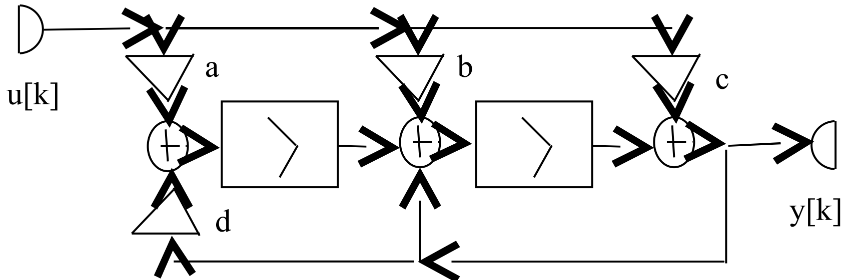
JAVÍTÁSI PÉLDÁNY

Nagypélda

A diszkrét idejű rendszer az alábbi hálózattal adott.



a) Jelölje be az ábrába az állapotváltozókat, és adja meg a rendszer állapotváltozós leírását normál alakban! (3 pont)

b) Adja meg az a, b, c és d paraméterekre vonatkozóan a hálózat stabilitásának feltételét! (3 pont)

c) Az a, b, c és d paraméterek valamely értéke mellett a rendszer állapotváltozós leírásában szereplő mennyiségek a szokásos jelöléssel:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 0 & -0{,}16 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \underline{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad \underline{c}^T = \begin{bmatrix} 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad d = 5.$$

Adja meg a rendszer impulzusválaszát! (4 pont)

Megoldás

a) x_1 a baloldali, x_2 a jobboldali késleltető kimeneti jele

$x_1' = x_1[k+1] = d\,x_2[k] + (a+c\,d)u[k]$,

$x_2' = x_2[k+1] = x_1[k] + x_2[k] + (b+c)u[k]$,

$y[k] = x_2[k] + c\,u[k]$

Fordított választás

$x_1[k+1] = x_1[k] + x_2[k] + (b+c)u[k]$,

$x_2[k+1] = d\,x_1[k] + (a+c\,d)u[k]$,

$y[k] = x_1[k] + c\,u[k]$

3 pont

b) $P(\lambda) = -\lambda(1-\lambda) - d = \lambda^2 - \lambda - d$

Egyik megoldás (Jury kritérium alapján)

$P(\lambda=1) = -d > 0 \quad \rightarrow \quad d < 0$

$P(\lambda=-1) = 2-d > 0 \quad \rightarrow \quad d < 2$

$|-d| < 1 \quad \rightarrow \quad |d| < 1$

$$\left.\begin{matrix} d<0 \\ d<2 \\ |d|<1 \end{matrix}\right\} \rightarrow -1 < d < 0, \text{ a, b, c tetszőleges.}$$

Másik megoldás: $\lambda_{12} = 0{,}5 \pm \sqrt{0{,}25+d}$

Ha $d > -0{,}25$ $\quad \lambda_1 = 0{,}5 + \sqrt{0{,}25+d} < 1$

$0{,}25+d < 0{,}25 \rightarrow d < 0$

$\lambda_2 = 0{,}5 - \sqrt{0{,}25+d} > -1$

$2{,}25 > 0{,}25+d \rightarrow d < 2$

Ha $d < -0{,}25$ $\quad \lambda_{12} = 0{,}5 \pm j\sqrt{-0{,}25-d}$

$|\lambda_{12}|^2 = 0{,}25 + (-0{,}25-d) = -d < 1$

$$\left.\begin{matrix} d<0 \\ d<2 \\ d>-1 \end{matrix}\right\} \rightarrow -1 < d < 0, \text{ a, b, c tetszőleges.}$$

3 pont (Csak egy megoldás értékelhető)

c) $P(\lambda) = -\lambda(1-\lambda) + 0{,}16 = \lambda^2 - \lambda + 0{,}16 = 0.$ $\qquad \lambda_1 = 0{,}8; \qquad \lambda_2 = 0{,}2.$

Egyik megoldás: $\quad h[k] = d\,\delta[k] + \varepsilon[k-1]\,\underline{c}^T\,\underline{\underline{A}}^{k-1}\,\underline{b}$, ahol $\underline{\underline{A}}^{k-1} = \underline{\underline{L}}_1\lambda_1^{k-1} + \underline{\underline{L}}_2\lambda_2^{k-1}$, $(\lambda_i \neq 0)$.

