Bevezetés a számításelméletbe I.

Zárthelyi feladatok — a **MÁSODIK** zárthelyi pótlására

2019. december 16.

1. A $W \le \mathbb{R}^4$ altér álljon azokból az $\mathbb{R}^4$-beli vektorokból, amelyeknek a második koordinátája duplája az elsőnek, a harmadik koordinátája pedig háromszorosa az elsőnek. (Így például a jobbra látható vektor W-beli.) Határozzuk meg a W altér dimenzióját. (Azt nem szükséges bebizonyítani egy teljes értékű megoldáshoz, hogy W valóban altér.)

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 15 \\ 39 \end{pmatrix}$$

2. Legyen A egy olyan 5×10-es mátrix, amelynek a sorai lineárisan összefüggők, $\underline{b} \in \mathbb{R}^5$ pedig egy oszlopvektor. Mutassuk meg, hogy ha az $(A|\underline{b})$ kibővített együtthatómátrixú lineáris egyenletrendszer megoldható, akkor van olyan megoldása is, amelyben legföljebb 4 változó értéke 0-tól különböző.

3. Határozzuk meg az alábbi determináns értékét.

$$\begin{vmatrix} 3 & 15 & 9 & 3 \\ -2 & -10 & 1 & -6 \\ 1 & 5 & 7 & -3 \\ 2 & 13 & 12 & -10 \end{vmatrix}$$

4. A 2×3-as A mátrixnak nincs negatív eleme. Tudjuk róla ezen kívül, hogy az $A \cdot A^T$ mátrix bal felső eleme 0, a jobb alsó eleme pedig 14; továbbá az $A^T \cdot A$ mátrix bal felső eleme 4, a jobb alsó eleme pedig 9. Határozzuk meg az A, az $A \cdot A^T$, valamint az $A^T \cdot A$ mátrixokat.

5. Létezik-e inverze az alábbi A mátrixnak? Ha igen, akkor határozzuk meg A inverzét, valamint A inverzének a rangját.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -13 & 15 & -7 \\ 7 & -8 & 4 \end{pmatrix}$$

6*. Legyenek U és V olyan 10 dimenziós alterek $\mathbb{R}^{20}$-ban, amelyeknek a nullvektoron kívül nincs közös eleme. Mutassuk meg, hogy minden $\underline{x} \in \mathbb{R}^{20}$ vektorhoz találhatók olyan $\underline{u} \in U$ és $\underline{v} \in V$ vektorok, amelyekre $\underline{x} = \underline{u} + \underline{v}$.

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.

Minden feladat 10 pontot ér, a munkaidő 90 perc. Az aláírás feltétele: a két zárthelyin átlagosan legalább 24 pont és mindkét zárthelyin külön-külön legalább 18 pont elérése. A 100%-os eredményhez elegendő 50 pontot elérni a 60-ból, az összpontszám 50 pont feletti részét IMSc pontként könyveljük el.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

A W egy tetszőleges $\underline{w} \in W$ elemére $\underline{w} = (\alpha, 2\alpha, 3\alpha, \beta)^T$ valamely $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ skalárokra, (1 pont)
így $\underline{w} = \alpha \cdot (1, 2, 3, 0)^T + \beta \cdot (0, 0, 0, 1)^T$. (2 pont)
Ez mutatja, hogy $\underline{b}_1 = (1, 2, 3, 0)^T$ és $\underline{b}_2 = (0, 0, 0, 1)^T$ generátorrendszert alkotnak W-ben. (2 pont)
Mivel $\underline{b}_1$ és $\underline{b}_2$ nem skalárszorosai egymásnak, ezért lineárisan függetlenek is. (2 pont)
Így $\underline{b}_1, \underline{b}_2$ bázist alkot W-ben, (1 pont)
ezért $\dim W = 2$. (2 pont)

2. Legyen A egy olyan 5×10-es mátrix, amelynek a sorai lineárisan összefüggők, $\underline{b} \in \mathbb{R}^5$ pedig egy oszlopvektor. Mutassuk meg, hogy ha az $(A|\underline{b})$ kibővített együtthatómátrixú lineáris egyenletrendszer megoldható, akkor van olyan megoldása is, amelyben legföljebb 4 változó értéke 0-tól különböző.

