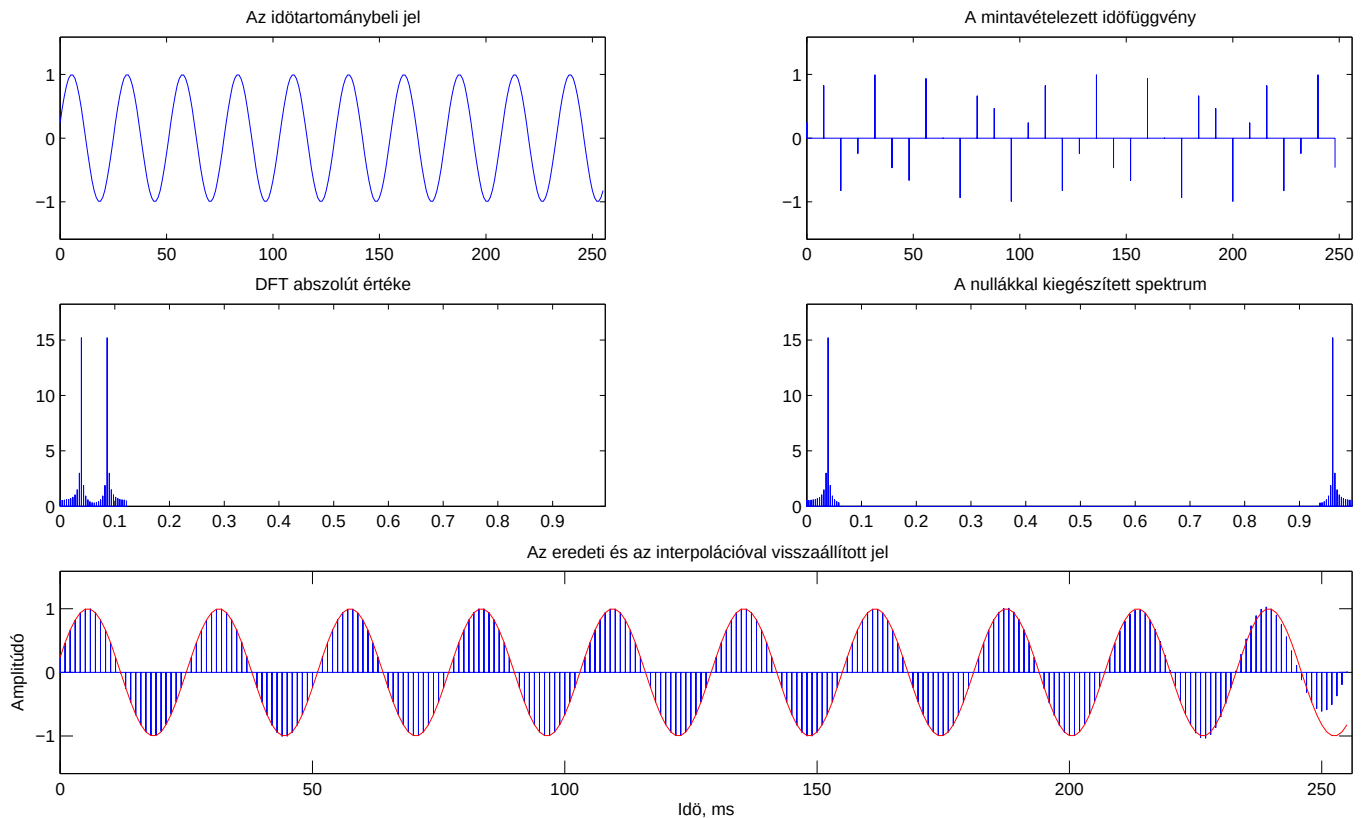
X_k -ből az eredeti jel visszaállítása: IDFT, majd interpoláció Legegyszerűbb közelítés a 0. rendű tartó

$X(f)$ -ből az eredeti jel: aluláteresztő szűrésen visszaállítható, az ismétlődő spektrumok kiszűrésével

Az FFT a legszelektívbb aluláteresztő.

Interpoláció túlmintavételezéssel, módosított ablakfüggvénnyel:

- ha a jelet túlmintavételezzük, azaz $f_s \gg 2B$, akkor enyhébb specifikáció is adható az aluláteresztő szűrőre, nem szükséges olyan meredek levágás
- majd a mintákat egy eltolt és csonkolt (kauzalitás miatt) sinc függvénnyel konvolváljuk



11. ábra. Interpoláció FFT-vel

6.6. FIR realizáció

FIR realizáció esetén $H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$, a visszacsatolás hiánya miatt $\forall a_i = 0$, azaz $H(z) = z^{-N} B(z) \rightarrow h(k) = \sum b_i x_i$, azaz az impulzusválasz értékei megegyeznek a szűrőegyütthatók értékeivel

$$x_{i_2} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^1 \sum_{i=0}^1 x_i e^{-j2\pi \frac{k(i-i_2)}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^1 \left(x_0 e^{+j2\pi \frac{k i_2}{N}} + x_1 e^{j2\pi \frac{k(i_2-1)}{N}} \right)$$

$$\frac{1}{N} \left[x_0 e^{j2\pi 0} + x_1 e^0 + x_0 e^{j2\pi \frac{i_2}{N}} + x_1 e^{j2\pi \frac{i_2-1}{N}} \right]$$

$$i_2 = 0 \quad \frac{1}{2} \left[x_0 + x_1 + x_0 + x_1 e^{j2\pi \frac{-1}{2}} \right] = \frac{1}{2} 2\chi_0$$

$$i_2 = 1 \quad \frac{1}{2} \left[x_0 + x_1 + x_0 e^{-j\pi} + x_1 \right] = \frac{1}{2} 2\chi_1$$

7. A DFT eredménye

7.1. Vázlat

- A DFT eredménye szinusz esetén, koherens mintavételezéssel.
- A mintavételi tételek értelmezése szinuszos jelre.
- Szinusz mintavételezése, információtartalom.
- Frekvenciatranszformáció mintavételezéssel.
- Szinuszos jel paramétereinek meghatározása spektrumból.
- Az idő és frekvenciatartomány ellentmondó követelményei.
- Mintavételezés a gyakorlatban: csalóka ábrák (szinusz mintavételezése csökkenő frekvenciával, az időfüggvény és a spektrumok), jelisméltés és mintavételezés.
- Keskenysávú jel mintavételezése. Az analóg mintavételező oszcilloszkóp.
- Mintavételi tétel sztochasztikus jelekre.

7.2. A DFT eredménye szinusz esetén, koherens mintavételezéssel

Koherens mintavételezés esetén a szinuszból egész számú periódust veszünk, azaz $N \cdot T_s = k \cdot T_0$. N pontos DFT, T_s a mintavételi időhöz, k a periódusok száma, T_0 a sin periódusideje.

$$\frac{N}{f_s} = \frac{k}{f_0} \rightarrow f_0 = \frac{k}{N} f_s$$

Azaz a szinusz frekvenciájának megfelelő komponens pontosan DFT pontra esik.

Pontosan a szinusz spektruma jelenik meg, nincs se picket fence, se szivárgás.

I. mintavételi tétel Ha $X(f)$ sávkorlátozott B sávkorlással $|f| \leq B$, akkor $f_s > 2B$ frekvenciával mintavételezve a spektrumot, nem veszítünk információt.

sin esetén $f = B$ -nél $\delta(f)$, azaz $f_s > 2f_0$ frekvencia feltétel adható sin mintavételezésére. Tiszta sin esetén a jel 3 mintából helyreállítható, zajos esetén többre van szükség.

Színusz paraméterei a spektrumból:

$$A = \frac{2}{N} X \quad e^{j\varphi}, e^{-j\varphi} \rightarrow \varphi$$

$$f_0 = k \Delta f = \frac{k f_s}{N} \quad k+1. \text{ elem a sorban, } X_0 \text{ a DC szint}$$

idő és frekvenciatartománybeli eltérő követelmények:

– korlátos tartójú jel nem lehet sávkorlátozott

– sávkorlátozott jel nem lehet időben korlátos

A gyakorlatban azonban kis hibával jellemezhető.

Jelisméltés az időtartományban: T_p -vel ismételt jel $\Delta f = \frac{1}{T_p}$ spektrum mintavételezés

7.3. Keskenysávú jel mintavételezése. Az analóg mintavételező oszcilloszkóp

Keskenysávú jel mintavételezése: Megfontolt f_s választással letranszformálható $f = 0$ közelébe, fokozottan figyelni kell, hogy ne lapolódjanak egymásra hasznos komponensek

Analóg mintavételező oszcilloszkóp: Eltérő periódusokból kicsit különböző fázishelyzetekből vesz mintát, nem csak letranszformálja a frekvenciát, hanem "össze is nyomja" a spektrumot vizuális kiértékeléshez jó, csak tudni kell mi történik.

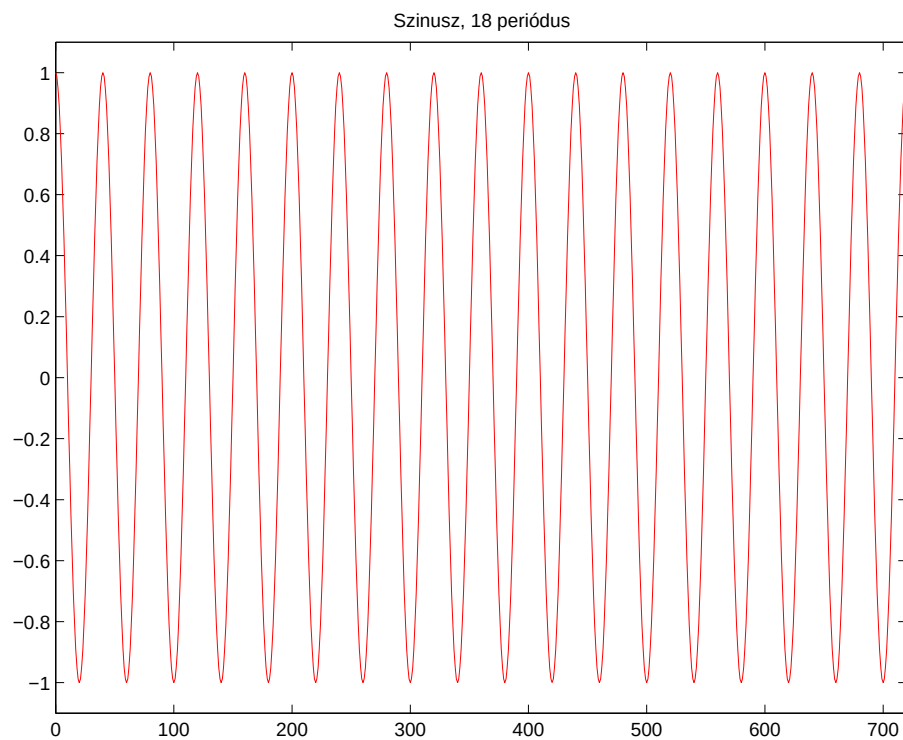
A mintavételi tételt nem muszáj mereven alkalmazni, kisebb f_s is elegendő lehet.

7.4. Mintavételi tétel sztochasztikus jelekre

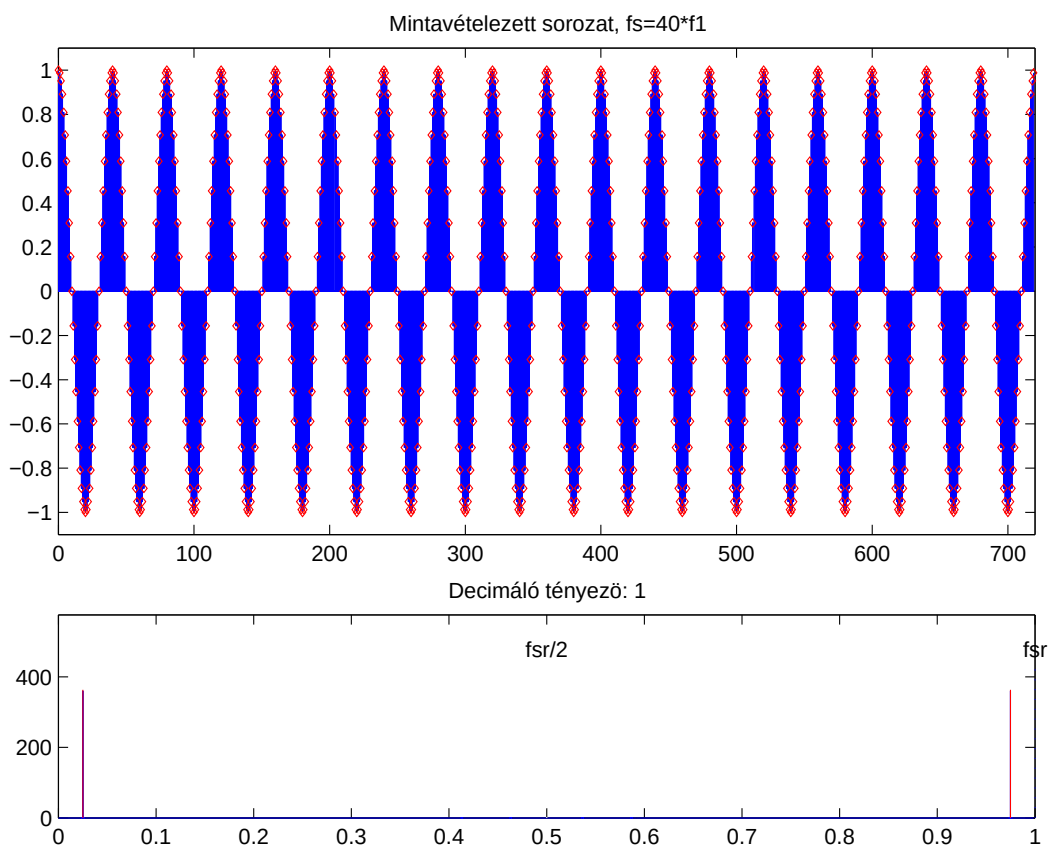
Ha $S(f) = 0, |f| \geq B$, akkor $f_s > \frac{1}{2B}$ -vel mintavételezve nem veszítünk információt, négyzetes értelemben konvergens:

$$\lim_{M \rightarrow \infty} E \left\{ \left(x(t) - \sum_{-M}^M x(iT_s) \operatorname{sinc} \left(\pi \frac{t - iT_s}{T_s} \right) \right)^2 \right\} = 0$$