$$\underline{\underline{L}}_1 = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\left(\underline{\underline{A}} - \lambda_2\underline{\underline{E}}\right) = \frac{1}{0{,}6}\begin{bmatrix} -0{,}2 & -0{,}16 \\ 1 & 0{,}8 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & -0{,}8 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

JAVÍTÁSI PÉLDÁNY

$\underline{\underline{L}}_2 = \dfrac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\left(\underline{\underline{A}} - \lambda_1 \underline{\underline{E}}\right) = \dfrac{1}{-0{,}6}\begin{bmatrix} -0{,}8 & -0{,}16 \\ 1 & 0{,}2 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 4 & 0{,}8 \\ -5 & -1 \end{bmatrix}$. (Ellenőrzés: $\underline{\underline{L}}_1 + \underline{\underline{L}}_2 = \underline{\underline{E}}$)

$$h[k] = 5\,\delta[k] + \varepsilon[k-1]\left(\begin{bmatrix} 0 & 3 \end{bmatrix}\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & -0{,}8 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}0{,}8^{k-1} + \begin{bmatrix} 0 & 3 \end{bmatrix}\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 4 & 0{,}8 \\ -5 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}0{,}2^{k-1}\right) =$$

$$= 5\delta[k] + \varepsilon[k-1]\left(\begin{bmatrix} 5 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}0{,}8^{k-1} + \begin{bmatrix} -5 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}0{,}2^{k-1}\right) = 5\delta[k] + \varepsilon[k-1]\left(26(0{,}8)^{k-1} - 14(0{,}2)^{k-1}\right).$$

Másik megoldás: $h[k] = M_1\, 0{,}8^{k-1} + M_2\, 0{,}2^{k-1}$, ha $k \ge 1$.

Illesztés k = 1-re és k = 2-re. Az állapotváltozós leírásból lépésről lépésre:

k	$x_1[k]$	$x_2[k]$	$u[k] = \delta[k]$	$y[k] = h[k]$		
0	0	0	1	5	k = 1-re:	$M_1 + M_2 = 12$
1	2	4	0	12	k = 2-re:	$0{,}8\, M_1 + 0{,}2\, M_2 = 18$
2	- 0,64	6	0	18		$M_1 = 26$
						$M_2 = -14$

$$h[k] = 5\,\delta[k] + \varepsilon[k-1]\left(26(0{,}8)^{k-1} - 14(0{,}2)^{k-1}\right).$$

4 pont (csak egy megoldás értékelhető)

Kispéldák

1. Adja meg annak a kritériumát, hogy az x(t) FI jel véges energiájú legyen!

$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)\,dt < \infty$ 1 pont

2. Lineáris-e az a DI rendszer, amelynek grjesztés-válasz kapcsolata: $y[k] = 2\,u[k+2]$? Indokolja válaszát! Lineáris. Az $u[k] = a\,u_1[k] + b\,u_2[k]$ jelre a válasz: $2\left(a\,u_1[k+2] + b\,u_2[k+2]\right) =$
$= a\left(2\,u_1[k+2]\right) + b\left(2\,u_2[k+2]\right)$ 1 pont

3. Egy FI rendszer impulzusválasza: $h(t) = 5\,\varepsilon(t)\,e^{-2t}$, gerjesztőjele: $u(t) = 10$ (konstans). Adja meg a rendszer válaszjelét!

25 1 pont $\left(y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t-\tau)\,h(\tau)\,d\tau = 10\int_{-\infty}^{\infty} 5e^{-2\tau}\,d\tau = 25\right)$

4. Aszimptotikusan stabilis-e az az FI rendszer, amely rendszer állapotmátrixa:
$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} -0{,}5 & 2 \\ 0{,}2 & -0{,}1 \end{bmatrix}$? Indokolja válaszát!

A rendszer ***nem*** aszimptotikusan stabilis. $P(\lambda) = (-0{,}5 - \lambda)(-0{,}1 - \lambda) = \lambda^2 + 0{,}6\,\lambda - 0{,}35$
A karakterisztikus polinom nem Hurwitz polinom. (Vagy: $\lambda_1 \lambda_2 = -0{,}35$. Egyik λ pozitív.)
1 pont

5. Egy folytonos idejű rendszer állapotváltozós leírása az alábbi:
$x'(t) = -2\,x(t) + 3\,u(t)$, $y(t) = 4\,x(t) + 5\,u(t)$.
Adja meg a rendszer impulzusválaszának t=+0 pillanatbeli értékét!
12. 1 pont $\left(h(+0) = 4 * x(+0) = 12\right)$