* * * * *

Első megoldás. Jelölje A sorait $\underline{s}_1, \ldots, \underline{s}_5$. Mivel a sorok lineárisan összefüggők, ezért valamelyikük – legyen ez például $\underline{s}_5$, a sorok sorrendje ugyanis érdektelen – kifejezhető a többiből lineáris kombinációval: $\underline{s}_5 = \lambda_1 \underline{s}_1 + \ldots + \lambda_4 \underline{s}_4$. (1 pont)
Vonjuk most le az $(A|\underline{b})$ ötödik sorából az első λ_1-szeresét, stb., a negyedik λ_4-szeresét. Ekkor a fenti összefüggés szerint az $(A|b)$ ötödik sorában a vonaltól balra csupa nulla lesz. (2 pont)
Ha most az ötödik sorban a vonaltól jobbra nem nulla állna, akkor ez tilos sor volna, így az egyenletrendszer nem volna megoldható. A feladat szövege szerint tehát ez lehetetlen. (2 pont)
Így az ötödik sor csupa nulla sor, vagyis elhagyható. (1 pont)
Ha a megmaradt, 4 sorú kibővített együtthatómátrixra futtatjuk a Gauss-eliminációt, akkor (továbbra sem keletkezik tilos sor, hiszen a rendszer megoldható és) a redukált lépcsős alakban legföljebb 4 vezéregyes lehet, hiszen minden megmaradó sorban pontosan 1 lesz. (2 pont)
Így a redukált lépcsős alakból kiolvasható megoldáshalmazban legalább 6 szabad paraméter lesz. Ha ezeknek az értékét mind 0-nak választjuk, akkor valóban olyan megoldást kapunk, amelyben legföljebb 4 változó értéke 0-tól különböző. (2 pont)
A csupa nulla sor keletkezése mellett érvelhetünk a következőképpen is: A rangja (a sorrangra gondolva) legföljebb 4, mert a sorok lineárisan összefüggők; ha tehát a Gauss-eliminációval határozzuk meg A rangját, akkor a redukált lépcsős alakban legföljebb 4 vezéregyes lesz (így az $(A|b)$-re futtatott Gauss-eliminációban is ez történik). Ha egy megoldó minden további indoklás nélkül csak kijelenti, hogy a sorok lineáris összefüggőségéből következően keletkezik csupa 0 sor, az tehát a fenti pontozás szerinti első 6 pontot biztosan elveszíti.

Második megoldás. Jelölje A rangját r. Mivel a sorok lineárisan összefüggők, ezért $r \leq 4$ (a sorrangra gondolva). (1 pont)
Jelölje A oszlopait $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_{10}$. Válasszunk ki ezek közül az oszloprang definíciója szerint r lineárisan függetlent; jelöje ezeket $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_r$ (ugyanis az oszlopok számozása érdektelen). (1 pont)
Ha most $r + 1 < i \leq 10$, akkor az $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_r, \underline{a}_i$ rendszer az oszloprang definíciója szerint lineárisan összefüggő. Így az újonnan érkező vektor lemmája miatt $\underline{a}_i \in \langle \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_r \rangle$. (1 pont)
Ebből következik, hogy $\langle \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_r \rangle = \langle \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_{10} \rangle$. Valóban: mivel a tanultak szerint $\langle \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_r \rangle$ altér, ezért az altér definíciója miatt az $\underline{a}_i$ $(i = 1, \ldots, 10)$ vektorokkal együtt azok minden lineáris kombinációja is $\langle \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_r \rangle$-ben van, így $\langle \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_{10} \rangle \subseteq \langle \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_r \rangle$; a fordított irányú tartalmazás pedig magától értetődő. (2 pont)
Mivel az $(A|b)$ lineáris egyenletrendszer megoldható, ezért a tanultak szerint $\underline{b} \in \langle \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_{10} \rangle$.(1 pont)
Így $\langle \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_r \rangle = \langle \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_{10} \rangle$ miatt $\underline{b} \in \langle \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_r \rangle$ is igaz. (1 pont)
Ezért (ismét a tanultak szerint) megoldható az $(A'|b)$ kibővített együtthatómátrixú lineáris egyenletrendszer is, ahol A' azt a mátrixot jelöli, amelynek oszlopai $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_r$. (1 pont)
Az $(A'|b)$ egy tetszőleges megoldása pedig valóban az $(A|b)$ egy olyan megoldását adja, amelyben legföljebb $r \leq 4$ változó értéke 0-tól különböző. (2 pont)

3. Határozzuk meg az alábbi determináns értékét.

$$\begin{vmatrix} 3 & 15 & 9 & 3 \\ -2 & -10 & 1 & -6 \\ 1 & 5 & 7 & -3 \\ 2 & 13 & 12 & -10 \end{vmatrix}$$