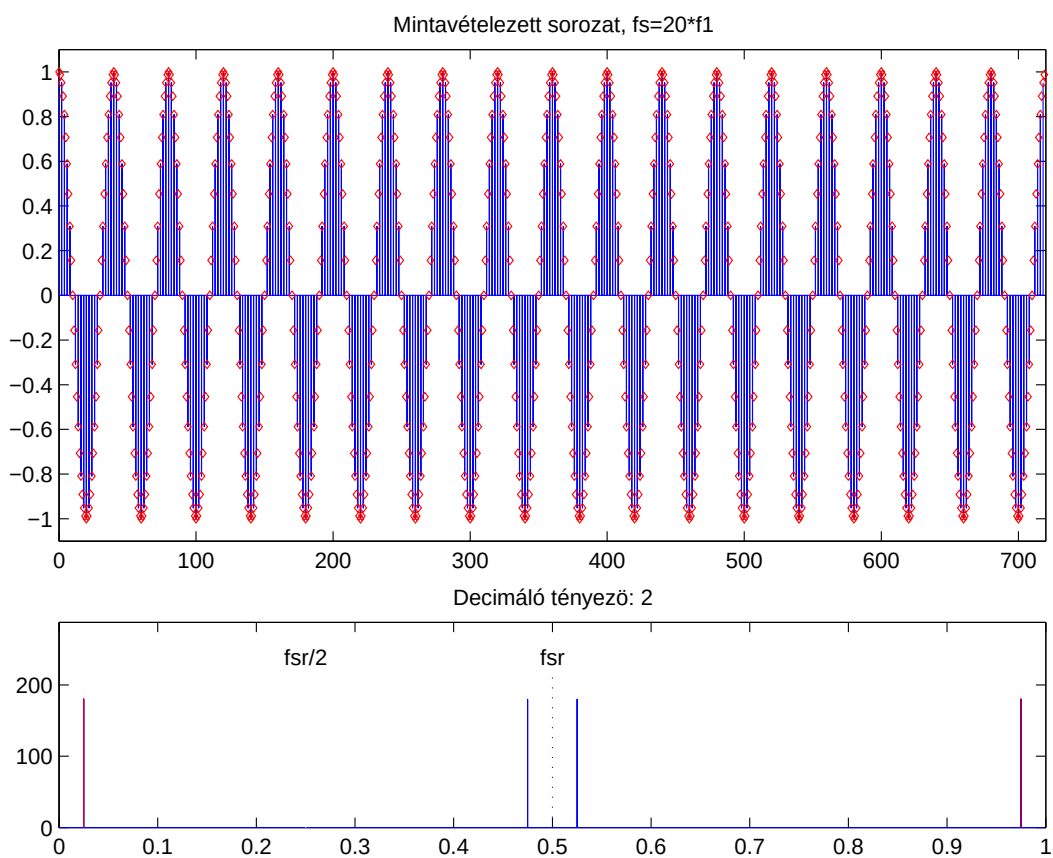
7.5. Mintavételezés a gyakorlatban



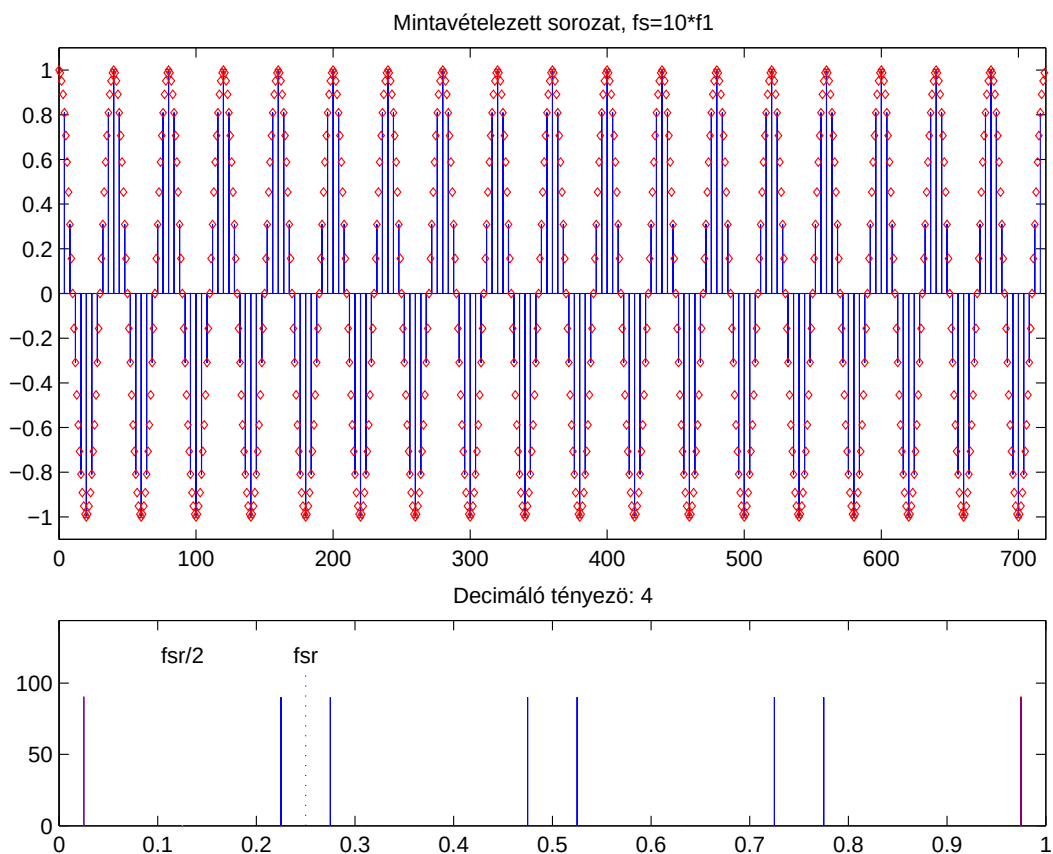
12. ábra. Szinusz jel



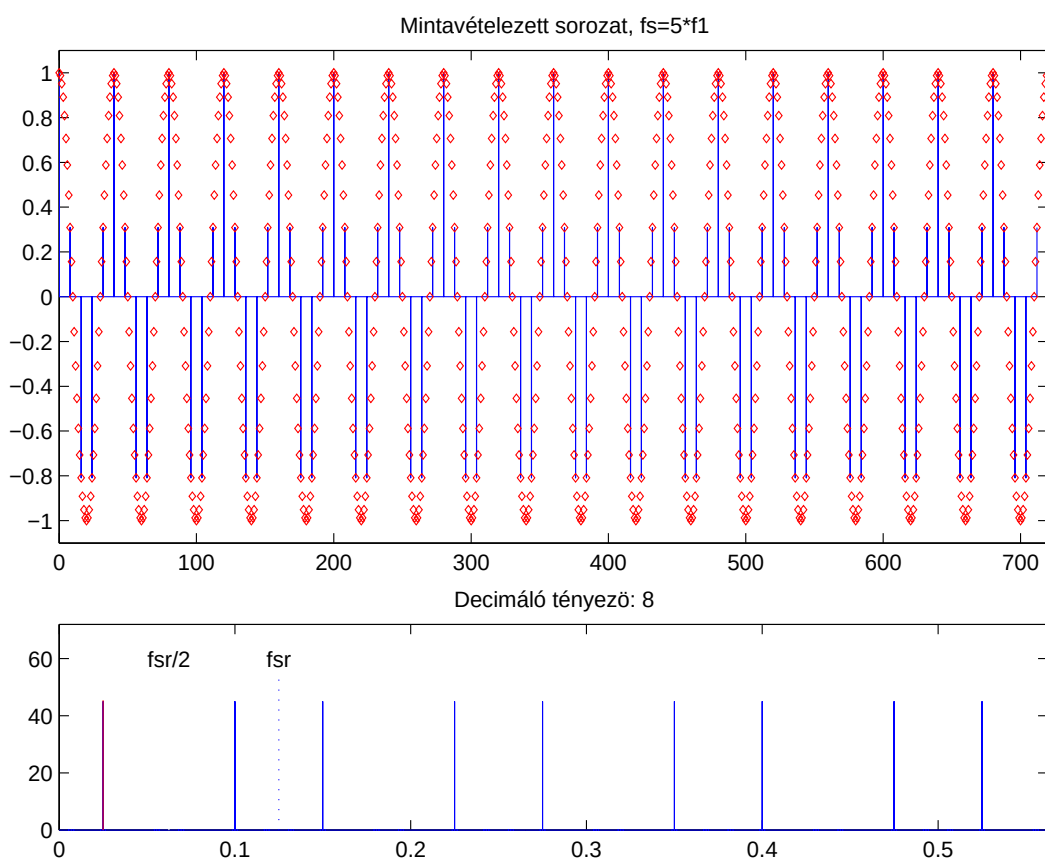
13. ábra. Mintavétel 40 minta/periódus



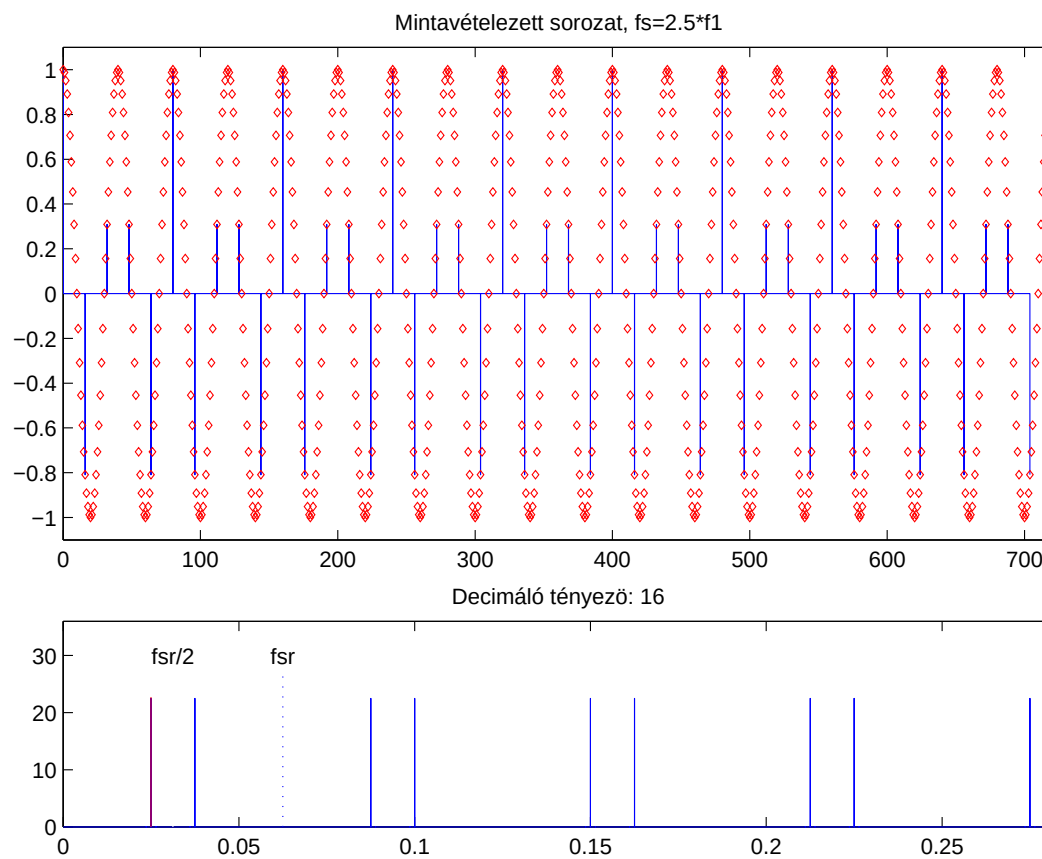
14. ábra. Mintavétel 20 minta/periódus



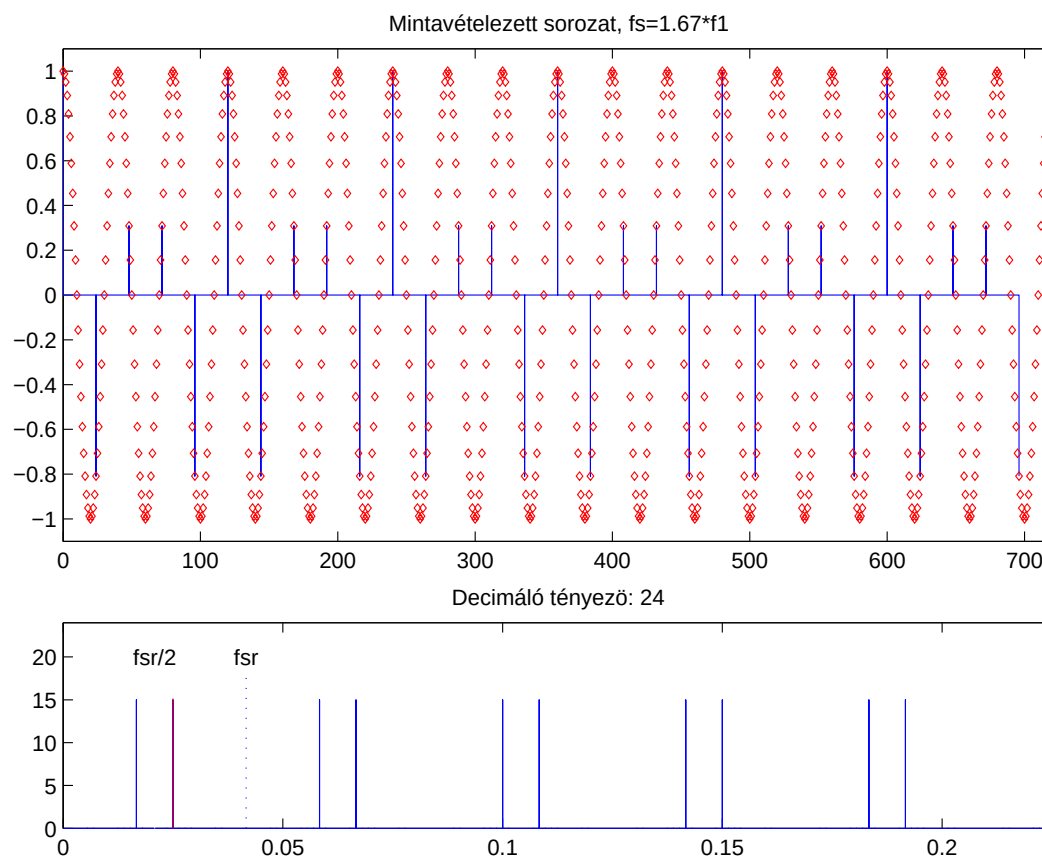
15. ábra. Mintavétel 10 minta/periódus



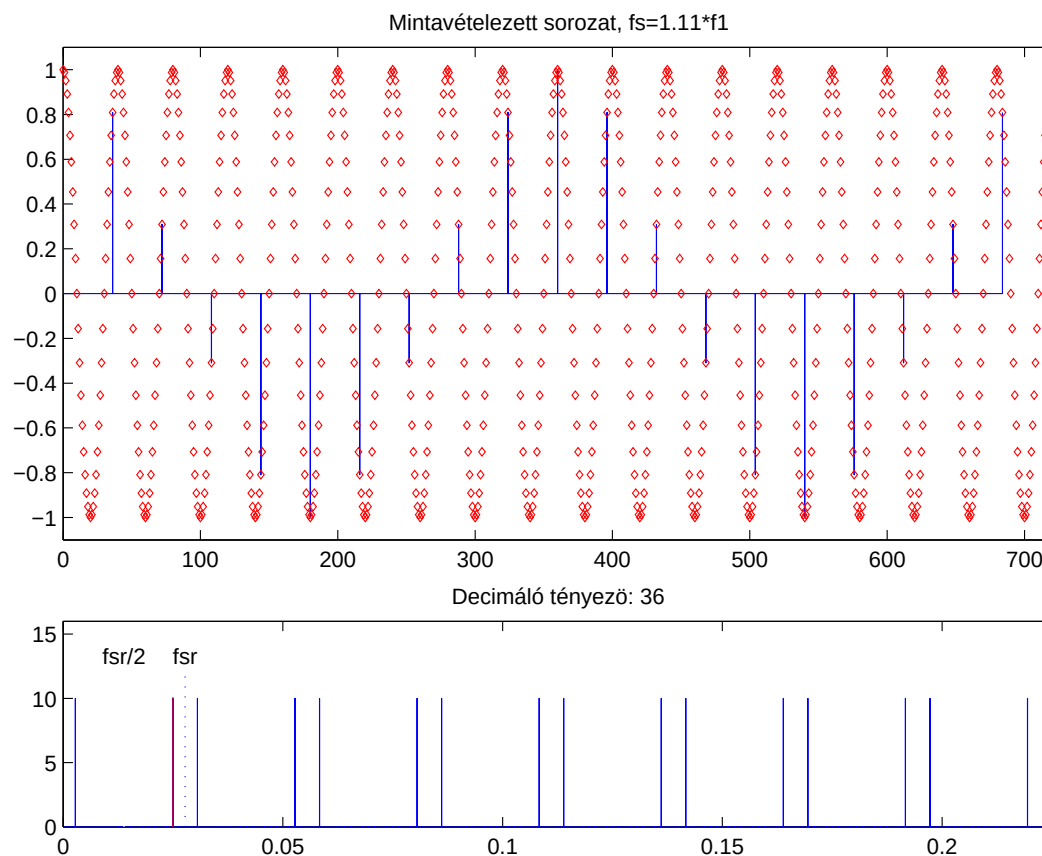
16. ábra. Mintavétel 5 minta/periódus



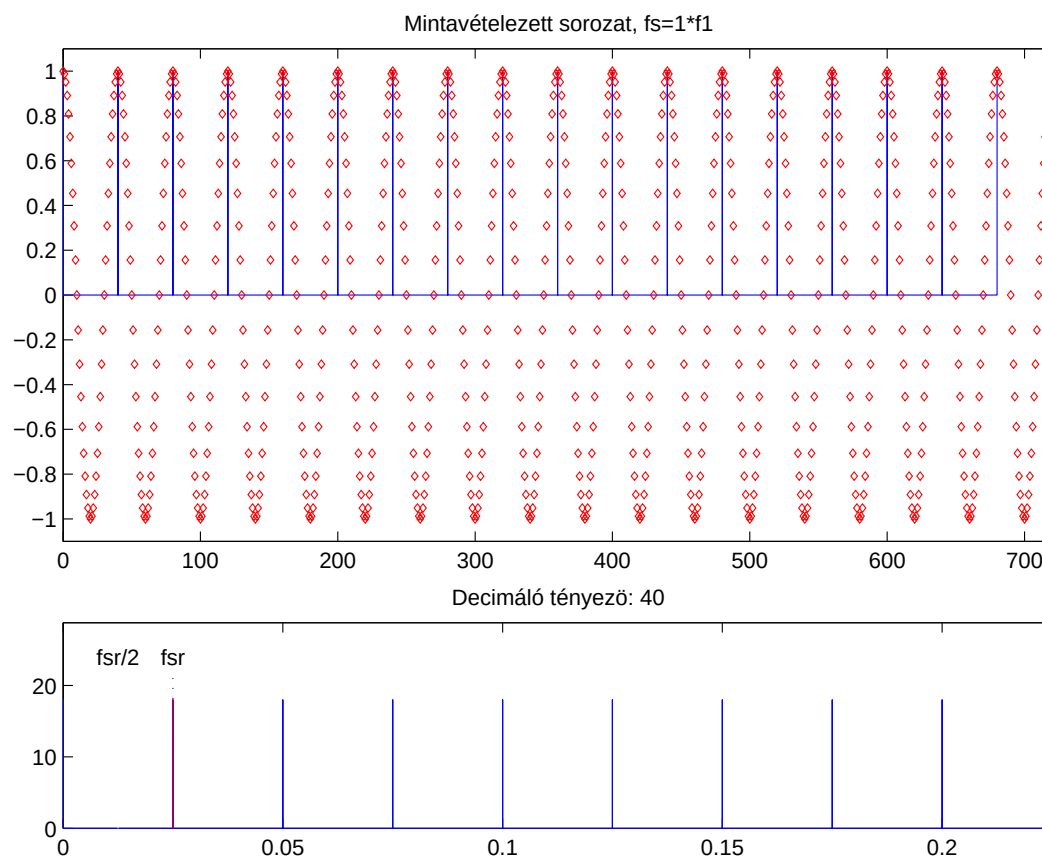
17. ábra. Mintavétel 2.5 minta/periódus



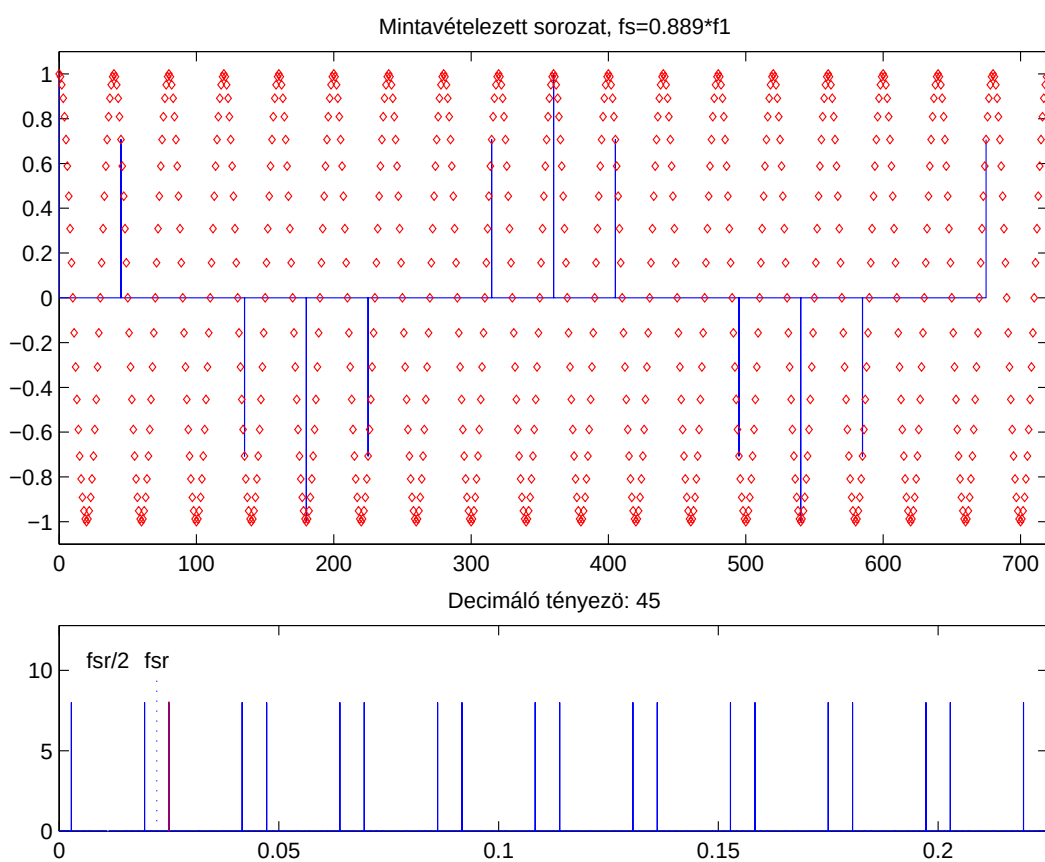
18. ábra. Mintavétel 1.67 minta/periódus



19. ábra. Mintavétel 1.11 minta/periódus



20. ábra. Mintavétel 1 minta/periódus



21. ábra. Mintavétel 0.889 minta/periódus

8. Nem koherens mintavételezés

8.1. Vázlat

- A DFT eredménye szinusz esetén nem koherens mintavételezéssel.
- Szivárgás és léckerítés hatás.
- Ablakozás. A Hann és Hamming ablak. Flat-top ablak, Interpolált FFT.
- LS becslés, Diszkrét négyszög ablak Fourier-transzformáltja. dB-ben megadott spektrum
- Átlapolásgátló szűrő

8.2. A DFT eredménye szinusz nem koherens mintavételezéssel

Koherens mintavételezésnél a sin egész számú periódusa esik az ablakba, a szinusz frekvenciájának megfelelő komponens DFT pontra esik.

Nem koherens mintavételnél nem egész számú a periódus, a frekvencia nem esik DFT pontra. $NT_s \neq kT_0$, $T_0 \neq \frac{NT_s}{k} \rightarrow f \neq \frac{kf_s}{N}$

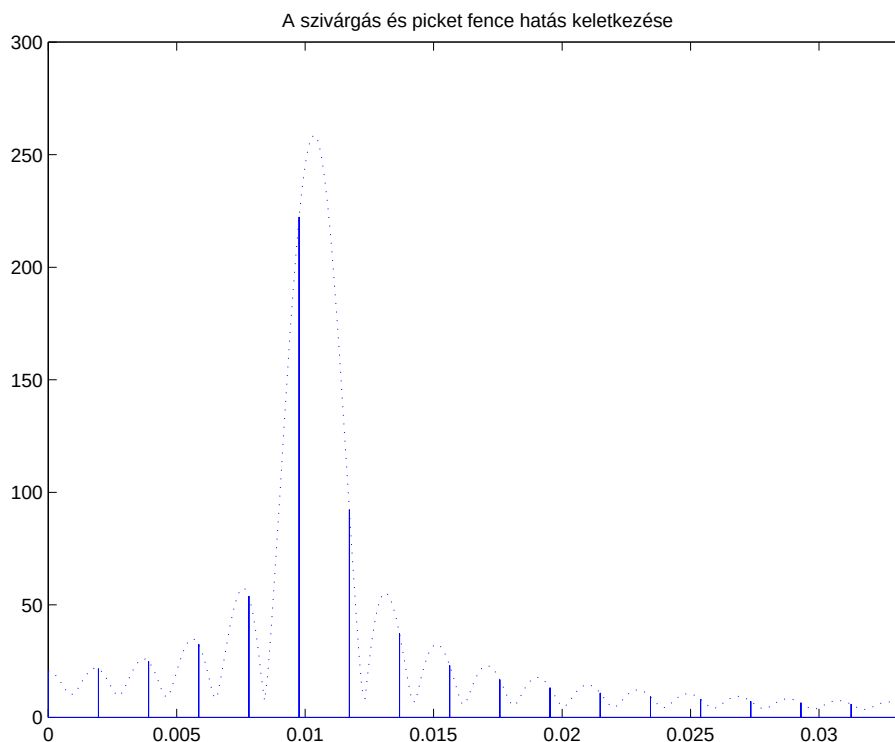
8.3. Szivárgás és léckerítés hatás

A regisztrátum szélén mardék periódus $\rightarrow$ ugrás.

Ez több hibát is okoz:

szivárgás más DFT pontokon is megjelennek komponensek, esetleg elfedhetnek értékes jelkomponenseket. oka a szűrőkarakterisztikák átfedése

léckerítés (picket fence) hatás a legközelebbi DFT pont (a csúcs) magassága nem $\frac{NA}{2}$, megtévesztő. oka a szűrőkarakterikák nem elég laposak a sávközép $\frac{2\pi}{N}(k \pm \frac{1}{2})$ környezetében.



