1	2	3	4	5	6	$\sum$

FelsMatInf_AlkAlg 0. vizsga 18-12-15 Neptun: ____________ **Név:** ____________________________

A vizsga feladatainak eredményeit mind erre az oldalra kell írni, de a mellékszámítások is beadandók! Minden papírlap jobb felső sarkán legyen rajta a név és a Neptun-kód! A feladatok megoldásához semmilyen segédeszköz nem használható! Sikeres a vizsga ha az elért pontok száma legalább 12.

1. Válaszoljunk az alábbi kérdésre, illetve egészítsük ki a mondatot valamely tétel vagy definíció alapján!

a) *(2 pont)* Az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer optimális megoldásain definíció szerint az

$\mathbf{Ax} = \mathrm{proj}_{\mathcal{O}(\mathbf{A})}\, \mathbf{b}$

egyenletrendszer megoldásait értjük, melyek megegyeznek az

$\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{b}$

egyenletrendszer megoldásaival.

b) A lineáris $L : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ leképezés képterének és magterének dimenziója közt mi az összefüggés, ha $\dim \mathcal{V} = 2018$, $\dim \mathcal{W} = 42$?

$\dim \mathrm{Ker}\, L + \dim \mathrm{Im}\, L = 2018$

c) Minden valós mátrix ortogonálisan hasonló egy felsőháromszög-mátrixhoz, feltéve hogy...

minden sajátértéke valós.

d) A nemnegatív $\mathbf{A}$ mátrix spektrálsugarát jelölje r. Pontosan akkor létezik a $\lim_{n\to\infty}(\mathbf{A}/r)^n$ határérték, ha...

$\mathbf{A}$ primitív.

e) *(2 pont)* Az alábbi $\mathbf{A}$ mátrixot egy forgatás mátrixával balról szorozva az $\mathbf{A}$ egy QR-felbontásának $\mathbf{R}$ mátrixát kapjuk. Melyik ez a forgatómátrix, ha

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

(mo: $\mathbf{R}$ felső háromszög, e $\mathbf{G}$ Givens-forgatás a $(*, 3, *, 4)$ oszlopot a $(*, 5, *, 0)$-ba viszi, így $\mathbf{R} = \mathbf{GA}$ felső háromszög, és $\mathbf{A} = \mathbf{G}^\mathsf{T}\mathbf{R}$ a QR-felbontás.)

f) Azt mondjuk, hogy a valós $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ mátrixok kongruensek ($\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$), ha

van olyan invertálható $\mathbf{C}$ mátrix, hogy $\mathbf{B} = \mathbf{C}^\mathsf{T}\mathbf{AC}$.

g) Adjunk meg olyan mátrixot a szinguláris értékek és vektorok segítségével, mely az $\mathbf{A}$ mátrix legjobb 3-rangú közelítése Frobenius-normában?

$\sigma_1\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1^\mathsf{T} + \sigma_2\mathbf{u}_2\mathbf{v}_2^\mathsf{T} + \sigma_3\mathbf{u}_3\mathbf{v}_3^\mathsf{T}$

2. Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$. A mellékelt ábrán kössük össze irányított éllel azokat a csúcsokat amelyekhez tartozó állítások közt implikáció ($\to$) vagy ekvivalencia ($\leftrightarrow$) van. *(4 pont)*

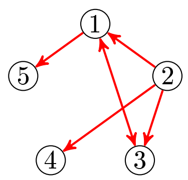
① $\mathbf{A}$ unitéren diagonalizálható

② $\mathbf{A}$ önadjungált

③ $\mathbf{A}$ normális

④ $\mathbf{A}$ sajátértékei valósak

⑤ $\mathbb{C}^n$ előáll $\mathbf{A}$ sajátalterei direkt összegeként



3. Adva van az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrix. Igaz-e, hogy van olyan C konstans, melyre $\mathrm{e}^{\mathbf{A}} = C\mathbf{A}^2 - \mathrm{e}^2\mathbf{A} + \mathrm{e}^2\mathbf{I}$, és ha igen, mennyi C értéke? *(3 pont)*

Igaz, $C = \frac{1}{2}\mathrm{e}^2$(megoldás a 7. prezentáció 48. oldalán, de egyszerűbb a $p(x) = Cx^2 - e^2x + e^2$ polinomból és deriváltjaiból kiindulni, mert a kérdésből ez a polinom olvasható ki.)

4. Határozzuk meg az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ mátrix Frobenius-, 1- és 2-normáját! *(4 pont)*

$\|\mathbf{A}\|_F = \sqrt{10}$, $\|\mathbf{A}\|_1 = 3$, $\|\mathbf{A}\|_2 = 3$ (utóbbi a legnagyobb szinguláris értékből)

5. Határozzuk meg az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrix szinguláris felbontását! *(6 pont)*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}$$

6. Egy 8×8-as $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékei 5 és 1. Az $\mathbf{A} - 5\mathbf{I}$ hatványainak rangja rendre 5, 4, 3, 3, az $\mathbf{A} - \mathbf{I}$ hatványainak rangja rendre 7, 6, 5, 5. Írjuk fel $\mathbf{A}$ Jordan-féle normálalakját! *(4 pont)*

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$