* * * * *

A determinánst a Gauss-elimináció determinánsra vonatkozó változatával számítjuk ki:

$$\begin{vmatrix} 3 & 15 & 9 & 3 \\ -2 & -10 & 1 & -6 \\ 1 & 5 & 7 & -3 \\ 2 & 13 & 12 & -10 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 3 & 6 & -12 \end{vmatrix} = (-3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & -12 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 7 & -4 \end{vmatrix} = (-9) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 7 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= (-36) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & -4 \end{vmatrix} = (-36) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (-36) \cdot 3 = -108.$$

Minden, a megoldást érdemben nem befolyásoló számolási hiba 1 pont levonást jelent. A determinánsra vonatkozó egyes alapismeretek teljes vagy részleges hiányából fakadó elvi hibák viszont darabonként 4 pont levonást jelentenek. Ilyen például, ha a megoldó egy sor konstanssal szorzása, vagy sorok cseréje után nem, vagy hibásan követi a determináns megváltozását. Kétes esetekben elvi hibának tekintendő minden olyan hiba, amikor nincs nyoma annak, hogy a megoldó a szóban forgó ismeretet helyesen próbálta alkalmazni. Arányos részpontszám jár minden, a determináns kiszámításának irányába mutató, hasznos lépésért. A kifejtési tétel puszta alkalmazása (egyéb, további átalakítások nélkül) legföljebb 2 pontot érhet, mert egyedül ezzel a determináns meghatározása nem válik könnyebbé az eredeti feladatnál.

4. A 2×3-as A mátrixnak nincs negatív eleme. Tudjuk róla ezen kívül, hogy az $A \cdot A^T$ mátrix bal felső eleme 0, a jobb alsó eleme pedig 14; továbbá az $A^T \cdot A$ mátrix bal felső eleme 4, a jobb alsó eleme pedig 9. Határozzuk meg az A, az $A \cdot A^T$, valamint az $A^T \cdot A$ mátrixokat.

* * * * *

Legyen $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$. Ekkor az $A \cdot A^T$, illetve az $A^T \cdot A$ elemeire vonatkozó megadott információkból sorra a következő egyenletek következnek:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= 0 \\ d^2 + e^2 + f^2 &= 14 \\ a^2 + d^2 &= 4 \\ c^2 + f^2 &= 9 \end{aligned} \qquad \text{(4 pont)}$$

Az első egyenletből $a = b = c = 0$ adódik. (1 pont)

Innen a harmadik, illetve a negyedik egyenletből (felhasználva az elemek nemnegativitását is) $d = 2$, illetve $f = 3$ következik. Végül ezekből és a második egyenletből (és ismét a nemnegativitásból) $e = 1$ adódik. (2 pont)

Így tehát $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. (1 pont)

Elvégezve a mátrixszorzásokat: $A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 14 \end{pmatrix}$ és $A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 9 \end{pmatrix}$. (2 pont)

5. Létezik-e inverze az alábbi A mátrixnak? Ha igen, akkor határozzuk meg A inverzét, valamint A inverzének a rangját.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -13 & 15 & -7 \\ 7 & -8 & 4 \end{pmatrix}$$

$* \quad * \quad * \quad * \quad *$

A^{-1}-et a tanult módon, Gauss-eliminációval számítjuk:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -13 & 15 & -7 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & -8 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -7 & 13 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -7 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -7/2 & 13/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 4 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \quad \text{(3 pont)}$$

A vonaltól balra egységmátrix keletkezett (és így $\det A \neq 0$), ezért A-nak létezik inverze (2 pont)
és az a fenti, a vonaltól jobbra eső mátrix. (1 pont)
$A \cdot A^{-1} = E$ miatt a determinánsok szorzástételéből $\det A \cdot \det A^{-1} = \det E = 1$ következik, így $\det A^{-1} \neq 0$. (2 pont)
Ebből a determinánsrang definíciója szerint azonnal következik, hogy $r(A^{-1}) = 3$. (2 pont)
Az inverz létezését indokolhatjuk úgy is, hogy külön kiszámítjuk A determinánsát és mivel az nem 0 ($\det A = 1$), ezért a tanultak szerint A^{-1} létezik. A $\det A^{-1} \neq 0$ állítást pedig indokolhatjuk úgy is, hogy $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$ miatt A^{-1}-nek is létezik inverze (mégpedig A), így a tanult tétel szerint a determinánsa nem 0; aki azonban ugyanerre a következtetésre csupán az $A \cdot A^{-1} = E$ összefüggésből jut (és további indoklást nem fűz ehhez), az az ezért járó 2 pontból csak 1-et kapjon meg. A^{-1} rangját természetesen máshogyan, például Gauss-eliminációval is számíthatjuk. Minden, a megoldást érdemben nem befolyásoló számolási hiba 1 pont levonást jelent. Az egyes alapismeretek teljes vagy részleges hiányából fakadó elvi hibák (jelentkezzenek azok akár A^{-1}, $\det A$ vagy $r(A^{-1})$ számolása közben) darabonként 4 pont levonást jelentenek. Ha egy megoldó A^{-1} számolása közben egyszerű számolási hibát vét, de a végén a számolását beszorzással ellenőrizve észreveszi, hogy hibázott, az ezért 1 pontot visszakaphat a számolási hibákért levont pontok közül még akkor is, ha a hibát kijavítani nem tudja.