22. ábra. A szivárgás és picket fence jelenség

A hiba kiküszöbölhető ablakozással

8.4. Ablakozás

Eddig négyszögablakkal vágtunk ki 1-1 szakaszt a jelből, a regisztrátum szélén lévő ugrás megmaradt. Szorozzunk meg ablakfüggvénnyel (súlyozás), kisimíthatja a széleket, javít a picket fence jelenségen.

Átlagolás helyett súlyozott átlagolás (w_k súlyok)

$$\sum_{k=0}^{N-1} w_k = 1 \text{ a torzítatlanság feltétele stacionárius jelek esetén}$$

Mivel:

$$E\{\hat{x}(n)\} = \sum_{k=0}^{N-1} w_k E\{y(n - N + k)\} = x \sum_{k=0}^{N-1} w_k$$

Mivel $y(i) = x - n(i)$, $E\{n(i)\} = 0$. Hátrány: főhullám szélessége korlátozza felbontást

Hann-ablak:

$$\frac{1}{N} \left(1 + \cos \frac{2\pi}{N} n\right), \quad -\frac{N}{2} < n < \frac{N}{2}$$

Emelt $\cos$ és NT-re korlátozó diszkrét négyszögablak szorzata. $\pm \frac{2\pi}{N}$ -nél eltűnnek a leszívások: frekvenciafelbontás romlik, de az ellentétes fázisú oldalhullámok összege kisebb oldalhullámokat eredményez, szivárgás csökken, főhullám szélesebb: max amplitúdóhiba is csökken. 2. deriváltban ugrás

Hamming-ablak

$0,54 + 0,46\cos$

kis oldalugrást megenged, hogy ezzel az oldalhullámok csökkenjenek. 1. deriváltban ugrás.

Flat-top

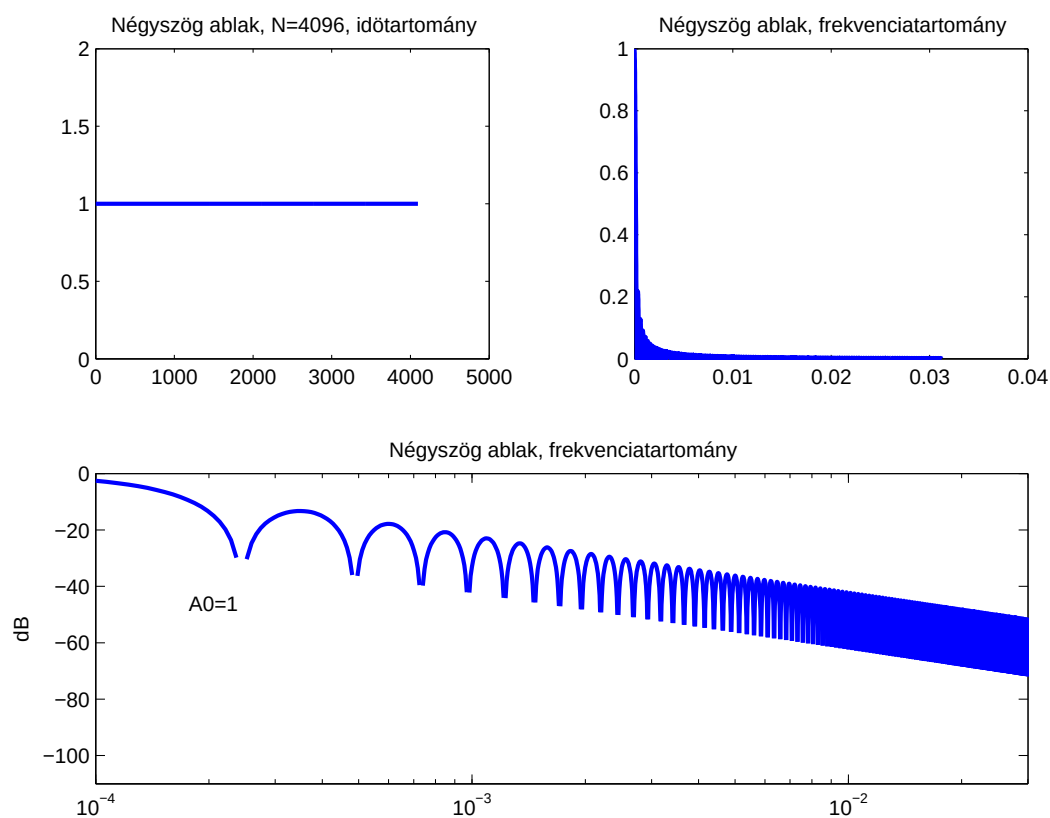
adott számú együttható mellett minimalizálja a max. amplitúdóhibát

$$A_0 + \sum A_k \cos \frac{2\pi kn}{N}$$

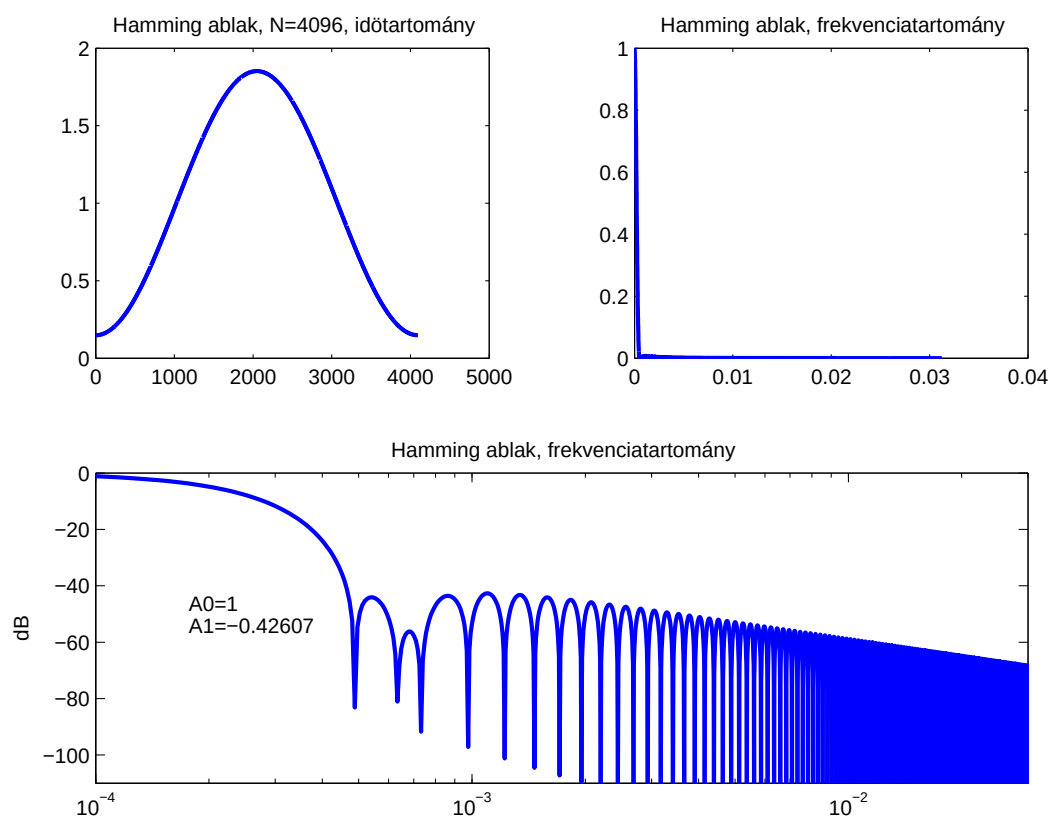
n. deriváltban ugrás: $\frac{1}{f_{n+1}} - \text{gyel}[-20(n+1)\text{dB/dekád}]$ csökkennek az oldalhullámok.

8.5. LS becslés, Diszkrét négyszögjel Fourier-transzformáltja

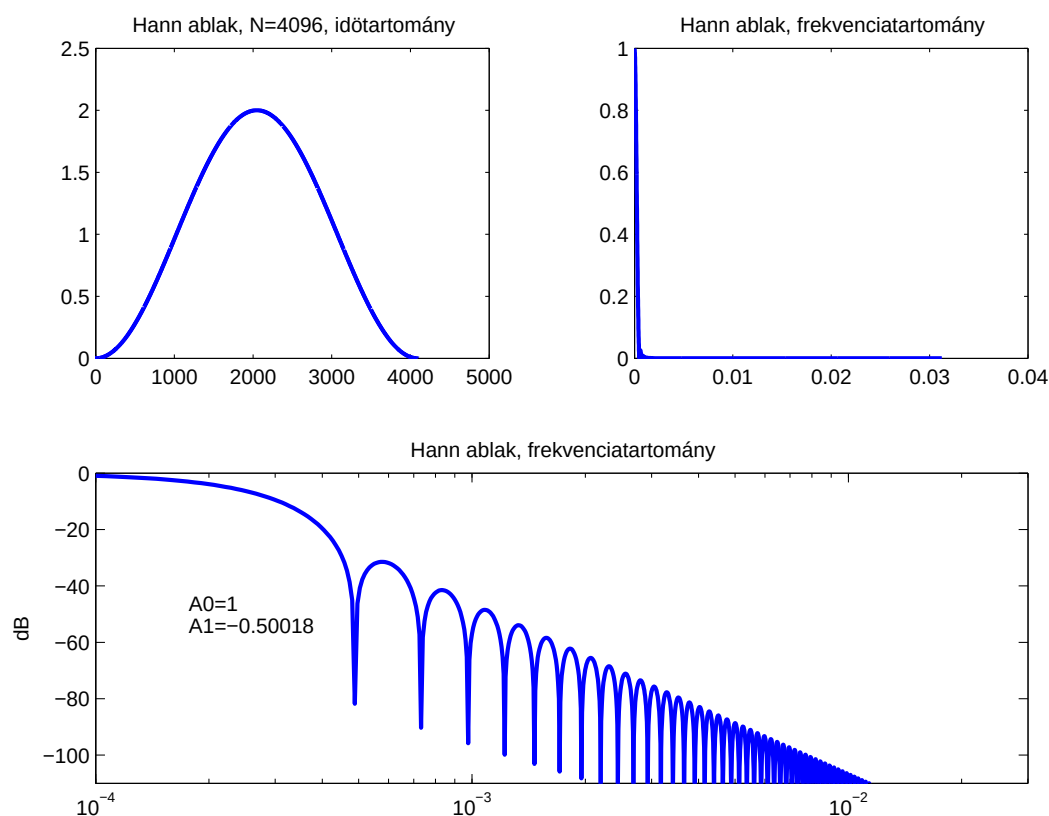
$$X_k = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{N} e^{-j2\pi \frac{ki}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} e^{-j2\pi \frac{ki}{N}} = \frac{1}{N} \frac{1 - e^{j2\pi \frac{Nk}{N}}}{1 - e^{j2\pi \frac{k}{N}}} = \frac{1}{N} \frac{e^{-j\omega T_s \frac{N}{2}}}{e^{-j\omega T_s \frac{1}{2}}} \cdot \frac{e^{j\omega T_s \frac{N}{2}} - e^{-j\omega T_s \frac{N}{2}}}{e^{j\omega T_s \frac{1}{2}} - e^{-j\omega T_s \frac{1}{2}}} \frac{\frac{1}{2j}}{\frac{1}{2j}} = \frac{1}{N} e^{-j\omega T_s (\frac{N-1}{2})} \frac{\sin(\frac{N}{2}\omega T_s)}{\sin(\frac{1}{2}\omega T_s)}$$



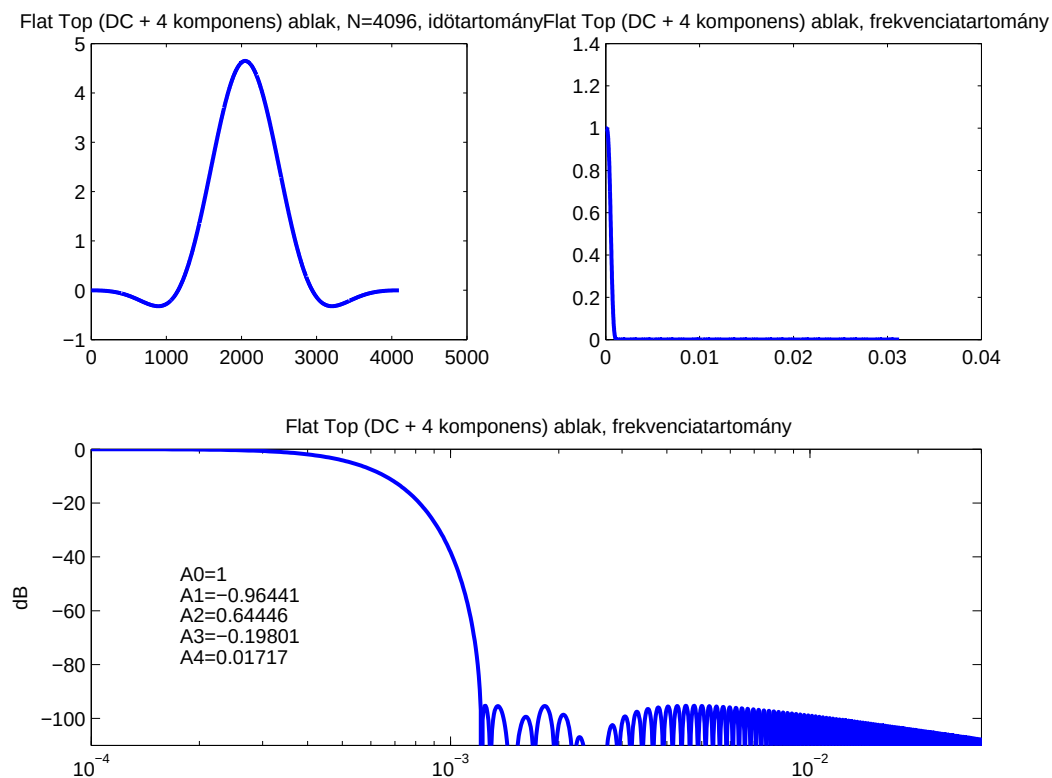
23. ábra. Négyszög ablak



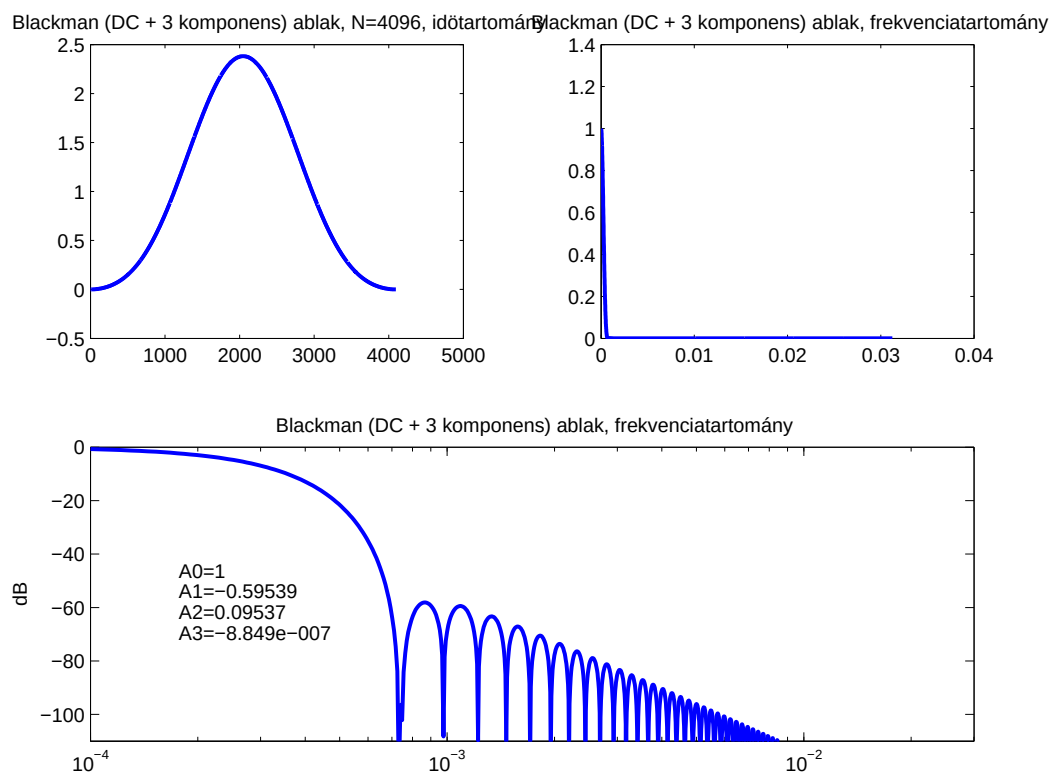
24. ábra. Hamming ablak



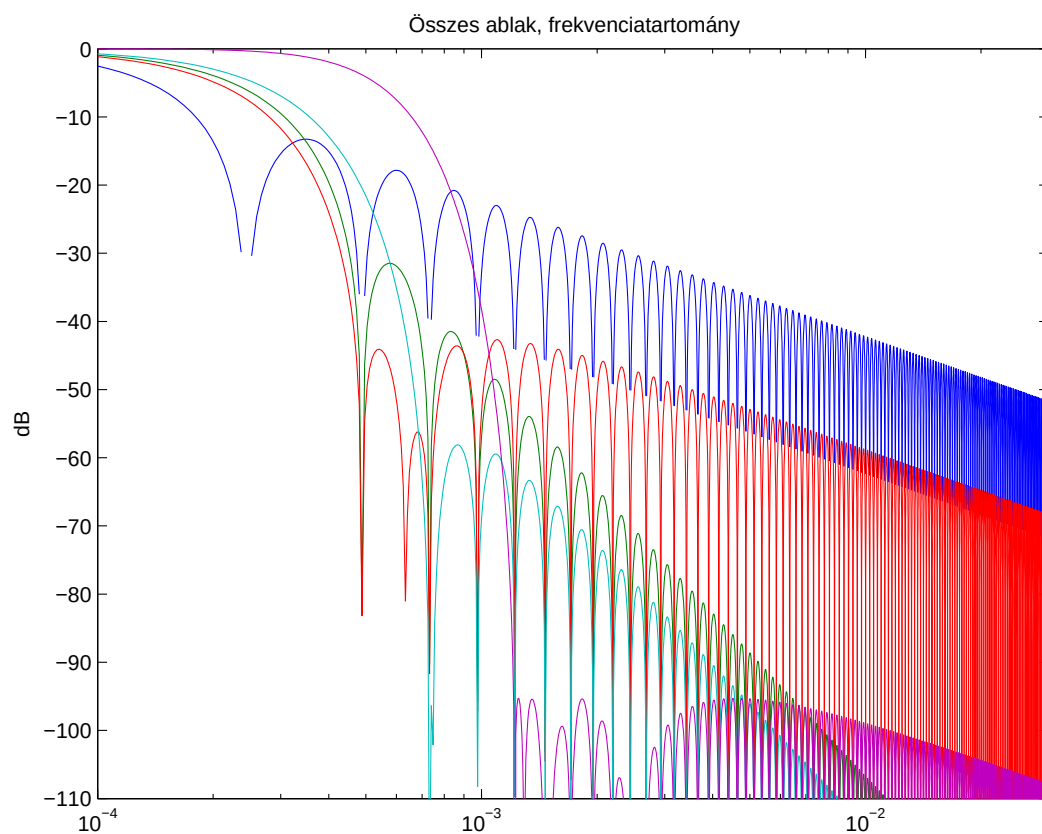
25. ábra. Hann ablak



26. ábra. Flat Top ablak



27. ábra. Blackman ablak



28. ábra. Összes Ablak

9. DFT eredmények sztochasztikus jelekre

9.1. Vázlat

- A DFT eredményének tulajdonságai sztochasztikus jelekre.
- A periodogram, mint spektrumbecslő. $|\chi_k|^2$ eloszlása.
- A periodogram varianciája.

