INFOANALÍZIS2 2.ZH JAV

2016 november 18.

Feladat	1.	2.	3.	4.	5.	$\sum$
max. pontszám	10	10	10	10	10	50
elért pontszám						

NÉV
NEPTUN KÓD
GYAK VEZ

1. Feladat. Tekintsük a következő függvényt:

$$f(x,y) = \frac{x}{y-x}.$$

Legyen $f(0,0) = 0$. Milyen irányban létezik az iránymenti derivált az origóban?

2. Feladat. Tekintsük a következő függvényt:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Milyen irányban létezik iránymenti derivált az origóban?

3. Feladat. Tekintsük a következő függvényt:

$$f(x,y) = \frac{x}{y-x}, \quad x \neq y.$$

Legyen $f(0,0) = 0$. Adjuk meg a függvény parciális deriváltfüggvényeit ahol léteznek!

4. Feladat. Tekintsük a következő függvénysorozatot:

$$f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$$

Állapítsuk meg konvergenciatartományát és határfüggvényét! Egyenletesen konvergens-e a függvénysorozat a konvergenciatartományán? Ha nem, van-e olyan részhalmaza a konvergenciatartománynak, ahol egyenletesen konvergens?

5. Feladat. Határozzuk meg a következő hatványsor konvergenciatartományát!

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n^2 2^n}.$$

1. Feladat. Tekintsük a következő függvényt:

$$f(x,y) = \frac{x}{y-x}.$$

Legyen $f(0,0) = 0$. Milyen irányban létezik az iránymenti derivált az origóban?

Megoldás. Első megoldás: Az y-tengely mentén a függvény azonosan nulla, így az ezzel párhuzamos iránymenti deriváltak nullák $\boxed{\mathbf{2p}}$. Ha az $y = mx$ $(m \neq 1)$ egyenes $\boxed{\mathbf{1p}}$ mentén közelítünk $\boxed{\mathbf{3p}}$

$$\lim_{h\to 0+} \frac{f\left(\frac{h}{\sqrt{1+m^2}}, \frac{mh}{\sqrt{1+m^2}}\right) - 0}{h} \overset{\boxed{\mathbf{2p}}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{1}{h(m-1)},$$

és ez a limesz nem véges $\boxed{\mathbf{1p}}$. Iránymenti derivált az origóban csak az y-tengellyel párhuzamos irányban létezik $\boxed{\mathbf{1p}}$.

Második megoldás: Közelítsünk az origóhoz a $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ $\boxed{\mathbf{2p}}$ irányból. $\boxed{\mathbf{3p}}$

$$\lim_{h\to 0+} \frac{\frac{h\cos\alpha}{h\cos\alpha - h\sin\alpha} - 0}{h} \overset{\boxed{\mathbf{2p}}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{\cos\alpha}{h(\cos\alpha - \sin\alpha)},$$

amely limesz csak $\cos\alpha = 0$ $\boxed{\mathbf{2p}}$ esetén létezik. Iránymenti derivált az origóban csak az y-tengellyel párhuzamos irányban létezik $\boxed{\mathbf{1p}}$.

---

2. Feladat. Tekintsük a következő függvényt:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Milyen irányban létezik iránymenti derivált az origóban?

Megoldás. Közelítsünk a $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ irányból. $\boxed{\mathbf{1p}}$ Mivel $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$, $\boxed{\mathbf{1p}}$

$$\boxed{\mathbf{2p}} \quad \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^4\cos^2\alpha\sin^2\alpha}{h^2} - 0}{h} \overset{\boxed{\mathbf{2p}}}{=} \lim_{h\to 0} h\cos^2\alpha\sin^2\alpha \overset{\boxed{\mathbf{2p}}}{=} 0.$$

Az iránymenti derivált tehát minden irányban létezik. $\boxed{\mathbf{2p}}$

---

3. Feladat. Tekintsük a következő függvényt:

$$f(x,y) = \frac{x}{y-x}, \quad x \neq y.$$

Legyen $f(0,0)=0$. Adjuk meg a függvény parciális deriváltfüggvényeit ahol léteznek!

Megoldás. Azoknak az (x,y) pontoknak, ahol $y \neq x$, van olyan környezetük, amelyben a feladat elején megadott képlet érvényes, tehát a parciális deriváltat megadhatjuk (formális) deriválással $\boxed{\mathbf{1p}}$. A függvény az y-tengely minden pontjában azonosan 0, így az origóban az y szerinti parciális derivált 0 $\boxed{\mathbf{2p}}$. A függvény az x-tengely mentén -1, az origóban viszont nulla, így x szerinti parciális derivált az origóban nem létezik $\boxed{\mathbf{1p}}$.

$$f'_x(x,y) \overset{\boxed{\mathbf{2p}}}{=} \frac{y}{(y-x)^2} \quad \text{ha } x \neq y, \qquad f'_y(x,y) = \begin{cases} -\frac{x}{(y-x)^2} & \text{ha } x \neq y\ \boxed{\mathbf{2p}} \\ 0 & \text{ha } (x,y)=(0,0)\ \boxed{\mathbf{2p}}. \end{cases} \qquad \blacksquare$$

---

4. Feladat. Tekintsük a következő függvénysorozatot:

$$f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$$

Állapítsuk meg konvergenciatartományát és határfüggvényét! Egyenletesen konvergens-e a függvénysorozat a konvergenciatartományán? Ha nem, van-e olyan részhalmaza a konvergenciatartománynak, ahol egyenletesen konvergens?

Megoldás. Mivel $|\frac{\sin nx}{n}| \leq \frac{1}{n}$ $\boxed{\mathbf{2p}}$, a sorozat minden x esetén konvergens $\boxed{\mathbf{1p}}$, és a határfüggvény az azonosan 0 függvény $\boxed{\mathbf{1p}}$.

Mivel minden x-re és pozitív ε-ra, ha $n > \frac{1}{\varepsilon}$ $\boxed{\mathbf{1p}}$, akkor $|\frac{\sin nx}{n} - 0| \leq \frac{1}{n} < \varepsilon$ teljesül $\boxed{\mathbf{3p}}$, a függvénysorozat egyenletesen konvergens az egész konvergenciatartományán $\boxed{\mathbf{2p}}$. $\blacksquare$

---

5. Feladat. Határozzuk meg a következő hatványsor konvergenciatartományát!

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n^2 2^n}.$$

Megoldás. Mivel $\boxed{\mathbf{2p}}$

$$R = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{\frac{1}{n^2 2^n}}} = 2$$

ezért konvergens a $(-4,0)$ intervallumon. $\boxed{\mathbf{2p}}$ A végpontokban:

$x=-4$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n^2 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2},$$

ami (abszolút) konvergens. $\boxed{\mathbf{2p}}$

$x = 0$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

ami (abszolút) konvergens. $\boxed{\textbf{2p}}$

A konvergenciatartomány $[-4, 0]$. $\boxed{\textbf{2p}}$ ■