6*. Legyenek U és V olyan 10 dimenziós alterek $\mathbb{R}^{20}$-ban, amelyeknek a nullvektoron kívül nincs közös eleme. Mutassuk meg, hogy minden $\underline{x} \in \mathbb{R}^{20}$ vektorhoz találhatók olyan $\underline{u} \in U$ és $\underline{v} \in V$ vektorok, amelyekre $\underline{x} = \underline{u} + \underline{v}$.

$* \quad * \quad * \quad * \quad *$

Legyen U egy bázisa $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_{10}$ és V egy bázisa $\underline{c}_1, \ldots, \underline{c}_{10}$. (1 pont)
Állítjuk hogy a $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_{10}, \underline{c}_1, \ldots, \underline{c}_{10}$ rendszer lineárisan független. Vegyük ugyanis egy $\underline{0}$-t adó lineáris kombinációjukat: $\beta_1 \underline{b}_1 + \ldots + \beta_{10} \underline{b}_{10} + \gamma_1 \underline{c}_1 + \ldots + \gamma_{10} \underline{c}_{10} = \underline{0}$. (1 pont)
Átrendezés után: $\beta_1 \underline{b}_1 + \ldots + \beta_{10} \underline{b}_{10} = -\gamma_1 \underline{c}_1 - \ldots - \gamma_{10} \underline{c}_{10}$; jelölje a két oldal közös értékét $\underline{w}$.(1 pont)
Mivel $\underline{w}$ kifejezhető a $\underline{b}_i$-kből és a $\underline{c}_i$-kből is lineáris kombinációval, ezért (az altér definíciója szerint) $\underline{w} \in U \cap W$. Így a feladat szövege szerint $\underline{w} = \underline{0}$. (1 pont)
Mivel tehát $\beta_1 \underline{b}_1 + \ldots + \beta_{10} \underline{b}_{10} = \underline{0}$ és $\gamma_1 \underline{c}_1 + \ldots + \gamma_{10} \underline{c}_{10} = \underline{0}$ és a $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_{10}$ és a $\underline{c}_1, \ldots, \underline{c}_{10}$ rendszerek egyaránt lineárisan függetlenek (mert bázisok a megfelelő altérben), ezért ebből $\beta_1 = \ldots = \beta_{10} = 0$ és $\gamma_1 = \ldots = \gamma_{10} = 0$ következik a tanultak szerint. Ezzel tehát valóban beláttuk a $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_{10}, \underline{c}_1, \ldots, \underline{c}_{10}$ rendszer lineáris függetlenségét. (1 pont)
A tanultak szerint $\dim \mathbb{R}^{20} = 20$, így a $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_{10}, \underline{c}_1, \ldots, \underline{c}_{10}$ rendszer egy dimenzió elemszámú, lineárisan független rendszer $\mathbb{R}^{20}$-ban. Ezért a tanultak szerint bázis. (2 pont)
Legyen most $\underline{x} \in \mathbb{R}^{20}$ tetszőleges. A fentiek szerint (a bázis generátorrendszer tulajdonsága miatt) $\underline{x}$ kifejezhető a $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_{10}, \underline{c}_1, \ldots, \underline{c}_{10}$ vektorok lineáris kombinációjaként: $\underline{x} = \beta_1 \underline{b}_1 + \ldots + \beta_{10} \underline{b}_{10} + \gamma_1 \underline{c}_1 + \ldots + \gamma_{10} \underline{c}_{10}$. (1 pont)
Legyen $\underline{u} = \beta_1 \underline{b}_1 + \ldots + \beta_{10} \underline{b}_{10}$ és $\underline{v} = \gamma_1 \underline{c}_1 + \ldots + \gamma_{10} \underline{c}_{10}$. Ekkor tehát $\underline{x} = \underline{u} + \underline{v}$ és (az altér definíciója miatt) $\underline{u} \in U$ és $\underline{v} \in V$ is teljesülnek, amivel a feladat állítását beláttuk. (2 pont)