9.2. A DFT eredményének tulajdonságai sztochasztikus jelekre

Ha DFT során a feldolgozandó jel folytonos spektrumú, akkor az eredmény:

$$X_k = \sum_{i=0}^{N-1} x_i e^{-j2\pi \frac{ki}{N}} = \sum_{i=0}^{N-1} x_i \cos\left(2\pi \frac{ki}{N}\right) - j \sum_{i=0}^{N-1} x_i \sin\left(2\pi \frac{ki}{N}\right) = \xi_k - j\eta_k$$

Ez adott k -ra komplex értékű valószínűségi változó. A valós és képzetes rész is normális eloszlású, ha a mintafüggvénye normális eloszlású folyamatból származik. Ha nem, akkor a centrális határeloszlás tétel miatt közelítőleg az.

$$\sin, \cos \Rightarrow E\{\xi_k\} - E\{\eta_k\} = 0$$

Varianciájuk azonos és korrelálatlanok

$E\{\xi_k, \eta_k\} \iff cov = 0$, ha $cov = 0$, akkor függetlenek.

$$E\{\xi_k, \eta_k\} = E\left\{\left(\sum_{i=0}^{N-1} x_i \cos\left(2\pi \frac{ki}{N}\right)\right)\left(\sum_{i=0}^{N-1} x_i \sin\left(2\pi \frac{ki}{N}\right)\right)\right\} = \dots$$

$$E\{y_i\} = 0, x_i = \mu + y_i$$

Gauss eloszlás esetén $cov = 0 \iff$ függetlenek

$$var\{X_k\} = E\{\overline{X}_k X_k\} = E\left\{\sum_{i=0}^{N-1} x_i e^{j2\pi \frac{ki}{N}} \sum_{l=0}^{N-1} x_l e^{-j2\pi \frac{kl}{N}}\right\} = \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} (N - |m|) \cdot R(m) e^{-j2\pi \frac{km}{N}} \approx N \cdot S(k)$$

$$var\{\xi\} \approx var\{\eta\} \text{ és } var\{\xi\} + var\{\eta\} = var\{\chi_k\}$$

$$var\{\xi\} \approx var\{\eta\} = \frac{N}{2} S(k)$$

$$\hat{S}(k) = \frac{1}{N} |\chi_k|^2$$

Folytonos spektrumú Fourier-transzformáltjának varianciája közvetlenkapcsolatban van a spektrummal. $\hat{S}(k) = \frac{1}{N} |\chi_k|^2$ várható értéke folytonos jeleknél a teljesítménysűrűség függvényével egyenlő. Kézenfekvő, mert a teljesítménysűrűség és az energiasűrűség (χ_k) fizikai értelmezése is hasonló.

$$E\{\hat{S}(k)\} = S(k) \star F\{\omega_{\Delta}(m)\}$$

$$\frac{N - |m|}{N} R(m) \quad \text{Bartlett ablakot most figyelembe vesszük}$$

Emiatt az éles csúcsok szétkenyednek (a konvolúció miatt), a meredek élek lelapulnak

A **periodogram**: T ill. N hosszú regisztrátumot készítünk, ezt Fourier-transzformáljuk majd normáljuk. Ez a teljesítménysűrűség spektrum becslője.

$$\hat{S}(f) = \frac{1}{T} |X(f, T)|^2 \quad \hat{S}(k) = \frac{1}{N} |\chi_k|^2 \quad \hat{S}(k) \sim S(f)$$

9.3. A periodogram varianciája

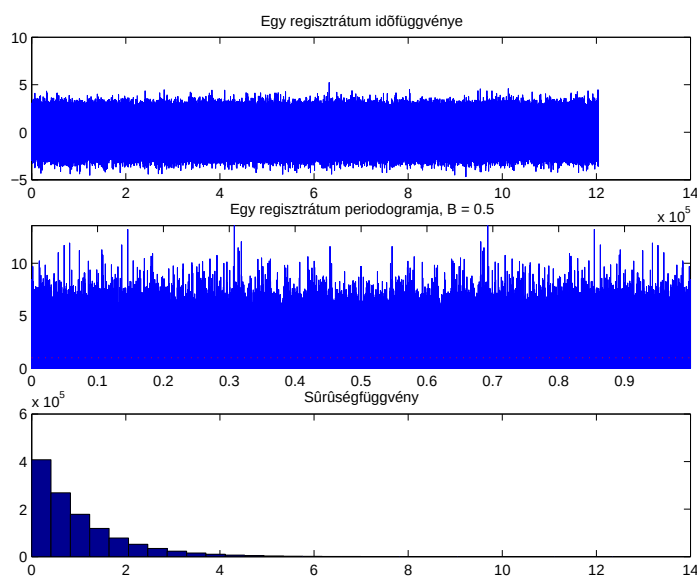
$$\text{var}\{\hat{S}(k)\}$$

$$|\chi_k|^2 = (\xi^2 + \eta^2) = \chi_2^2$$

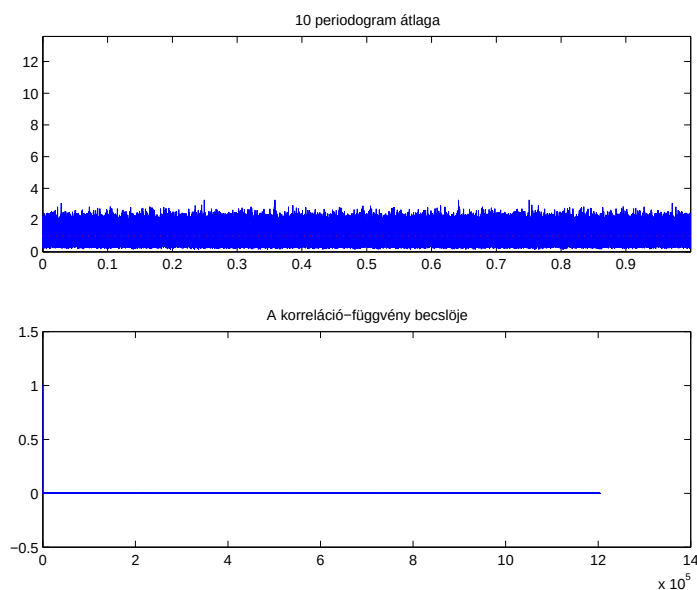
$$\hat{S}(k) = \frac{1}{N}|\chi_k|^2 = \frac{1}{N}(\xi^2 + \eta^2) \approx \frac{S(k)}{2}\chi_2^2$$

$$\text{var}\{\hat{S}(k)\} = \left(\frac{S(k)}{2}\right)^2 \text{var}(\chi_2^2) = S^2(k)$$

A variancia 100%, azaz a periodogramot átlagolni kell. **Welch módszer**többször egymás után mérjük (regisztrátumok) és számítjuk, majd az eredményeket átlagoljuk **Bartlett módszer**: nagy felbontással számítjuk sok pontra és a szomszédos vonalcsoportokat átlagoljuk.



29. ábra. Periodogram példa



30. ábra. Periodogram átlagolása

10. A cirkuláris konvolúció

10.1. Vázlat

- Cirkuláris konvolúció.
- A korreláció indirekt elvű becslése. A variancia megjelenése a korrelációbecslőben: a szomszédos becslőpontok korreláltak. Az eredmény varianciája.
- A cirkularitás és a Bartlett-ablakos torzítás kiküszöbölése.

10.2. Cirkuláris Konvolúció

Tegyük fel, hogy van két sorozatunk, $\{x_i\}, i = 0, 1, 2, \dots, N-1$, és $\{y_n\}, n = 0, 1, 2, \dots, N-1$. A két sorozat konvolúcióját úgy szeretnénk kiszámítani, hogy a folytonos Fourier-transzformációra vonatkozó kifejezést (konvolúciós-tétel), mely szerint a konvolúció megkapható a két jel Fourier-transzformáltjának szorzatát inverz Fourier-transzformálva:

$$c(\tau) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(\tau-t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)x(\tau-t)dt = F^{-1}\{F(x(t))F(y(t))\}, \quad (10.2.1)$$

a diszkrét esetre alkalmazzuk.

$$c(p) = \{x_i\} * \{y_n\} = \sum_i x_i y_{p-i}, \quad p = 0, 1, 2, \dots, N-2, \quad (10.2.2)$$

és az összeget az adott p -re létező párokra számítjuk ki, például:

$$\begin{aligned} c(0) &= x_0 y_0 \\ c(1) &= x_0 y_1 + x_1 y_0 \\ c(2) &= x_0 y_2 + x_1 y_1 + x_2 y_0 \\ &\vdots \\ c(2N-2) &= x_{N-1} y_{N-1} \end{aligned}$$

A felcserélhetőség itt is fennáll:

$$c(p) = \{x_i\} * \{y_n\} = \sum_i x_i y_{p-i}, \quad p = 0, 1, 2, \dots, N-2, \quad (10.2.3)$$

A p indexet lehetne így is skálázni:

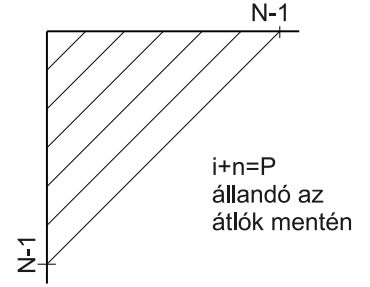
$$c(p) = \{x_i\} * \{y_n\} = \sum_i x_i y_{p+(N-1)-i}, \quad p = -(N-1), \dots, -1, 0, 1, (N-1), \quad (10.2.4)$$

így $c(p)$ kifejezés a nullára szimmetrikus szerkezetű lenne, de ez a lényegen nem változtat.

Alkalmazható-e a diszkrét esetre a konvolúció-tétel? Ha a DFT-ket felírjuk, a következőt látjuk:

$$\begin{aligned} c_{\text{circ}}(m) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{i=0}^{N-1} x_i e^{-j2\pi \frac{ki}{N}} \sum_{n=0}^{N-1} y_n e^{-j2\pi \frac{kn}{N}} \right) e^{j2\pi \frac{km}{N}} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{i=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} x_i y_n e^{-j2\pi \frac{k(i+n)}{N}} \right) e^{j2\pi \frac{km}{N}}, \quad m = 0, 1, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (10.2.5)$$

Vegyük észre, hogy a $p = n + i, p = 0, 1, 2, \dots, m = 0, 1, \dots, (2N - 2)$ átlók mentén nézve az exponenciális nem változik, ezért kiemelhető, és belül éppen $c(p)$ értékét kapjuk, ha $n = p - i$, és csak erre az átlóra összegezzük, akkor



$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} x_i y_n e^{-j2\pi \frac{k(i+n)}{N}} &\Rightarrow \sum_{p=0}^{N-1} \sum_{i=0}^p x_i y_{p-i} e^{-j2\pi \frac{kp}{N}} = \sum_{p=0}^{N-1} c(p) e^{-j2\pi \frac{kp}{N}} \quad p \leq N-1 \\ \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} x_i y_n e^{-j2\pi \frac{k(i+n)}{N}} &\Rightarrow \sum_{p=N}^{2N-2} \sum_{i=p-(N-1)}^{N-1} x_i y_{p-i} e^{-j2\pi \frac{kp}{N}} = \sum_{p=0}^{2N-2} c(p) e^{-j2\pi \frac{kp}{N}} \quad N-1 \end{aligned} \quad (10.2.6)$$

ezt behelyettesítve:

$$c_{\text{circ}}(m) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{p=0}^{2N-2} c(p) e^{-j2\pi \frac{kp}{N}} e^{j2\pi \frac{km}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{p=0}^{2N-2} c(p) e^{j2\pi \frac{k(m-p)}{N}}, \quad p = 0, 1, 2, \dots, 2N-2, m = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (10.2.7)$$

Ez a k szerinti összeg általában 0-t ad, kivéve, ha a kitevő N -nek egész számú többszöröse. Ezeket az értékeket kiemelve:

$$c_{\text{circ}}(m) = c(m) + c(m+N), \quad m = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (10.2.8)$$

Amit kaptunk az az, hogy a DFT-kre vonatkozó konvolúciós tétel NEM a szokásos értelemben vett konvolúciót adja, hanem a konvolúciónak és N -nel való eltoltjának az összegét. Ennek követlen jelentése is van. Vizsgáljuk meg a következő sémát ($N=7$):

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} & & & & & x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & & & \\ y_6 & y_5 & y_4 & y_3 & y_2 & y_1 & y_0 & | & y_6 & y_5 & y_4 & y_3 & y_2 & y_1 & y_0 \\ & & & & & \uparrow & & & & & & & & \downarrow & \end{array}$$

A függőleges vonaltól balra eső párok $c(m)$ -et adják (a rajzon $c(1)$ -et), a jobbra esők $c(m+N)$ -et. Úgy is felfogható, mintha eltoláskor az y_n sorozatot mintegy körbefordulva tolnánk az x_i sorozat elé. Vagyis azt bizonyítottuk be, hogy az IDFT(DFT DFT) művelet cirkuláris konvolúciót ad, vagyis ez felel meg a folytonos Fourier-transzformáció konvolúciós tulajdonságának.

Ha a két sorozat hossza eltérő, akkor a két DFT eltérő helyen számolja ki a diszkrét transzformáltat, és ezért a sorozatokat nem is tudjuk megfelelően összesorozni, a konvolúciós tulajdonságnak nincs értelme. A rövidebb sorozatot azonban nullákkal kiegészíthetjük, és ezen végezhetjük el a műveletet:

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} & & & & & x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & & & \\ 0 & 0 & y_4 & y_3 & y_2 & y_1 & y_0 & | & 0 & 0 & y_4 & y_3 & y_2 & y_1 & y_0 \end{array}$$

A cirkularitás a nullákkal kiegészített sorozatokra teljesül.

"Igazi" konvolúció úgy számítható ki, ha mindkét sorozatot annyi nullával egészíthetjük ki, hogy a cirkularitást jelentő párok mind kiessenek és az eredményből kiválogatjuk a kívánt tagokat:

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccc} & & & & & x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y_4 & y_3 & y_2 & y_1 & y_0 & | & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y_4 & y_3 & y_2 & y_1 & y_0 \end{array} \quad (10.2.9)$$

A példában látható 11-pontos DFT nem számítható ki könnyen. Ezért annyi nullát érdemes behelyezni, hogy a minták számával a legközelebbi 2-hatványt elérjük (itt ez 16).

10.3. A korreláció indirekt elvű becslése

A korrelációs függvény kiszámítható a spektrumból:

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) e^{j2\pi f\tau} df$$

Ha tehát van eljárásunk a spektrum közvetlen becslésére, akkor inverz Fourier-transzformációval előállítható a korrelációs függvény becslője is. Ilyen eljárás a direkt Fourier-transzformáció:

$$\hat{S}_{XY}(f) = \frac{1}{T} \overline{X(f, T)} Y(f, T)$$

ahol $X(f, T)$ a T hosszúságú mintaregisztrátum Fourier-transzformáltja. Mivel a Fourier-transzformáció az FFT algoritmus segítségével igen hatékonyan elvégezhető, sok adat esetén az indirekt korrelációbecslés kevesebb számítási kapacitást igényel, mint a közvetlen számítás.

10.4. Bartlet ablakos torzítás

Vizsgáljuk meg tehát az

$$\hat{R}_{XY}^c(\tau) = \int_0^{\frac{T}{\Delta t}} \frac{1}{T} \overline{X(f, T)} Y(f, T) e^{j2\pi f\tau} df$$

becslőt (az ún. *cirkuláris korrelációs függvényt*), illetve diszkrét megfelelőjét.

$$\begin{aligned} E\{\hat{R}_{XY}^c(i \Delta t)\} &= E\left\{ \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{N \Delta t} \left[\sum_{p=0}^{N-1} (x_p e^{j2\pi \frac{pk}{N}}) \Delta t \sum_{q=0}^{N-1} (y_q e^{-j2\pi \frac{qk}{N}}) \Delta t \right] e^{j2\pi \frac{ik}{N}} \Delta t \right\} = \dots = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{s=-(N-1)}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \left(1 - \frac{|s|}{N}\right) R_{XY}(s \Delta t) e^{je\pi \frac{(i-s)k}{N}} \end{aligned}$$

A k szerinti összegzésben az exponenciális tényezők (komplex egységgyökök) csak akkor nem ejtik ki egymást, ha $(i-s)$ az N -nek nem egész számú többszöröse: esetünkben $i-s=0$ vagy $i-s=N$. Ilyenkor viszont az N tag összegzésével az $\frac{1}{N}$ szorzó kiesik:

$$E\{\hat{R}_{XY}^c(i \Delta t)\} = \left(1 - \frac{i}{N}\right) R_{XY}(i \Delta t) + \frac{i}{N} R_{XY}[(i-N) \Delta t], \quad i = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

Azt kaptuk, hogy a háromszög alakú, Bartlett-ablakkal súlyozott korrelációs függvény a $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ intervallumon kívül elhanyagolható, ekkor ez az átmásolódás nem zavaró. Ha azonban $R(\tau)$ szélesebb, akkor az egymásmá-
solódás kellemetlen torzítást okoz.

Vizsgáljuk meg, miből is származik az összemácsolódás! A mintaregisztrátum az $i \Delta t$ ($i = 0, 1, \dots, N-1$) pontokban dott ($T = N \Delta t$ időtartam), és így Fourier-transzformáltja is N pontos. $X(f, T)$ -nek és $Y(f, T)$ -nek így a $\frac{k}{T}$ ($k = 0, \dots, N-1$) helyeken (N pont) számítottuk ki az értékeit. Az utána elvégzett szorzásnak azonban konvolúció felel meg az időtartományban, és így az $i \Delta t$ ($i = 0, \pm 1, \dots, \pm(N-1)$) pontokban kelle-
ne megkapnunk a korrelációs függvényt. Ennek a $2T$ korrelációhossznak azonban a frekvenciatartományban az $\frac{l}{2T}$ ($l = 0, \dots, 2N-1$) pontok felelnek meg, tehát a spektrumra kétszer sűrűbb mintavételezéssel lenne szük-
ségünk. Az N -pontos $X(f, T)$ -ből a mintavételi tétel értelmében a közbenső értékek is meghatározhatók, de a számítás meglehetősen körülményes. Ezért célszerűbb, ha az időtartományban kiegészítjük a mintaregisztrátu-
mokat N darab 0-val, és így $2N$ pontos diszkrét Fourier transzformációt hajtva végre a megfelelő pontokban kapjuk meg a transzformáltakat és a spektrumbecslőt. A másik megoldás az, hogy az időfüggvényt $\frac{T}{2}$ hosszra csonkítjuk.

11. A kvantálás tulajdonságai

11.1. Vázlat

- A kvantálás tulajdonságai szemléletesen.
- A kvantálás, mint a valószínűségi sűrűség-függvény speciális mintavételezése.
- A karakterisztikus függvény.
- A karakterisztikus függvény és a momentumok kapcsolata.

11.2. A kvantálás tulajdonságai szemléletesen

A kvantálás a folytonos jel értékbeli diszkretizálása, az egy sávba eső értékeket azonos számnak ábrázolva.

Biztosan van információvesztés, az eredeti jel nem állítható helyre **csak** a kvantált jel ismeretében, mert a kvantálás nemlineáris művelet. Kis változásokat nem jelez. Csak a sűrűségfüggvény és így a momentumok állíthatók helyre.

A jel amplitúdójának valószínűség-sűrűségfüggvénye megadja, hogy adott amplitúdószintek milyen valószínűséggel fordulnak elő a jelben. A kvantált jel valószínűség-sűrűségfüggvényét megkapjuk az eredeti jel valószínűség-sűrűségfüggvényének szűrésével és mintavételezésével. Az intervallumhoz tartozó valószínűség számítható, majd a kvantált jelben az intervallumhoz egy azonos területű Dirac-delta rendelhető.

Kvantáló hibája: $e(t) = x'(t) - x(t)$

Színusz kvantálása. A hiba sok helyen (a görbülettől függően) közel fűrészfog jellegű $\rightarrow$ közel azonos eloszlású $\pm \frac{q}{2}$ között. sin frekvenciája kicsi, a kvantálási hiba nagy sáv szélességű $\rightarrow$ többé-kevésbé fehér.

Bemenő jelből származó hiba:

- többé-kevésbé egyenletes eloszlású
- többé-kevésbé független az amplitúdótól
- nagy sáv szélességű a bemenő jelhez képest

Ezért a következő modell elfogadható/alkalmazható:

- korrelálatlan a jellel
- egyenletes eloszlású $\pm \frac{q}{2}$ között
- fehér spektrumú

Kvantálás:

- $f(x)$ konvolúciója egy négyszöglablakkal (egyenletes eloszlású hiba). korrelálatlanság, függetlenség miatt kell a valószínűségi sűrűség függvények konvolúcióját számítani.
- mintavételezés

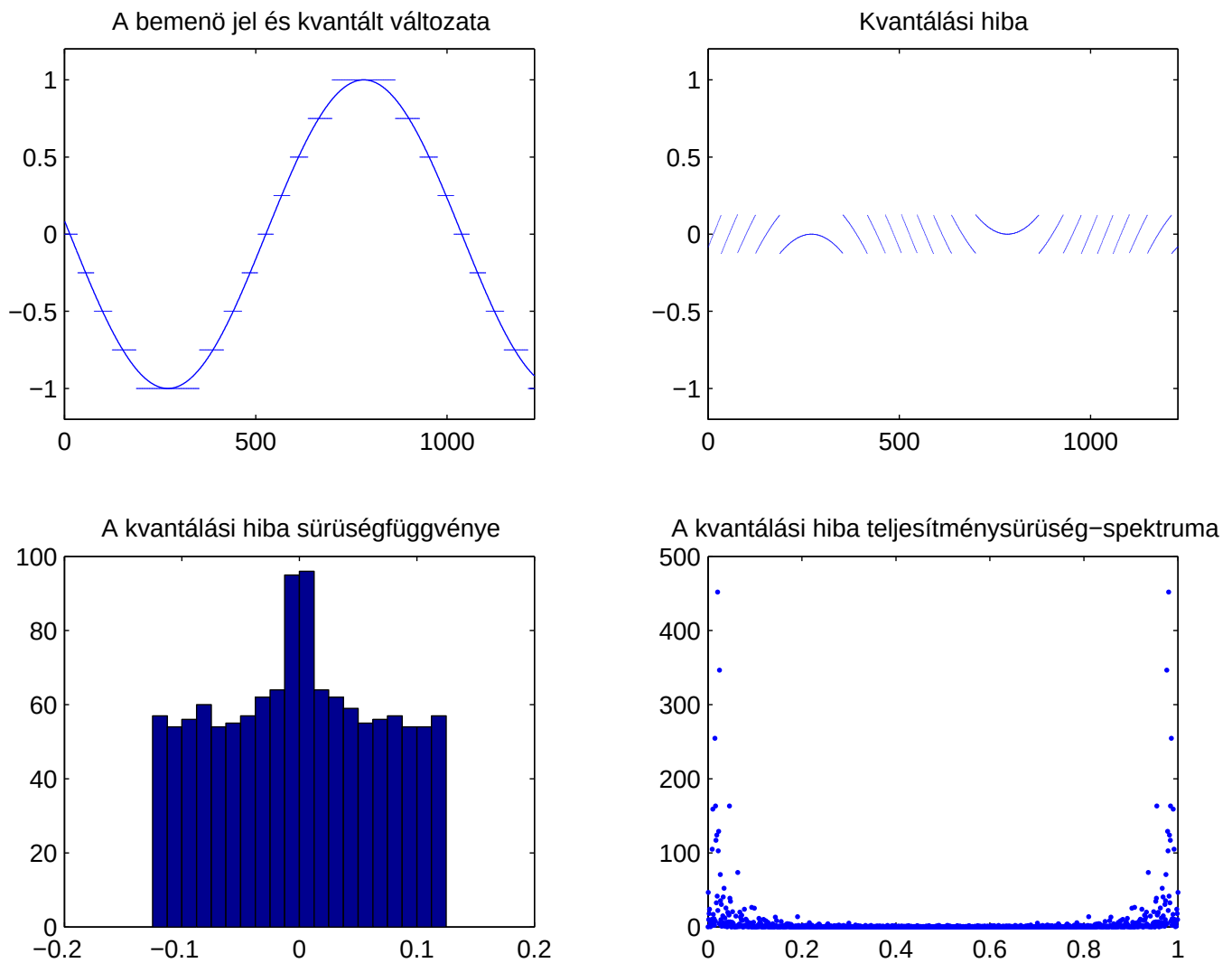
$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & -\frac{q}{2} < x < \frac{q}{2} \\ 0 & \text{élt} \end{cases}$$

Mintavételezés: Dirac-impulzus hozzárendelése a következő tulajdonság betartásával:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x_0 \delta(x) dx = \int_{-\frac{q}{2}}^{\frac{q}{2}} f(x) dx$$

A Dirac-impulzus intenzitása megegyezik $f(x)$ adott kvantálási lépcsőnek megfelelő területével.

$$f_n(x) \star f_x(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x - \alpha) f_x(\alpha) d\alpha = \int_{x - \frac{q}{2}}^{x + \frac{q}{2}} \frac{1}{q} f(\alpha) d\alpha$$



31. ábra. Szinusz kvantálása

A moduláló Dirac-impulzussorozat:

$$c(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} q\delta(x - mq)$$

q a konvolúció miatti $\frac{1}{q}$ kiejtése, hogy az eredeti feltevés érvényes maradjon.

A kvantált jel sűrűségfüggvénye:

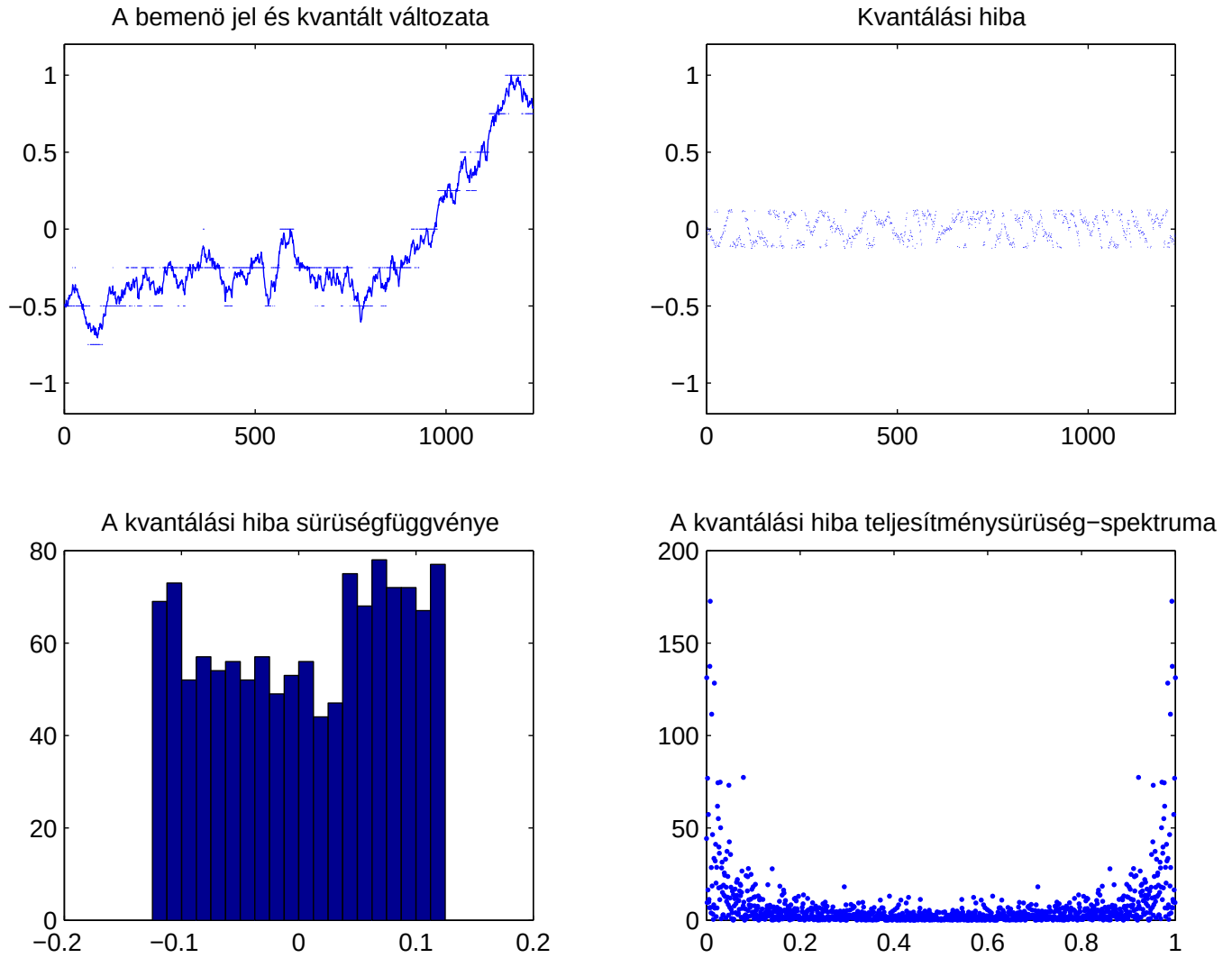
$$f_x'(x) = (f_n(x) \star f_x(x))c(x) = \sum \delta(x - mq) \int_{mq-\frac{q}{2}}^{mq+\frac{q}{2}} f_x(x)dx$$

Szemléletesen: a kvantált jel sűrűségfüggvénye nem folytonos, mert értékei csak diszkrét értékek lehetnek, az ezekhez tartozó valószínűséget pedig Dirac-impulzussorozattal jelezhetjük.

11.3. A karakterisztikus függvény

A karakterisztikus függvény a valószínűségrővidégsűrűségfüggvény inverz Fourier-transzformáltja

$$\Phi_x(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_x(x)e^{jux}dx = E\{e^{jux}\}$$



32. ábra. Zaj kvantálása

Hasonló a szerepe, mint az időfüggvény mellett definiált Fourier-transzformálté (a jel/valószínűség jellemzése), azonban közvetlen szemléletes jelentése nincs.

Az additív, egyenletes eloszlású zaj karakterisztikus függvénye:

$$\Phi_n(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) e^{jux} dx = \int_{-\frac{q}{2}}^{\frac{q}{2}} \frac{1}{q} e^{jux} dx = \text{sinc} \frac{qu}{2}$$

- $f(x)$ -ek konvolúciója $\rightarrow$ a tartományban szorás a Fourier-transzformáció konvolúciós tulajdonsága miatt
- figyelembe vesszük a Dirac-impulzussorozattal való szorzás miatti ismétlődéseket

A kvantáló kimenetének karakterisztikus függvénye:

$$\Phi_{x'}(u) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Phi_x(u + k \frac{2\pi}{q}) \text{sinc} \frac{q(u + \frac{k2\pi}{q})}{2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Phi_x(u + \frac{k2\pi}{q}) \text{sinc}(\frac{qu}{2} + k\pi)$$

11.4. A karakterisztikus függvény és a momentumok kapcsolata

$$\frac{d^n \Phi_x(u)}{du^n} = \int_{-\infty}^{+\infty} (jx)^n f_x(x) e^{jux} dx$$

$$\frac{1}{j^n} = \frac{d^n \Phi_x(u)}{du^n} \Big|_{u=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f_x(x) e^{jux} \Big|_{u=0} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f_x(x) dx = E\{x^n\}$$

$$E\{x^n\} = \frac{1}{j^n} \frac{d^n \Phi_x(u)}{du^n}$$

Az 1. momentuma:

$$\begin{aligned} E\{x'\} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{j} \frac{d}{du} \left(\Phi_x \left(u - \frac{2\pi k}{q} \right) \text{sinc} \left(\frac{qu}{2} - k\pi \right) \right) \Big|_{u=0} = \\ &= \frac{1}{j} \frac{d\Phi_x(u)}{du} \Big|_{u=0} + \frac{1}{j} \sum_{k=-\infty, \neq 0}^{\infty} \left(\Phi_x \left(u - \frac{2\pi k}{q} \right) \text{sinc} \left(\frac{qu}{2} - k\pi \right) \right) \Big|_{u=0} = E\{x\} + \frac{1}{j} \sum_{k=-\infty, \neq 0}^{\infty} \Phi_x \left(-\frac{2\pi k}{q} \right) \frac{q(-1)^{k-1}}{2\pi k} \end{aligned}$$

Az 1. momentum torzítatlan méréséhez elég $\Phi_x(-\frac{2\pi k}{q}) = 0$ teljesítése is $k = \pm 1 \dots$

12. A kvantálási zaj tulajdonságai

12.1. Vázlat

- A kvantálás zaj tulajdonságai.
- Egyenletes eloszlás, korrelálatlanság, fehérség.
- Korlátok újrakvantálás, DSP, határciklus-oszcilláció

12.2. A kvantálási zaj tulajdonságai

A kvantálás a folytonos jel értékbeli diszkretizálása, az egy sávba/lépcsőre eső értékeket azonos számmal ábrázolja. Biztosan van információvesztés, legfeljebb a sűrűségfüggvény és a momentumok állíthatók helyre, a pontos eredeti jel nem.

Ezt a hibát így definiáltjuk:

Tegyük fel, hogy statisztikailag egyenletes eloszlású zaj

Színusz kvantálása:

- a hiba sok helyen (ahol a görbület kicsi) közel fűrészfog jellegű $\rightarrow$ közel azonos eloszlású $\pm \frac{q}{2}$ közt
- a sin frekvenciája kicsi, a kvantálási hiba nagy sáv szélességű $\rightarrow$ többé-kevésbé fehér.

Bemenő jelből származó hiba:

- többé-kevésbé egyenletes eloszlású
- többé-kevésbé független az amplitúdótól (a jel lokális viselkedésétől függ)
- nagy sáv szélességű a bemenő jelhez képest, q csökkenésével nő

Ezért alkalmazható a következő modell: a kvantálási hibát additív zajjal odellezzük, amely:

- egyenletes eloszlású
- az eredeti jellel korrelálatlan (esetleg független)
- fehér spektrumú

Egyenletes eloszlású valószínűségi változó $\pm \frac{q}{2}$ között:

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & -\frac{q}{2} < x < \frac{q}{2} \\ 0 & \text{élt} \end{cases}$$

$$E\{x\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_n(x) dx = \frac{1}{2} x^2 \frac{1}{q} \Big|_{-\frac{q}{2}}^{\frac{q}{2}} = 0$$

$$\text{var}\{x\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - E^2(x) = \frac{x^3}{3} \frac{1}{q} \Big|_{-\frac{q}{2}}^{\frac{q}{2}} = \frac{q^2}{3 \cdot 8} - \left(-\frac{q^2}{3 \cdot 8}\right) = \frac{q^2}{3 \cdot 4} = \frac{q^2}{12}$$

A bemenő jellel korrelálatlan/független, ezért együttes sűrűségfüggvényük konvolúcióval számítható. $f_{x+n}(x) = f_x(x) \star f_n(x)$

A kvantálás pedig ennek az együttes sűrűségfüggvénynek a mintavételezése, diszkrét helyeken Dirac-impulzusok, ez modellezi, hogy csak diszkrét értékeket vehet fel a kvantált jel.

Karakterisztikus függvénye:

$$\Phi_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) e^{jux} dx = \int_{-\frac{q}{2}}^{\frac{q}{2}} \frac{1}{q} e^{jux} dx = \text{sinc} \frac{qu}{2}$$

Konvolvál $f(x)$ -ek $\Rightarrow$ inverz Fourier-transzformálás után a karakterisztikus függvények szorozódnak. Ha ismert $f_{x'}(x)$ és q , akkor dekonvolúcióval $f_x(x)$ megkapható.

Ha a kvantált jel momentumait mérjük, akkor az additív zaj modellje miatt kiszámíthatók az egyes momentumok torzításai az eredeti jel momentumaihoz képest.

Sheppard-korrektciók $x' = x + n$ alapján, $E\{n\} = 0$ és $E\{n^2\} = \frac{q^2}{12}$ felhasználásával:

$$E\{x\} = E\{x'\} \quad E\{x^2\} = E\{(x')^2\} - \frac{q^2}{12} \quad E\{x^3\} = E\{(x')^3\} - 3E\{x'\}\frac{q^2}{12}$$

Alkalmazhatók, ha a kvantálási tétel teljesül (II.), azonban a karakterisztikus függvény korlátos tartója ellentmond a valószínűségi sűrűségfüggvény korlátos szélességével (n idő, frekvencia, mintavételezés).

A gyakorlatban adható rá elfogadható korlát, hogy Φ_x -et 0-nak tekintsük vagy dithert alkalmazunk, ebben az esetben utólag korrigálni kell, mert növeli a varianciát, a korrekciók nem x -re, hanem $x + d$ -re érvényesek. Gauss-jelekre: $q < \sigma_x$, szinusz: $q \ll A$

Fehér spektrum feltétele:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S_n(f) df = \text{var}(n) = \frac{q^2}{12} < \infty$$

Ez ellentmond annak, hogy a spektrum konstans, folytonos időparaméteres esetén a kvantálási zaj nem lehet fehér. Azonban a gyakorlatban a kvantálás általában mintavételezéssel együtt fordul elő, ha a zaj határfrekvenciájára nézve nem tartjuk be a mintavételi tételt, akkor a zaj ismétlődő spektrumai átlapolódnak, az eredő spektrum közelítőleg fehér lesz.

$f_n < 9 \frac{\sigma_x}{q} B$ sávkorlátozott Gauss jelnél

$f_m < 3 \frac{A}{q} f_1$ szinusznál

A fehér zajspektrum előnyei:

- alakja nem függ a bemenő jeltől, egyszerűen és általánosan figyelembe vehető
- a teljesítmény egyenletesen el van osztva, nincsenek zavaró csúcsok
- a zaj mintái korrelálatlanok, az egyszerű átlagolás a leghatékonyabb varianciacsökkentés

12.3. Korlátok újrakvantálás, DSP, határciklus-oszcilláció

13. A kvantálási tétel

13.1. Vázlat

- A kvantálási tétel.
- A dither, mint "átlapolásgátló szűrő". A működés magyarázata.
- Háromszög eloszlású dither az audioteknikában. HP analizátor szinuszos ditherrel.
- A korrelálatlanság és a fehér zajspektrum feltételei.

13.2. A kvantálási tétel

A kvantálás a folytonos jel értékbeli diszkrétizálása, egy sávba tartozó értékeket azonos számmal jelöl. Az eredeti jel (a nemlineáris működés miatt) nem állítható vissza.

Viszont visszaállítható az eredeti jel valószínűségi sűrűségfüggvénye és momentumai, bizonyos feltételek teljesítése mellett, ez érthető, hiszen formailag azt mintavételeztük. Ezeket a feltételeket mondják ki a kvantálási tételek.

I. kvantálási tétel Ha az x jel karakterisztikus függvénye "sávkorlátozott", azaz $\Phi_x(u) = 0$, ha $|u| > \frac{\pi}{q} = \frac{\Psi}{2}$ akkor:

- a $\Phi_{x'}$ -ben található ismétlődések nem lapolódnak át
- az x karakterisztikus függvénye visszaállítható Φ_x -ből
- az x valószínűségi sűrűségfüggvénye visszaállítható $f_{x'}(x)$ -ből

Azaz ha q elég kicsi, akkor az eredeti valószínűségi sűrűségfüggvény helyreállítható.

II. kvantálási tétel Ha az x jel karakterisztikus függvénye "sávkorlátozott", azaz $\Phi_x(u) = 0$, ha $|u| > \frac{2\pi}{q} - \epsilon = \Psi - \epsilon$ ahol ϵ tetszőlegesen kicsi pozitív szám, akkor x momentumai helyreállíthatók a kvantált jel momentumaiból. Ennek nincs megfelelője az időtartománybeli tételek közt.

Ha teljesül az I. kvantálási tétel feltétele, akkor a jel karakterisztikus- és valószínűség-sűrűségfüggvénye helyreállítható.

$$f_{x'}(x) \rightarrow \text{pl.: sinc-es interpoláció } f_{x+n}(x) \rightarrow \text{dekonvolúció } f_x(x)$$

Ha a II. tétel feltétele teljesül, akkor $u=0$ környékén:

$$\Phi_{x'}(u) = \Phi_x(u) \text{sinc}\left(\frac{qu}{2}\right)$$

Azaz a zajmodellnek megfelelő független, egyenletes eloszlású zaj hozzákeverése, ekkor a zajmodellből ($x' = x+n$) számítható a momentumok torzítása és a Sheppard-korrekciókkal kapjuk az eredeti jel momentumait.

$$E\{n\} = \int_{-\frac{q}{2}}^{\frac{q}{2}} \frac{1}{q} x dx = 0$$

$$\text{var}\{x\} = \Psi_n^2 - E\{n\} = \Psi_n^2 = \frac{q^2}{12}$$

$$E\{x\} = E\{x'\} \quad E\{x^2\} = E\{x'^2\} - \frac{q^2}{12} \quad E\{x^3\} = E\{x'^3\} - 3E\{x'\} \frac{q^2}{12}$$

A gyakorlatban a jelek a kvantálási tételek feltételét közelítőleg teljesítik, mert a karakterisztikus függvény tartója ellentmond a valószínűségi sűrűségfüggvény korlátos szélességének (n idő, frekvencia a mintavételezésnél).

Általában adható elfogadható hibájú korlát.

Gauss jelekre: $q < \sigma_x$

Sin jelekre: $q \ll A$

Az additív zajmodell nem írja le pontosan a kvantálás hatását, a kvantálás pontos modelljét alkalmazva:

$$E\{x^n\} = \frac{1}{j^n} \frac{d^n \Phi_x(u)}{du^n} \Big|_{u=0}$$

Ebből az 1. momentum torzítása:

$$E\{x'\} = E\{x\} + \frac{1}{j} \sum_{k=-\infty, \neq 0}^{\infty} \Psi_x \left(-\frac{2\pi k}{q} \frac{q(-1)^{k-1}}{2\pi k} \right)$$

A $\Phi_x(-\frac{2\pi k}{q}) = 0 \quad k = \pm 1 \dots$ feltétel teljesülése is elég a torzítatlansághoz.

13.3. A dither, mint átlapolásgátló szűrő

a bemenő jelhez kevert, tőle statisztikailag független zaj, mely a kvantálási tételek feltételeinek érvényesülését segítik. Független jelek: $f_{x+d}(u) = f_x(x) \star f_d(x)$ karakterisztikus függvények a Fourier–transzformáció konvolúciós tulajdonsága miatt szorozódnak: $\Phi_{x+d}(u) = \Phi_x(u)\Phi_d(u)$ Ha teljesíti a torzítatlanságra vonatkozó feltételt a Dither, akkor a kevert jel is teljesíti.

II. kvantálási tétel feltételének teljesülését is elősegíti: kellően nagy amplitúdójú dither szélesíti a valószínűségi sűrűség függvényét, szűkül a karakterisztikus függvény (időtartománybeli szinusz vs tranziens analógia, Fourier–transzformált párok). A szorzás miatt, ha 0 a dither, összehúzva

Azonban a dither alkalmazásával a tételek az $x+d$ momentumaira lesznek érvényesek, és a nagy amplitúdójú dither növeli a varianciát, utólag korrigálni kell az értékével, ha ez rendelkezésre áll.

$$\text{var}\{x'\} = \text{var}\{x + n + d\} \approx \text{var}\{x\} + \frac{q^2}{12} + \text{var}\{d\}$$

Több kvantumszintnyi dither az A/D átalakítások nemlinearitását is kiküszöböli. Majdnem minden jó dithernek, ha kellően nagy amplitúdójú. Négyszögjel nem: kicsit segít, ha a kvantumlépcső határán van, rossz, ha amplitúdója csúcstól-csúcsig a kvantumlépcső egész számú többszöröse. Négyszög jel esetén jelfüggő a variancia, lüktető zaj jelenhet meg, audioteknikában zavaró.

Audioteknikában háromszögeloszlású dither (két, q szélességű dither konvolúciója) ekkor a várható érték torzítatlan és a variancia jelfüggetlen. $\Phi_d(u) \sim \text{sinc}^2, f_x(x) \pm q$ közt

13.4. A korrelálatlanság és a fehér zajspektrum feltételi

A 12. tétel végén

ha túl nagy f_s , akkor a fehérség nem teljesül

háromszög eloszlású: a legkisebb varianciájú az 1. rendűek közt és egyszerűen generálható.

Színuszos dither:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_x(x) dx = 1$$

Négyszög eloszlású dither:

$$\text{var}\{x'\} = \left(1 - \frac{\mu_x}{\frac{a}{2}}\right)^2 \text{ jelfüggő variancia}$$

14. A diszkrét átlagolás

14.1. Vázlat

- A diszkrét átlagolás eredményének varianciája az N függvényében. Közelítő leírás
- A sávkorlátozott fehér zaj. Összefüggés a mintavételi tétellel. Ekvivalens sáv szélesség.
- Variancia sávkorlátozott fehér zaj és kettős exponenciális autokovariancia esetén.
- Az analóg átlagolás torzítása, varianciája.

14.2. A diszkrét átlagolás

Az ideális átlagolás

$$\hat{x}(n) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} y(k)$$

$$y(k) = x + n(k)$$

Ahol, $E\{n(k)\} = 0$ és

$$E\{n(k)n(l)\} = \begin{cases} \sigma^2 & k = l \\ 0 & k \neq l \end{cases}$$

Az n . időpillanatban még csak az $n - l$ minta áll rendelkezésre. $\hat{x}(n)$ jobb becslő x -re, mint $y(k)$, ha x konstans és a zajra a fenti összefüggések érvényesek. Elvben $\hat{x}(n)$ is val.változó, többször kellene kiszámolni és átlagolni, azonban korrelálatlan, fehér spektrumú, 0 várható értékű zaj esetén a folyamat stacionaritása és ergodicitása miatt számítható.

Rekurzív kiszámítás

$$\hat{x}(n+1) = \hat{x}(n) + \frac{1}{n+1} (y(n+1) - \hat{x}(n))$$

Az átlagolás várható érték az ergodicitás miatt és a zaj tulajdonságai miatt:

$$E\{x(k)\} = x$$

$$E\{\hat{x}(n)\} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} E\{y(k)\} = x$$

Variancia

$$\text{var}\{\hat{x}\} = E\left\{\left(\hat{x}(n) - E\{\hat{x}(n)\}\right)^2\right\} = E\{\hat{x}^2(n)\} - E^2\{\hat{x}(n)\}$$

$$E\{\hat{x}^2(n)\} = E\left\{\left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} y(k)\right)^2\right\} = \frac{1}{n^2} E\left\{\left(\sum_{k=0}^{n-1} y(k)\right)^2\right\}$$

$\frac{1}{n^2}$ -et mellőzve és $y(k) = x + n(k)$ -t felhasználva:

$$\begin{aligned} E\left\{\left(\sum u(k)\right)^2\right\} &= E\left\{\sum (x + n(k)) \sum (x + n(l))\right\} = \\ &= E\left\{\sum \sum x^2 + 2 \sum \sum x n(k) + \sum \sum n(k)n(l)\right\} = \\ &= n^2 x^2 + 0 + \sum E\{n^2(k)\} = n^2 x^2 + n \sigma^2 \end{aligned}$$

$\frac{1}{n^2}$ -tel osztva az eredő variancia:

$$\text{var}(x(n)) = \frac{n^2 x^2 + \frac{\sigma_n^2}{n}}{n^2} = x^2 + \frac{\sigma_n^2}{n}$$

Mozgó átlagolásra $n \rightarrow N$ csere

14.3. Sávkorlátozott fehér zaj

fehér: konstans $S(f)$ ebből az is következik, hogy 0 a v.é $2B$ -vel kell mintavételezni (mintavételi tétel sztochasztikus jelekre)

$$\begin{aligned}\text{var}\{\hat{x}(n)\} &= E\left\{\left(\hat{x}(n) - x\right)^2\right\} = E\left\{\left(\frac{1}{n} \sum y(k) - x\right)^2\right\} = \\ &= \frac{1}{n^2} E\left\{\sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} (y(k) - x)(y(m) - x)\right\} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} E\left\{(y(k) - x)(y(m) - x)\right\} = \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} C_{yy}(m-k) = \frac{1}{n} \sum_{p=-(N-1)}^{N-1} \left(1 - \frac{|p|}{n}\right) c(p)\end{aligned}$$

$c(p)$ $p \neq 0$ helyeken elhanyagolható (korrelálatlan minták), akkor visszkapjuk a $c(0) = \sigma^2$ miatti $\frac{\sigma^2}{n}$ összefüggést.

Ha túlmintavételezzük, akkor integrálba megy át:

$$\frac{1}{T} \int_{-T}^T \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) C(\tau) d\tau \approx \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} C(\tau) d\tau = \frac{1}{T} S_C(0)$$

Sávkorlátozott fehér zajra:

$$S_C(0) \cdot 2B = \sigma^2 \quad S_C(0) = \frac{\sigma^2}{2B}$$

Felírhatjuk más teljesítménysűrűség függvény esetekre is, bevezetve ezzel az ekvivalens sávszélességet.

$$B_e = \frac{\sigma^2}{2S_C(0)}$$

$$B_e = \frac{\sigma^2}{2S_C(0)} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} S_C(f) df}{2S_C(0)}$$

$$\text{var}\{\hat{x}(n)\} \approx \frac{\sigma^2}{2B_e T}$$

Kettős exponenciális autokovariancia: $\frac{1}{1+f^2}$ alakú $S_C(f)$

Sávkorlátozott fehér zaj T hosszú regisztrátum mintáit átlagolva a variancia $\frac{1}{2BT}$ -ed részére csökken.

Más jelekre az ekvivalens sávszélességet felhasználva adható becslés. $2BT$: ekvivalens mintaszám, B sávszélességű jel T hosszú regisztrátumából maximum ennyi független adat nyerhető ki.

14.4. Az analóg átlagolás

Szélessávú zajt kiszűri az aluláteresztő szűrés, ezzel csökkenti a varianciát. $\sim$ exponenciális átlagolás a mintavételezés túlteljesítésével

$$H(f) = \frac{1}{1+j\omega K} \quad E\{\hat{\mu}_x(t)\} = \mu_x(1 - e^{-\frac{t}{K}})$$

$$b = -e^{-\frac{t}{K}} \rightarrow 0 \quad t \rightarrow \infty$$

15. A mozgó átlagolás és additív zajszűrés

15.1. Vázlat

- A mozgó átlagolás
- Additív zajszűrés

15.2. A mozgó átlagolás

Az átlagolás célja a variancia csökkentése. Ideális/egyszerű átlagolásnál a folyamatosan (adott időközönként) érkező mintákat összegezzük és átlagoljuk.

$$\hat{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{n-1} y(i)$$

Az n . időpontban még csak az $n - 1$ minta átlaga áll rendelkezésre.

Rekurzív kiszámítás

$$\hat{x}(n+1) = \hat{x}(n) + \frac{1}{n+1} [y(n) - \hat{x}(n)]$$

Ez az úgynevezett **predikciós-korrekción** alak. Először predikciót teszünk, jóslunk az eddigi ismeretek alapján (ez $\hat{x}(n)$), majd ezt korrigáljuk az újonnan beérkezett minta alapján.

Attól függően, hogy hány lépéssel jósunk előre k lépéses prediktorról beszélünk.

- $k = 0$: szűrés
- $k < 0$: simítás
- $k = 1$: pl. a fenti 1 lépéses prediktor

Ideális átlagolást állandó értékű, de korrelálatlan zajjal terhelt mérési eredményhez / mintákhoz célszerű alkalmazni:

Csúszóablakos átlagolás (az utolsó N -t)

csak adott (N) számú mintát vesz figyelembe az átlagoláskor, ennek szemléletesen az a magyarázata, hogy a jelenlegi érték a hozzá közeli mintákkal van szoros kapcsolatban, egyre függetlenebb a régi mintákból. Gépi feldolgozást megkönnyíti (csak adott számú mintát két átlagolni), (lassan) változó jelekre jobb eredményt ad, mint az egyszerű átlagolás, DFT szűrőbank

$$\hat{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{i=n-N}^{n-1} y(i)$$

Rekurzívan:

$$\hat{x}(n+1) = \hat{x}(n) + \frac{1}{N} [y(n) - y(n-N)]$$

varianciája: korrelálatlan fehér zaj, 0 várható érték és additív.

Blokkvázlat

Ez az egységkörön lévő pólus miatt nem stabil, stabilitás határhelyzetében van

$$\hat{x} = \hat{x} + \frac{1}{N} [y - z^{-N}y]$$

$$H(z) = \frac{1}{N} \frac{1 - z^{-N}}{z - 1} = \frac{1}{N} z^{-N} \frac{z^N - 1}{z - 1} = \frac{1}{N} \frac{z^N - 1}{z^N(z - 1)}$$

Stabilissá tétel a pólus módosításával...

nemrekurzív: a kettő megegyezik, mértani sor összegképlete

$$z^{-1} \frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}} = z^{-1} [1 + z^{-1} + \dots + z^{-(N-1)}]$$

$$H(z) = \frac{1}{N} [z^{-1} + z^{-2} + \dots + z^{-N}]$$

Frekvenciatartományban:

$$H(z) \Big|_{z=e^{j\omega T_s}} = \dots = \frac{1}{N} e^{-j\omega T_s (1 + \frac{N}{2} - \frac{1}{2})} \cdot \frac{\sin(\frac{N}{2}\omega T_s)}{\sin(\frac{1}{2}\omega T_s)}$$

Számláló N -szer gyorsabb $\rightarrow$ nullhelyein leszívások $0, 2\pi$ L'Hospital szabály, $0 - \pi$ csökken, $\pi - 2\pi$ nő

Pólus-zérus kép N -

16. Aluláteresztő szűrés, exponenciális átlagolás

16.1. Vázlat

- Aluláteresztő szűrés, mint átlagolás.
- Exponenciális átlagolás és aluláteresztő szűrés. Az exponenciális szűrés, mint aluláteresztő szűrő.
- A digitális és az analóg átlagoló és aluláteresztő szűrő összevetése, ekvivalenciája.

A mérési adatok feldolgozásánál legalapvetőbb eljárás az átlagolás. Mint ismeretes, sztochasztikus méréseknél a mérési adatfeldolgozást és a mérési eredmények megadását több helyen kíséri a várhatóérték-képzés.

Exponenciális átlagolás

Az egyponenciális átlagolás nem szűkíti le a megfigyelés időintervallumát, azonban a régi megfigyeléseket egyre csökkenő súllyal veszi figyelembe (fokozatosan "elfelejti" azok értékét). Az exponenciális átlagolás képlete:

$$\hat{\mu}_z(k) = \sum_{j=-\infty}^{k-1} z(j)w(k-1-j), \quad w(j) = \begin{cases} \frac{1}{Q} \left(\frac{Q-1}{Q} \right)^j & 0 \leq j, \\ 0 & \text{máshol} \end{cases}$$

$$\hat{\mu}_z(t) = \int_{-\infty}^t z(\tau)w(t-\tau)d\tau, \quad w(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{Q} e^{-\frac{\tau}{Q}} & 0 \leq \tau, \\ 0 & \text{máshol,} \end{cases}$$

ahol Q az átlagolás felejtési időállandója.

Az exponenciális átlagolás felírható rekurzív alakban is:

$$\hat{\mu}_z(k+1) = \left(1 - \frac{1}{Q}\right) \hat{\mu}_z(k) + \frac{1}{Q} z(k) \quad \text{ahol } Q > 1$$

16.2. Aluláteresztő szűrés, mint átlagolás

16.3. Exponenciális átlagolás és aluláteresztő szűrés

17. A mozgó átlagolás

17.1. Vázlat

- A mozgó átlagolás fésűszűrő+integrátor alakú "megvalósításának" stabilitása a pólus módosításával, az átviteli függvény módosítása
- Fogkitörés, fogkitörés 0-tól különböző frekvencián.
- Szűrőbank, ekvivalencia a DFT-vel.

17.2. A mozgó átlagolás...

Az átlagolás varianciacsökkentő eljárás. Egymás utáni minták összegét osztjuk a minták számával. pl.: Additív, egyeneletes/normál eloszlású (0 várható értékű) zajjal terhelt minták átlaga jobb becslő a mért értékre, mint az egyes minták önmagukban.

Az ideális átlagolásnál folyamatosan érkeznek a minták, és ezekből állít elő egy becslőt a középértékre:

$$\hat{x}(n) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} y(i)$$

Mozgó átlagolásnál csak az utolsó N mintát vesszük figyelembe és ezen végezzük el az átlagolást. Ennek létjogosultsága, hogy az aktuális minta a hozzá közeliakkal van szorosabb összefüggésben, pl.: változó jelek. Ideális átlagolás ilyen jelekre rosszabb eredményt ad.

$$\hat{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=n-N}^{n-1} y(k) \quad N: \text{átlagolási szám}$$

Csak N mintát dolgoz fel, az ablakokat kiértékelésenként továbbcsúsztatja.

33. ábra. csúszó ablak

Számítható rekurzív módon

$$\hat{x}(n+1) = \frac{1}{N} \sum_{k=n-N+1}^n y(k) = \frac{1}{N} \sum_{k=n-N}^{n-1} y(k) + \frac{1}{N} [y(n) - y(n-N)] = \hat{x}(n) + \frac{1}{N} [y(n) - y(n-N)]$$

Blokkvázlat:

$$H(z) = \frac{1}{N} (z^{-1} + z^{-2} + \dots + z^{-N})$$

a rekurzív képlet blokkvázlata:

$$H(z) = \frac{1}{N} z^{-1} \frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}} = \frac{1}{N} \frac{z^N - 1}{z^N (z - 1)}$$

$$z = e^{j\omega T_s}$$

$$H(z)|_{z=e^{j\omega T_s}} = \frac{1}{N} e^{-j\omega T_s} \frac{1 - e^{-jN\omega T_s}}{1 - e^{-j\omega T_s}} = \frac{1}{N} e^{-j\omega T_s} \frac{e^{-j\frac{N}{2}\omega T_s} \frac{e^{j\frac{N}{2}\omega T_s} - e^{-j\frac{N}{2}\omega T_s}}{e^{-j\frac{1}{2}\omega T_s} \frac{e^{j\frac{1}{2}\omega T_s} - e^{-j\frac{1}{2}\omega T_s}}}{e^{-j\frac{1}{2}\omega T_s}} = \frac{1}{N} e^{-j\omega T_s \frac{N+1}{2}} \frac{\sin(\frac{N}{2}\omega T_s)}{\sin(\frac{1}{2}\omega T_s)}$$

$$|H(z)|_{z=e^{j\omega T_s}} = \frac{1}{N} \left| \frac{\sin(\frac{N}{2}\omega T_s)}{\sin(\frac{1}{2}\omega T_s)} \right|$$

34. ábra. A mozgó átlagolás blokkvázlata

35. ábra. A rekurzív képlet blokkvázlata

36. ábra. A mozgó átlagoló amplitúdókarakterisztikája

17.3. A fésűszűrő+integrátor alakú megvalósítás pólus-zérus képe

37. ábra. A mozgó átlagolás pólus-zérus képe

A $p=1$ miatt nem stabil, diszkrét idejű rendszerekre az aszimptotikus stabilitás feltétele: $\forall i$ -re $|\lambda_i| < 1$, λ_i sajátérték, pólus

Módosítottuk a pólust, de ezzel a pólus-zérus kiejtés megszűnik, 0 lesz a DC átvitel $\rightarrow$ módosítsuk a zérusokat is.

$$\begin{aligned}
z\hat{X} &= 0,99\hat{x} + \frac{1}{N}(Y - 0,99^N z^{-N}Y) \\
(z - 0,99)\hat{x} &= \frac{1}{N}(1 - 0,99^N z^{-N})Y \\
\frac{\hat{x}}{Y} &= \frac{1}{N}z^N z^{-N} \frac{1 - 0,99^N z^{-N}}{z - 0,99} = \frac{1}{N}z^{-N} \frac{z^N - 0,99^N}{z - 0,99}
\end{aligned}$$

$z_m^N = 0,99^N \Rightarrow$ DSP-ben megvalósítva nem lesz pontos $p - z$ kiejtés, visszacsatolás kell, nyílt rendszerben nem megoldható.

Fésű szűrő.

A mozgó átlagolás blokkvázlatából elhagyva a $p = 1$ pólust úgynevezett fésűrőhöz jutunk (átviteli karakterisztikája miatt):

$$\begin{aligned}
Y(z) &= \frac{1}{N}X(z)(1 - z^{-N}) = \frac{1}{N} \frac{z^N - 1}{z^N} \\
H(z) &= \frac{1}{N}(1 - z^{-N}) = \frac{1}{N} \frac{z^N - 1}{z^N} = \frac{1}{N} \frac{\prod_{m=0}^{N-1} (z - z_m)}{(z - 0)^N} \\
y(n) &= \frac{1}{N}(x(n) - x(n - N)) \\
z_m^N &= 1 \quad m = 0 \dots N - 1 \quad z_m = e^{j\frac{2\pi}{N}m} \text{ N-edik egységgyökök}
\end{aligned}$$

$$H(z) \Big|_{z=e^{j\omega T_s}} = \frac{1}{N} \left(1 - e^{-jN\omega T_s} \right) = \frac{1}{N} e^{-j\frac{N}{2}\omega T_s} \left[e^{j\frac{N}{2}\omega T_s} - e^{-j\frac{N}{2}\omega T_s} \right] = e^{j[\frac{\pi}{2} - \frac{N}{2}\omega T_s]} \frac{2}{N} \sin\left(\frac{N}{2}\omega T_s\right)$$

A mozgó átlagolásnál látható módon az újabb pólusok -1 zérus kiejtésével kitörhetnek 1-1 fogat, ebből a fésűszűrőből, -1 leszívást "semlegesíthetnek".

17.4. Fogkitörés

$z^{-1} \rightarrow z^{-1}z_m$ helyettesítéssel a mozgó átlagolás átvitelében:

$$H_m(z) = \frac{1}{N} z^{-1} z_m \frac{(1 - z^{-1} z_m)^2}{1 - z^{-1} z_m} = \frac{1}{N} z^{-1} z_m \frac{1 - z^N}{1 - z^{-1} z_m} \quad m = 0 \dots N-1 \quad (17.4.1)$$

$z_m^N = 1$ -et felhasználva

$$H_m(z) \Big|_{z=e^{j\omega T_s}} = \frac{1}{N} e^{-j(\omega T_s - \frac{2\pi}{N}m)} \frac{1 - e^{-jN(\omega T_s - \frac{2\pi}{N}m)}}{1 - e^{-j(\omega T_s - \frac{2\pi}{N}m)}} = \frac{1}{N} e^{-j\frac{N+1}{2}(\omega T_s - \frac{2\pi}{N}m)} \frac{\sin\left(\frac{N}{2}(\omega T_s - \frac{2\pi}{N}m)\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}(\omega T_s - \frac{2\pi}{N}m)\right)}$$

Ami nem más, mint olyan szűrők, melyek átvitele $\frac{2\pi}{N}m$ -mel vett eltoltja a mozgó átlagolás karakterisztikájának. $\frac{2\pi}{N}m$ -edik fogat törli ki a módosítás.

17.5. Szűrőbank, ekvivalencia a DFT-vel.

A 17.4.1 képletben felfedezhetjük az alábbi mértani sor összegképletét:

$$H_m(z) = \frac{1}{N} z^{-1} z_m \left(1 + z^{-1} z_m + (z^{-1} z_m)^2 + \dots + (z^{-1} z_m)^{N-1} \right)$$

Elvégezve a beszorzást, megfordítva a sorrendet és kiemelve $z_m^N = 1$ -et:

$$H_m(z) = \frac{1}{N} \left[z^{-N} + z^{-(N-1)} z_m^{-1} + \dots + z^{-1} z_m^{-(N-1)} \right] \quad m = 0 \dots N-1$$

Ebből időtartományban:

$$\hat{x}_m(n) = \frac{1}{N} \left[y(n-N) + y(n-N+1) e^{-j\frac{2\pi}{N}m} + \dots + y(n-1) e^{-j\frac{2\pi}{N}m(N-1)} \right]$$

Ezt összevetve a DFT képletével:

$$X_k = \sum_{i=0}^{N-1} x_i e^{-j2\pi \frac{ki}{N}}$$

A két képlet az $\frac{1}{N}$ súlytényezőtől eltekintve megegyezik ($m = k$). Az m paraméterű szűrők összessége (szűrőbank) minden ütemben egy N elemű ($m = 0 \dots N-1$) komplex vektort állít elő a legutolsó N megfigyelés alapján. A jelből az $\omega T_s = \frac{2\pi}{N}m$ körfrekvenciájú Fourier-komponense jut a kimenetre.

18. Megfigyelőelmélet

18.1. Vázlat

- A megfigyelőelmélet alapjai. A megfigyelő általános feladata. Általános blokkvázlat.
- Egyenletek, a hiba állapotegyenlete.
- A véges lépésszámú beállítás feltétele.
- A rezonátoralapú rekurzív DFT analízátor

18.2. A megfigyelőelmélet alapjai

Megfigyelhetőség: egy ismeretlen állapotú rendszer kimenő és bemenő jelének bizonyos ideig tartó mérése után rekonstruálható-e a mérés kezdetekor fennálló állapot.

A mérnöki gyakorlatban ez annyit tesz: közelítőleg ismert (pl.: struktúra, paraméterek) rendszer mérésekor az eredményt hibákkal terhelve mérjük és ebből teszünk következtetést a kiindulási értékekre.

A rendszer megfigyelhető, ha $t_0 < t < t_v$ intervallumban megfigyelt $y(t)$ és $u(t)$ jelekből $x(t_0)$ (állapotváltozók) meghatározhatók

Két kritériuma van:

1. y jel valamennyi állapotváltozótól függjön
2. a rendszer pólusai különbözők legyenek

A rendszer megfigyelhető, ha az

$$0 = \begin{vmatrix} \underline{\underline{\mathbf{C}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{C}\mathbf{A}}} \\ \vdots \\ \underline{\underline{\mathbf{C}\mathbf{A}^{N-1}}} \end{vmatrix} \text{ megfigyelhetőségi mátrix rangja } N$$

Azaz N lépésben a figyelt kimenetben megjelenik minden állapotváltozó

Megfigyelő: olyan rendszer amely egy másik rendszer állapotváltozóinak vagy azoktól származtatott mennyiségeknek a meghatározására szolgál. Mérési eljárást valósítanak meg.

Felépítjük a vizsgált rész modelljének másolatát és adott stratégia felhasználásával a kimenet értékének megfigyelésével becsüljük a rendszer állapotát. A megfigyelhetőségi feltételnek elég az $U(t) = 0$ gerjesztés nélküli kezdeti értékkel rendelkező rendszerre teljesülnie.

38. ábra. predikciós-korrekcións séma

$M - \hat{M}$ a hiba visszacsatolása, K korrekciós stratégia, $g = 1$ másolja a kimenetet, $g = \frac{1}{n+1}$ átlagolás, $g = \frac{1}{Q}$ exponenciális átlagolás

Autonóm (önműködő) rész és megfigyelője (diszkrét idejű):

39. ábra. lineáris, mérendő- és megfigyelő rendszer

18.3. Egyenletek, a hiba állapotegyenlete

$$\begin{array}{ll} \underline{x}(n+1) = \underline{A} \underline{x}_n & \hat{\underline{x}}(n+1) = \underline{A} \hat{\underline{x}}_n + \underline{G} [\underline{y} - \hat{\underline{y}}] \\ \underline{y}(n) = \underline{C} \underline{x}(n) & \hat{\underline{y}}(n) = \underline{C} \hat{\underline{x}}(n) \\ \text{megfigyelő rendszer} & \text{megfigyelő} \end{array}$$

$$\hat{\underline{x}}(n+1) = \underline{A} \hat{\underline{x}}(n) + \underline{G} \underline{C} \underline{x}(n) - \underline{G} \underline{C} \hat{\underline{x}}(n) = [\underline{A} - \underline{G} \underline{C}] \hat{\underline{x}}(n) + \underline{G} \underline{C} \underline{x}(n)$$

$$\underline{x}(n+1) = \underline{A} \underline{x}(n)$$

$$\underline{x}(n+1) - \hat{\underline{x}}(n+1) = (\underline{A} - \underline{G} \underline{C}) [\underline{x}(n) - \hat{\underline{x}}(n)] = (\underline{A} - \underline{G} \underline{C})^{n-1} [\underline{x}(0) - \hat{\underline{x}}(0)]$$

Hibarendszer: az állapotváltozók különbségeire felírható egyenlet (közvetítési hiba)

Egészét tekintve a rendszer autonóm és páronként megegyező állapotváltozókat kell kapnunk a követési hiba eltűnésével. A $\underline{G}$ mátrix alkalmas megválasztásával tetszőleges dinamikájú rendszer létrehozható (ha teljesen megfigyelhető). Úgy állíthatjuk be, hogy a konvergencia gyorsabb legyen a rendszer egyéb változásainál. Ha $\underline{C}$ négyzetes, akkor $\underline{G}$ is az, és létezik $\underline{C}^{-1}$, amelyre $\underline{C} \underline{C}^{-1} = \underline{I}$

$$\begin{aligned} \underline{A} - \underline{G} \underline{C} &= 0 \\ \underline{G} &= \underline{A} \underline{C}^{-1} \end{aligned}$$

Adható olyan $\underline{G}$, amivel 1 lépéses konvergencia lehetséges. Szemléletesen: $\underline{C}$ négyzetes, azaz annyi állapotváltozó van, ahány kimenet $\underline{C}$ ismeretében a kimenetre számíthatók az állapot változók.

18.4. A véges lépésszámú beállítás feltétele

Annyi állapotváltozó, amennyi független egyenlet van. Ha $\underline{C}$ nem négyzetes, akkor 1 lépéses konvergencia nem lehetséges, de N lépéses igen, ha $\underline{A} - \underline{G} \underline{C}$ kontraktív, azaz a hibateljesítményt adott számú lépés alatt disszipálni képes. Ekkor

$$(\underline{A} - \underline{G} \underline{C})^N = 0$$

Azaz $\underline{A} - \underline{G} \underline{C}$ nilpotens mátrix, minden pólusa az origóban van, $H(z) = z^{-1}$ polinomja, azaz FIR típusú, karakterisztikus egyenlete $\lambda^N = 0$ alakú.

$\dim \underline{A} = N$, N -ed rendű, N . hatvány tűnik el

A legtöbb esetben létezik ilyen $\underline{G}$, amire $\underline{A} - \underline{G} \underline{C}$ nilpotens, azaz a rendszer állapotváltozóit N lépésből jósolni tudja.

Ha a megfigyelési csatornán keresztül zaj adódik hozzá, akkor a véges lépésszámú konvergencia nem teljesül. A megfigyelőelmélet a jelfeldolgozásban:

- elkészítjük a feldolgozandó rendszer koncepcionális (lehetséges) modelljét úgy, hogy a kiértékelés során meghatározandó paraméterek v. jelkomponensek a koncepcionális modell állapotváltozóival legyenek (lehetőség szerint lineáris) kapcsolatban.

- létrehozunk egy megfigyelőt, amely a koncepcionális modell állapotváltozóinak illetve azokkal kapcsolatban lévő mennyiségeknek a meghatározására alkalmas. pl.: DFT szűrő megfigyelő alakban.
- az N -re periodikus jelek modellje, ahol az állapotváltozók az egyes Fourier komponensek
- a komplex exponenciális jelek leírhatók megfigyelhetőségi fázisforgatáson keresztül visszacsatolt tárolókkal. Ilyenkor a kezdeti állapot egy komplex értékű jel amplitúdója és fázisa, a visszacsatolás a jel körfrekvenciáját adja. Az N -re periodikus jelek N tagú Fourier sorba fejthetők, N db 1 tárolós rendszer kimenetének összegzésével írhatók fel.

40. ábra. Komplex értékű periodikus jelek egy lehetséges modellje

Ez az az eset, amikor $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$ nem kvadratikussá, az N db állapotváltozó a skalár kimenet N mintája alapján N lépésben kényszeríthető ki.

$$\left(\underline{\underline{\mathbf{A}}} - \underline{\underline{\mathbf{G}}}\underline{\underline{\mathbf{C}}}\right)^N = 0 \rightarrow \underline{\underline{\mathbf{G}}} = \frac{1}{N}\underline{\underline{\mathbf{A}}}\underline{\underline{\mathbf{C}}}^T = \left[\frac{1}{T}z_0, \frac{1}{N}z_1, \dots, \frac{1}{N}z_{N-1}\right]^T$$

41. ábra. Periodikus jelet generáló rendszer modellje, és a DFT megfigyelő alakban

Fourier komponenseiből összeállított jel $\rightarrow$ mérjük a kimentet, majd előállítjuk ugyanezen állapotváltozókat. (akkor is, ha nem periodikus, az előző N érték DFT-jét) A jel felfogható úgy, mintha egy ilyen rezonátortól jött volna.

18.5. DFT szűrőbank

Ez a jel Fourier-komponenseit adja, komplex értékűeket, ezért 2 csatornát kell megvalósítani: valós és képzetes.

Ha a bemenet valós: a szűrőbank komplex rezonátorai konjugált páronként összevonhatók $\frac{N}{2}$ -re szimmetrikusan.

$$\varphi_m = \frac{2\pi}{N}m$$

42. ábra. A DFT-szűrő blokkvázlata

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}\{H_{R_m}(n)\} &= \frac{1}{2} \left[\frac{z_m z^{-1}}{1 - z_m z^{-1}} + \frac{z_m^{-1} z^{-1}}{1 - z^{-1} z^{-1}} \right] = \frac{z^{-1} \cos(\varphi_m) - z^{-2}}{1 - 2z^{-1} \cos(\varphi_m) + z^{-2}} \\
\operatorname{Im}\{H_{R_m}(n)\} &= \frac{1}{2j} \left[\frac{z_m z^{-1}}{1 - z_m z^{-1}} - \frac{z_m^{-1} z^{-1}}{1 - z_m z^{-1}} \right] = \frac{z^{-1} \sin(\varphi_m)}{1 - 2z^{-1} \cos(\varphi_m) + z^{-2}} \\
z_m + z_m^{-1} &= 2 \cos \varphi_m \\
z_m - z_m^{-1} &= 2j \sin \varphi_m
\end{aligned}$$

43. ábra. Valós és képzetes jelcsatorna megvalósítása

44. ábra. Az m-dik másodfokú rezonátortag egy lehetséges megvalósítása

A gyakorlatban a véges számábrázolás (és mert a zérusok és pólusok megvalósítása független) miatt a pólus zérus kiejtés nem tökéletes, instabillá válhat a rendszer, míg megfelelő alakban nem. A megfigyelő alak a globális visszacsatolás miatt a pontatlan paraméterekre itt kerekítési zajra is kevésbé érzékeny.

19. Digitális szűrés. Digitális szűrők, IIR, FIR

19.1. Vázlat

- Digitális szűrés. Digitális szűrők. IIR, FIR
- Specifikáció.
- Alapvető IIR tervezési módszerek: analóg szűrők bilineáris transzformációja, impulzus-invariáns módszer.
- Modellek átalakítása egymásba, pólus-ekvivalenciák.
- Frekvencia mintavételezés-stabilitás. Előnyök-hátrányok.

19.2. A digitális szűrés. Digitális szűrők

Szűrőkkel a bemenő jelet a frekvenciájuk függvényében módosítjuk. Majdnem minden rendszer szűrő, hisz az átviteli függvényük nem azonosan 1, a kimeneten megjelenő jel nem egyezik meg a bemenő jellel. Az analóg, folytonos idejű és digitális szűrők közti legnagyobb különbség az, hogy előbbiek időben és értékkészletben folytonos jelekkel dolgoznak, míg utóbbiak diszkrét idejű és kvantált értékkészletű mintasorozatot dolgoznak fel, módosítják a spektrumjukat a saját spektrumjuknak megfelelően. Átviteli függvényük általában nem konstans, ennek oka a dinamikus elemek, melyek frekvenciafüggővé teszik az eredő átvitelt. Digitális szűrőknél ezek a késleltetők, villamos hálózatban pedig az energiatároló elemek (tekercs, kondenzátor). A digitális szűrők olyan rendszerek, melyek az átvitelt specifikálják. Ez alapján az átviteli függvény felosztható záró, áteresztő és átmeneti tartományokra.

Átviteli függvény: $H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$.

Átviteli karakterisztika: $z = e^{j\vartheta}$ helyettesítés. $\vartheta = 2\pi \frac{f}{f_s}$ kapcsolat a folytonos idejű rendszerekkel.

Specifikáció: az átviteli függvény/karakterisztika megadása, a feladat olyan szűrőt tervezni, ami ezt valósítja meg vagy elfogadhatóan közelíti.

Az átviteli karakterisztika inverz z-transzformálásával kapjuk a digitális szűrő egyenletét

$$y(n) = \sum_{i=0}^{M-1} b_i x(n-i) - \sum_{i=1}^{N-1} a_i y(n-i)$$

19.3. IIR, FIR

IIR: Infinite Impulse Response

Végtelen impulzusválszú rendszer, nemrekurzív. A válasz kiszámításában a kimenet korábbi értékei is szerepet játszanak, ezért nem garantált, hogy n növelésével teljesen eltűnik

FIR: Finite Impulse Response

Véges impulzusválszú rendszer, rekurzív. A válasz kiszámításában csak a jelenlegi és korábbi értékei játszanak szerepet, a kimenet korábbi értékei nem. FIR szűrőnél: $A(z) = z^{N-1}$, $N-1$ pólus az origóban. $y(n) = \sum_{i=0}^{M-1} b_i x(n-i)$ Z-transzformálva kapjuk az átviteli függvényt, b_i együtthatók az átviteli függvény együtthatói is. IIR szűrő esetén $A(z)$ z-beli polinom. FIR szűrő esetén nagyobb foksám szükséges emiatt késleltetés.

Csoportkésleltetés

$$H(e^{j\vartheta}) = H(\vartheta) e^{j\varphi(\vartheta)} \quad \tau = -\frac{d\varphi(\vartheta)}{d\vartheta}$$

Ha τ konstans, akkor tetszőleges frekvenciájú bemenő jelet ugyanolyan mértékben késleltet, az átvitel alakhű, ennek feltétele, hogy a fázismenet lineáris legyen. $\varphi(\vartheta) = -k\vartheta$. $H(\vartheta)$ valós, 0 körüli szimmetrikus impulzusválszú felel meg az $e^{-jk\vartheta}$ késleltetés pedig olyan, hogy a kauzalitás teljesüljön. Lineáris átvitel IIR esetén elvben nem lehetséges, FIR szűrőnél automatikusan teljesül, a gyakorlatban elérhető, hogy az áteresztő tartományban lineáris legyen a FIR szűrő átvitele.

19.4. IIR szűrő tervezése

- specifikáció megadása, bilineáris transzformáció torzításának előtorzítása $\omega : [0, \infty) \Rightarrow \vartheta : [0, 2\pi]$
- analóg szűrőtervezés: jól kidolgozott, bevált módszerek
- analóg szűrő transzformációja digitálissá

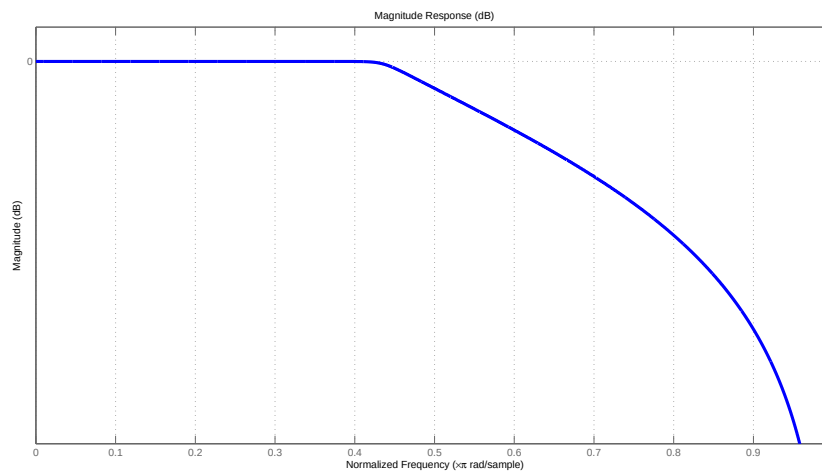
Analóg szűrőtervezés: approximációk alapján, melyek referens ($\omega_{\text{töréspont}} = 1$) aluláteresztő szűrőt közelítenek, ezt kell transzformálni a kívánt karakterisztikává.

Butterworth

$$\left. \begin{array}{l} \omega = 0 \\ \omega = \infty \end{array} \right\} \text{Taylor sorral közelít, maximálisan lapos (deriváltja 0 ezeken a helyeken)}$$

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 - \omega^{2N}}$$

N : foksám, minnél nagyobb annál meredekebb levágás



45. ábra. Butterworth approximáció

Chebisev

$\omega = \infty$: Taylor sor max lapos

$\omega = 0$: minimalizálja a hiba maximumát

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 - \epsilon^2 C_N^2(\omega)}$$

$$|H(\omega)| \in \left[\frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon^2}}, 1 \right]$$

$$C_N(\omega) = \cos(N \cdot \arccos(\omega))$$

N -ed rendű Chebisev-polinom. Szűrőtervezés szempontjából jó, négyzetes értelemben kisebb fokszámmal is meredekebb levágás.

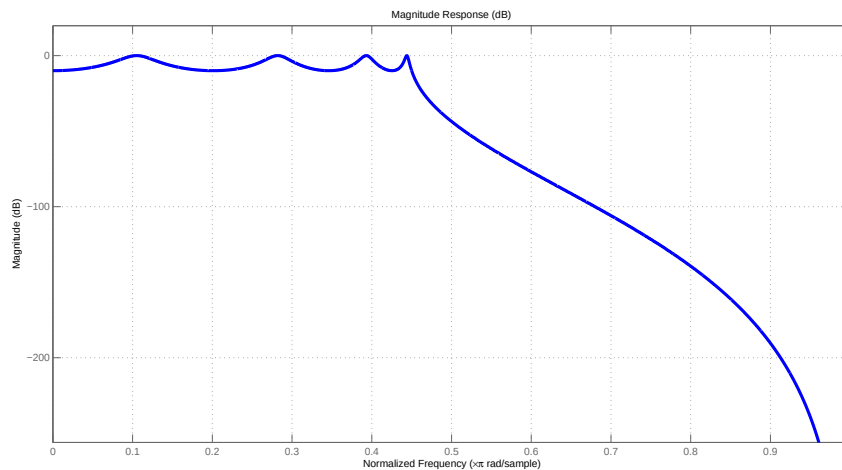
inverz-Chebisev

$\omega = \infty$: minimalizálja a hiba maximumát

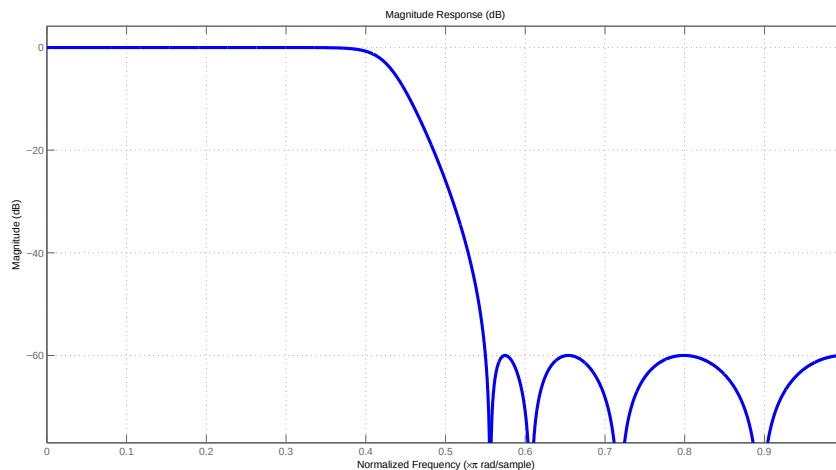
$\omega = 0$: Taylor sor max lapos

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{\epsilon^2 C_N^2(\frac{1}{\omega})}{1 + \epsilon^2 C_N^2(\frac{1}{\omega})} = 1 - |H(j\omega)|^2 \Big|_{C_{Chebisev}} \Big|_{\omega=\frac{1}{\omega}}$$

$$|H(\omega)| < \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon^2}}$$



46. ábra. Csebisev approximáció



47. ábra. inverz Csebisev approximáció

Cauer (elliptikus)

$$\left. \begin{array}{l} \omega = 0 \\ \omega = \infty \end{array} \right\} \text{minimalizálja a hiba maximumát}$$

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 - \epsilon^2 G_N^2(\omega)}$$

G_N a Csebisev polinom általánosítása. Adott specifikációt a Cauer teljesít a legkisebb fokszámmal, de nem maximálisan lapos és a fázisátmenet nem lineáris. Közel lineáris fázisátmenete a Butterworth approximációnak van.

Ellentmondó feltételek: kis foksám, meredek levágás $\longleftrightarrow$ lineáris fázisátmenet, maximális lapos

Analóg szűrők tervezése: hibából és átmeneti tartományból a foksám meghatározása, majd approximáció és frekvenciatranszformáció.

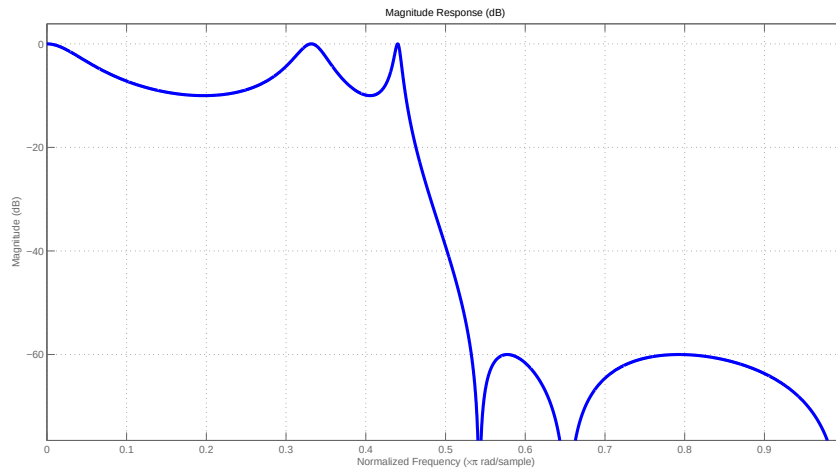
A tervezett analóg szűrők a referens ($\omega_t = 1$) aluláteresztőt közelítik, ezt kell transzformálni a kívánt karakterisztikára és frekvenciára.

Felüláteresztő:

$$p = \frac{1}{s} \quad p: \text{ az aluláteresztő Laplace-transzformáltjának változója}$$

Sáváteresztő:

$$p = \frac{s^2 + \omega_0^2}{s} \quad \omega_0 = \sqrt{\omega_2 \omega_3} = \sqrt{\omega_1 \omega_4}$$



48. ábra. Cauer (elliptikus) approximáció

Sávváró:

$$p = \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$$

19.5. IIR tervezési módszerek

A megtervezett analóg szűrő "digitalizálása":

Impulzus-invariáns módszer

$$h(n) = w(nT_s)$$

az impulzusválasz mintavételezésével. Stabil s -beli pólust stabil z -belibe képez. Illesztés az időtartományban. Gond: a mintavételi tételt be kell tartani, különben a frekvencia-tartományban átlapolódás

Bilineáris transzformáció

$$s = \frac{2}{T_s} \frac{z-1}{z+1} \quad \text{helyettesítés}$$

Az s tartomány bal felsíkját az egységkörbe, $s = j\omega$ tengelyt az egységkörbe képezi le. Stabil s -beli pólust stabil z -belibe képez, stabilitás határhelyzetében lévő stabilitás határhelyzetébe. Itt nincs átlapolódás ($H(s)$), de a frekvencia torzul

$$\omega \in [0, \infty) \rightarrow \vartheta \in [0, 2\pi] \text{ leképezés, más esetben } \vartheta = \frac{2\pi f}{f_s}$$

$$\omega = \frac{2}{T_s} \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2}$$

Ennek megfelelően kell az analóg szűrő specifikációját módosítani.

Mintavételezés a frekvenciatartományban: $H(f)$ adott N db pontban, ezt akarjuk közelíteni digitális szűrővel.

$$H(f_k) - \frac{B(z_k)}{A(z_k)} \text{ hiba minimális legyen (minimax, LS, stb... értelemben)}$$

$$\sum_{k=1}^N |H(f_k)A(z_k) - B(z_k)|^2 \text{ paraméteres LS feladat megoldása, de a stabilitás nem garantált}$$

Analóg	Digitális
– pontatlan v. drága elemek	+ pontos
– időinvariáns	+ DSP-ben olcsó
– nagy elektronikus zaj	+ csak kvantálási zaj
– nehezen változtatható	+ könnyen módosítható
+ nagy frekvenciás működés	– f_s korlátozott
+ egy egyszerű szűrő olcsó	– analóg rendszerekben drága

IIR	FIR
– stabilitási pontatlanság	+ stabil
– túlsordulás, határciklus	+ nincs túlsordulás
– sokszor nagy paraméterérzékenység	+ kis paraméterérzékenység
– színes kvantálási zaj	+ fehér kvantálási zaj
– nemlineáris fázis	+ lineáris fázismenet tervezhető
+ alacsony foksám	– nagy foksám (+késleltetés)
+ egyszerű tervezés	– sok együttható esetén számításigényes
+ fizikai rendszereket jól modellez	– fizikai rendszereket rosszul modellez

20. FIR tervezés

20.1. Vázlat

- Ablakozás
- Remez algoritmus
- FIR szűrő késleltetése

A szűrő olyan rendszer, amely a bemenő jelet módosítja (és így annak spektrumát is). Ilyen értelemben majdnem minden rendszer szűrő, mert átviteli karakterisztikájuk nem azonosan 1, valamint a dinamikus elemek miatt nem is konstans, hanem frekvenciafüggő az átvitel.

A FIR szűrő olyan diszkrét idejű rendszer, aminek impulzusválasza véges, nem rekurzív, a válasz kivalakításában csak a bemenet jelenlegi és korábbi értékei vesznek részt, a kimenet korábbi értékei nem (akauzális esetben a jövőbeliek is), de ez csak offline feldolgozásnál használható modell.

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = z^{-(N-1)} \cdot B(z) \text{ átviteli függvény}$$

$$y(n) = \sum_{i=0}^{M-1} b_i x(n-i)$$

Ezt z -transzformálva kapjuk az átviteli függvényt, azaz a b_i együtthatók megegyeznek az annak a számlálójában lévő $B(z)$ polinom együtthatóival, azaz az átviteli karakterisztika specifikációjának ismeretében inverz F illetve Z transzformálással előáll az együtthatókészlet. Szűrő karakterisztikája felbontható áteresztő, zárótartományokra, a FIR szűrő specifikációjánál ezt kell megadni.

FIR szűrő tervezése átviteli függvény mintavételezésével

1. specifikáció megadása vektorban. A frekvencia mintavételezés továbbfejlesztése. Ismert a $H(f)$, ezt mintavételezzük N pontban, ahol N sokkal nagyobb, mint a szűrő fókuszuma. $D(k) = D(N-k)$ és valósak, a DFT-nek megfelelően. $D(0)$ a DC átvitel.
2. IDFT-vel megkapjuk a prototípus szűrő impulzusválaszát. Ez valós és szimmetrikus 0-ra.
3. zérus időpillanatra szimmetrikusan el is toljuk.

$$h(k) = \left[h_0(N - \frac{M-1}{2}) \dots h_0(N-1), h_0, h_1, \dots, h_0(\frac{M-1}{2}) \right]$$

$\frac{M-1}{2}$ eltolás, ha M páratlan. A szűrő karakterisztikája már nem valós, de lineáris a fázismenete, mert csak az eltolás hoz képzetes tagot.

4. Gibbs-oszcilláció miatt a levágási pontoknál korrigálni kell (még nagy M -ek esetén is). $h'(k) = h(k) \cdot w(k)$ ablakozás, pl.: Hanning. Ezután $DFT\{h'(k)\}$, hogy valóban az előírt karakterisztikát valósítja-e meg. Legkisebb négyzetes elvnek megfelelően közelíti a karakterisztikát. Ennek problémája, hogy egyes helyeken nagy lehet az eltérés.

20.2. Remez algoritmus

Sokszor optimálisabb a hiba maximumát minimalizáló Remez algoritmus. Ez az IIR tervezésénél is használt Csebishev approximáció. Egyenletes ingadozású, lineáris fázisú FIR szűrő tervezhető vele.

$$H(\vartheta) = Q(\vartheta) \sum_{k=0}^{N-1} C_k \cos(k\vartheta)$$

$Q(\vartheta) = 1, \cos(\frac{\vartheta}{2}), \sin(\frac{\vartheta}{2}), \sin(\vartheta)$ a megvalósított karakterisztikától függően. Az algoritmus úgy állítja be az együtthatókat, hogy

$$\|E(\vartheta)\| = \max\{w(\vartheta)|D(\vartheta) - H(\vartheta)|\} \text{ minimális legyen}$$

$D(\vartheta)$: valós specifikáció. $w(\vartheta)$: súlyozás. $\exists c_k$ képlet, amire $\|E(\vartheta)\|$ minimális.

A hiba legalább $r + 1$ helyen felveszi a maximumát (ϑ_m), alternáló előjellel:

$$D(\vartheta_m) = \sum_{k=0}^{r-1} c_k \cos(k\vartheta_m) + (-1)^m \delta \quad m = 1 \dots r-1 \quad \delta \text{ a hiba max.}$$

Ez az egyenletrendszer c_k -ra megoldható.

Iteráció:

1. felveszünk egy ϑ_m készletet, ebből meghatározható egy c_k együtthatókészlet és δ
 - ki kell számolni $H(\vartheta)$ -t nagy felbontással (min 10x pont) az eredeti $\vartheta_1 \dots \vartheta_{r-1}$ készlet és δ nem optimális, kiadódik egy új $\vartheta_1 \dots \vartheta_{r-1}$ készlet és egy új δ hiba
 - erre adjuk meg az egyenletrendszert, majd újra elvégezzük a 2. pontot

Addig folytatjuk, amíg a hiba nem növekedik tovább.

Képletek

Egyéni képletek, melyek szükségesek lehetnek.

Várható érték

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

n-ed rendű centrális momentum

$$E\left((X - E(X))^n\right)$$

Szórásnégyzet

$$\sigma_X^2 = E\left((X - E(X))^2\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 f(x) dx$$

Átlagos négyzetes érték

$$\Psi^2\{x\} = E\{x^2\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = R_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f)df = \sigma_x^2 + \mu_x^2$$

Ez egyben teljesítmény is.

Átlagérték N minta esetén

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x_i$$

érték.

Autokorreláció-függvény Egy sztochasztikus folyamatra

$$R_{xx}(\tau, t) = E\left\{(x(t))(x(t + \tau))\right\} = C_{xx}(\tau, t) + \mu_x(t)\mu_x(t + \tau)$$

Stacionárius sztochasztikus folyamat esetén a kifejezés t -től nem függ:

$$R_{xx}(\tau) = E\left((x(t))(x(t + \tau))\right) = C_{xx}(\tau) + \mu_x^2$$

Autokovariancia-függvény Egy sztochasztikus folyamatra

$$\begin{aligned} C_{xx}(\tau, t) &= E\left\{\left(x(t) + E\{x(t)\}\right)\left(x(t - \tau) - E\{x(t + \tau)\}\right)\right\} \\ &= E\left\{x(t)x(t - \tau)\right\} - E\{x(t)\}E\{x(t + \tau)\} \\ &= R_{xx}(\tau, t) - \mu_x(t)\mu_x(t + \tau) \end{aligned}$$

Stacionárius sztochasztikus folyamat esetén a kifejezés t -től nem függ:

$$\begin{aligned} C_{xx}(\tau) &= E\left\{\left(x(t) + E\{x(t)\}\right)\left(x(t - \tau) - E\{x(t + \tau)\}\right)\right\} \\ &= E\left\{x(t)x(t - \tau)\right\} - E\{x(t)\}E\{x(t + \tau)\} \\ &= R_{xx}(\tau) - \mu_x^2 \end{aligned}$$

Diszkrét Fourier-transzformáció

$$X_k = \sum_{i=0}^{N-1} x_i e^{-j2\pi \frac{ki}{N}} \quad \text{inverz: } x_i = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{-j2\pi \frac{ki}{N}}$$

Eloszlás Az eseménytérre értelmezett valószínűségi mérték, vagyis definiálja az egyes események valószínűségét.

Eloszlásfüggvény Valós skaláris valószínűségi változó esetén az a függvény, melyet az $F(x) = P(\xi < x)$ valószínűség definiál, tehát az argumentumától balra esés valószínűsége. Többváltozós esetben az együttes balra esés valószínűsége: $F(x_1, x_2, \dots) = P(\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \dots)$

Ergodikus sztohasztikus folyamat Olyan stacionárius sztohasztikus folyamat, melyben a sokaság szerinti várható értéket időátlagból is ki lehet számítani, például így:

$$E\{x\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt$$

vagy ami ezzel ekvivalens:

$$E\{x\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$$

Fourier-transzformáció

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad \text{inverz: } x_k = \sum_{i=0}^{N-1} x_i e^{-j2\pi \frac{ki}{N}}$$

Színuszjelhez a következő Fourier-transzformáltat rendeljük hozzá:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} A \cos(2\pi f_1 t + \varphi) e^{-j2\pi ft} dt = \frac{A}{2} e^{j\varphi} \delta(f - f_1) + \frac{A}{2} e^{-j\varphi} \delta(f + f_1)$$

A Fourier-transzformáció felírható f helyett ω változóval is:

$$X_2(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad \text{inverz: } x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X_2(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Függetlenség Két valószínűségi változó független, ha együttes eloszlásfüggvényük az egyváltozós eloszlásfüggvények szorzata (ha a sűrűségfüggvények léteznek, akkor ez azokra is ugyanúgy vonatkozik):

$$F_{12}(x_1, x_2) = F_1(x_1)F_2(x_2), \quad f_{12}(x_1, x_2) = f_1(x_1)f_2(x_2)$$

Karakterisztikus függvény a valószínűség-sűrűségfüggvény (inverz) Fourier-transzformáltja:

$$\Phi_x(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{jux} dx = E\{e^{jux}\}$$

Közvetlen szemléletes jelentése nincs, szerepe hasonló az időfüggvény mellett definiált Fourier-transzformálthoz (mely a frekvencia szerinti "amplitúdó-eloszlást" adja meg).

Keresztkorreláció-függvény Két sztohasztikus folyamatra

$$R_{xy}(\tau, t) = E\{(x(t))(y(t + \tau))\} = C_{xy}(\tau, t) + \mu_x(t)\mu_y(t + \tau)$$

Stacionárius sztohasztikus folyamatok esetén a kifejezés t -től nem függ:

$$R_{xy}(\tau) = E\{(x(t))(y(t + \tau))\} = C_{xy}(\tau) + \mu_x\mu_y$$

Kereszt-teljesítmény-sűrűségfüggvény A keresztkorreláció-függvény Fourier-transzformáltja:

$$S_{xy}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xy}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

A $H(f)$ átviteli függvényű lineáris rendszer be- és kimenete között az összefüggés így is számítható:

$$S_{xy}(f) = S_{xx}(f)H(f)$$

Komplex valószínűségi változó Olyan kételemű valószínűségi vektorváltozónak tekintjük, melynek elemei a valós rész és a képzetes rész. Így a komplex normális valószínűségi változót a várható értékek 1x2-es vektora és a 2x2 elemű kovariancia-mátrix jellemzi.

$$f(x) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})}{2}}, \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & r\sigma_1\sigma_2 \\ r\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}, \quad |\boldsymbol{\Sigma}| = \sigma_1^2\sigma_2^2(1-r^2)$$

Korreláció

$$R_{xy} = E\{xy\}$$

Korrelációs együttható

$$r_{xy} = \frac{C_{xy}}{\sigma_x\sigma_y} = \frac{E\{(x - E\{x\})(y - E\{y\})\}}{\sqrt{E\{(x - E\{x\})^2\}E\{(y - E\{y\})^2\}}}$$

Korrelálatlanság A korrelációs együttható vagy a kovariancia 0 (és *nem* a korreláció 0!). Általában nem jelent két valószínűségi változó között függetlenséget, kivéve ha tudjuk, hogy az együttes eloszlásuk normális.

Kovariancia

$$C_{xy} = E\{(x - E\{x\})(y - E\{y\})\}$$

Kovariancia-függvény Általános esetben két sztochasztikus folyamatra a kereszt-kovarianciafüggvény:

$$\begin{aligned} C_{xy}(\tau, t) &= E\left\{(x(t) - E\{x(t)\})(y(t+\tau) - E\{y(t+\tau)\})\right\} \\ &= E\{x(t)y(t+\tau)\} - E\{x(t)\}E\{y(t+\tau)\} \\ &= R_{xy}(\tau) - \mu_x\mu_y \end{aligned}$$

Kovariancia-teljesítménysűrűségfüggvény Ugyanaz, mint a közönséges teljesítménysűrűségfüggvény, de a jel középtértékét elnyomjuk, vagyis az autokorreláció-függvény helyett az autokovariancia-függvényt Fourier-transzformáljuk:

$$S_{xc}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} C_x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

Ortogonalitás A korreláció nulla:

$$R_{xy} = E\{xy\} = 0$$

Ez nem ekvivalens sem a függetlenséggel, sem a korrelálatlansággal!

Periodogram A teljesítmény-sűrűségfüggvény becslője közvetlenül a mért regisztrátumból:

$$\hat{S}_{xy}(f) = \frac{1}{T} \overline{X(f, T)Y(f, T)}, \text{ vagy } \hat{S}_{xyk} = \frac{1}{N} \overline{X_k Y_k}$$

Periodikus realizációjú sztochasztikus folyamat Olyan sztochasztikus folyamat, melynek realizációi periodikus jelek valamilyen közös T periódusidővel. Legegyszerűbb a véletlen fázisú szinuszjel. Ez utóbbi felfogható a ϕ fázis mint valószínűségi változó eloszlása leképezésének a függvények terére, ezért a ϕ fázis sűrűségfüggvénye segítségével kiszámítható minden jellemező:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

Stacionárius sztochasztikus folyamat Olyan folyamat, melynek jellemzői (momentumai) az időponttól nem függenek. Gyenge stacionaritásról beszélhetünk, ha az első két momentumra igaz, erősről, ha minden momentumra (és a sűrűségfüggvényekre is) igaz. A sűrűségfüggvényekre vonatkozó állítás valamivel általánosabb, mint a momentumokra vonatkozó.

Sűrűségfüggvény (valószínűség-sűrűségfüggvény) Az eloszlásfüggvény deriváltja (ha ez létezik). $f(x)dx$ annak a valószínűségét adja meg, hogy a valószínűségi változó egy x körüli dx szélességű intervallumba esik. Diszkrét (illetve kevert) eloszlású valószínűségi változókhoz Dirac-deltákat rendelünk hozzá:

$$f(x) = \sum_i P_i \delta(x - x_i)$$

Szórás A szórásnégyzet vagy másképp a variancia pozitív négyzetgyöke.

Szórásnégyzet ugyanaz, mint a variancia

Szorzat Fourier-transzformáltja (konvolúció)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)w(t)e^{-j2\pi ft} dt &= X(f) \star W(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f-g)W(g)dg \\ \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)W(f)e^{j2\pi ft} df &= x(t) \star w(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau)w(\tau)d\tau \end{aligned}$$

Sztochasztikus folyamat Egy függvényhalmazon (lehetséges realizációk = elemi események) értelmezett valószínűségi-eloszlás (valószínűségi mérték). A t időhöz rendelt értékek az $x(t)$ paraméteres valószínűségi változót adják. Alaptétel: a fenti definíció elvivalens az összes $x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_M)$ valószínűségi változó-csoportok eloszlásfüggvényeinek megadásával.

Teljesítmény-sűrűségfüggvény (teljesítménysűrűség spektrum) Az autokorreláció-függvény Fourier-transzformáltja:

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau)e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

$S(f)df$ megadja az f körüli df szélességű intervallumba eső teljesítményt. A $H(f)$ átviteli függvényű lineáris rendszer be- és kimenete között az összefüggés így is számítható:

$$S_{yy}(f) = S_{xx}(f)|H(f)|^2$$

Várható érték (vagyközepérték)

$$\mu_x = E\{x\} = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

Ergodikus folyamatoknál helyettesíthető az időátlaggal.

Variancia

$$var\{x\} = Bbgl\{(x - E\{x\})^2\} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xc}(f)df = \Psi_x^2 - \mu_x^2$$