

Fuzzy rendszerek.....	4
Halmazműveletek:	5
Fuzzy szabályzó felépítése:	5
Jelek csoportosítása	7
Spektrumanalízis eszközei, korreláció becslő	12
Sávszűrős analízis.....	12
Letapogató rendszerű analizátorok	13
Fourier-analizátorok.....	14
Sávszelektív Fourier analízis.....	15
Az optikai Fourier-transzformáció.....	18
A korreláció indirekt elvű mérése	19
A cirkuláris korreláció értelmezése.....	19
A korrelációbecslő varianciája	21
Cirkuláris konvolúció	25
Becsléstudomány.....	26
Modellillesztés, paraméterbecslés	26
Bayes-tétel.....	27
Bayes becslés	28
Maximum Likelihood becslés	30
Likelihood és log-likelihood függvény.....	31
Legkisebb négyzetes hibájú becslők	32
Szórásnégyzet becslése	34
Kvantálás, dither, kerekítés.....	35
Smith könyv idevágó részei, bevezető	35
Tanszéki anyag, level 2	35
A kvantált jel visszaállítása	38
Sheppard-korrekciók, a momentumok torzítása	38
Dither.....	39
Az átlagolás	41
Az egyszerű átlagolás	41
Az egyszerű átlagolás tulajdonságai.....	42

Közelítő rekurzív átlagolás	44
Az exponenciális vagy felejtő átlagolás.....	44
Mintavételi tételek	46
DFT	47
A Diszkrét Fourier Transzformáció	47
Fast Fourier Transform	48
DFT vs FFT	49
Gibbs hatás	50
fft(fft(x)) eredményének értelmezése (Schnell példatárban megtalálható)	50
Bizonyítsa be, hogy $x = \text{IDFT}\{\text{DFT}(x)\}$	50
Színusz Fourier transzformálja, a DFT értelmezése	50
DFT eredményének körszimmetriája	53
Zaj FT-jének amplitudóeloszlása	53
Apró finomságok, definíciók	55
Mintavételezés	56
Mese, level0 a digitális oszcilloszkóp	56
Analog vs. Digitális aluláteresztő szűrő (átlagoló)	59
Csalóka ábrák	60
Mintavételezés	66
A Dirac-delta értelmezése	66
A mintavételezés modellezése.....	67
A mintavételezés matematikai modellezése.....	68
Interpolációs formula – az időfüggvény helyreállítása.....	70
Mintavételezés a frekvenciatartományban	71
A közelítő mintavételi tétel	71
Téglányösszeges közelítés	72
DFT eredménye sztochasztikus jel esetén.....	74
Interpoláció FFT-vel	74
Sávkorlátozott jelek mintavétele	75
Alul- és túlmintavételezés	75
Ablak függvények	77

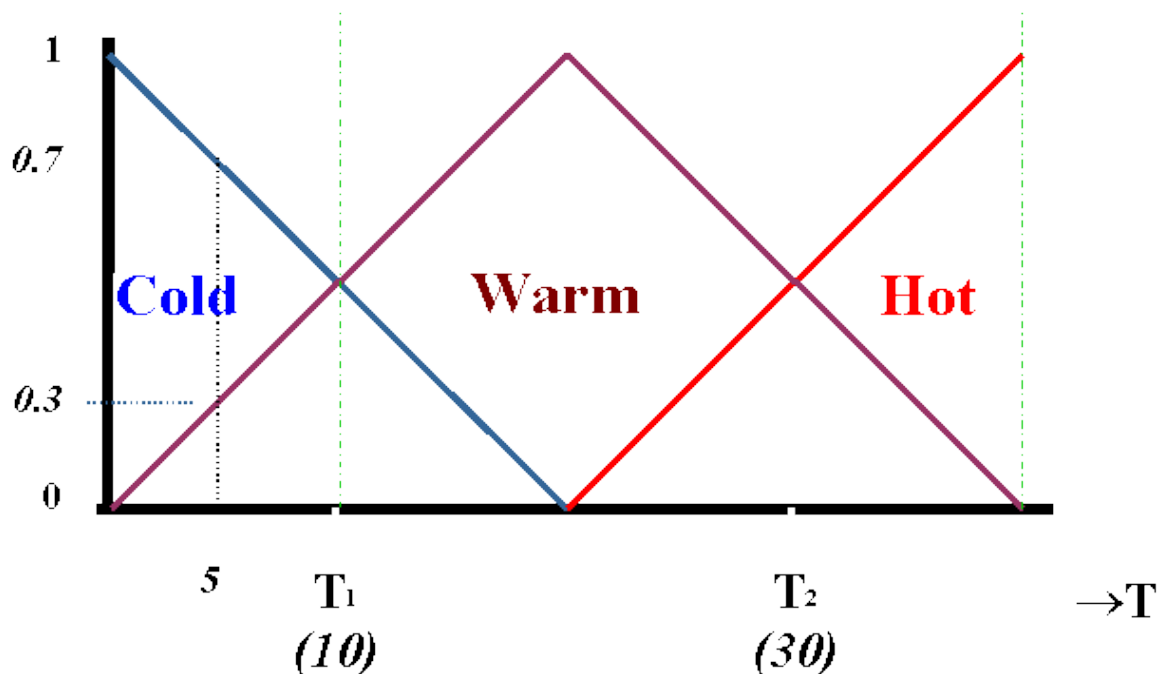
Hann (Hanning) ablak	77
Hamming ablak	77
Flat top (lapos tetejű) ablak	78
FIR realizáció	79
FIR szűrő tervezése az átviteli függvény mintavételezésével.....	79
Remez-algoritmus	79

Fuzzy rendszerek

A tágabb értelemben vett fuzzy logika alapját képezi a fuzzy számítógépes rendszereknek, melyek szemben a szokványos rendszerekkel, nem csak igen és nem (illetve ki és be, vagy 1 és 0) értékekkel dolgoznak, hanem közbülső „valóságértékekkel” is, mint például 0,5 (féligmeddig), 0,2 (kicsit), 0,8 (elégge).... Ezáltal az „életlen” (fuzzy) meghatározások (mint például az előbbiek) matematikailag kezelhetővé válnak.

A crisp halmazok karakterisztikus függvénye minden alaphalmazbeli elemhez 0-t vagy 1-et rendel hozzá. A karakterisztikus függvény fogalmát úgy általánosíthatjuk, hogy az alaphalmaz minden eleméhez valamely rögzített tartományból – ez általában a $[0,1]$ intervallum – rendelhető érték. Ezen érték nagysága a halmazbeli tagság mértékével arányos, azaz minél kisebb (nagyobb) mértékben tagja a halmaznak valamely elem, annál kisebb (nagyobb) az elemre vonatkozó függvényérték. Ezt a függvényt tagsági függvénynek, azt általa definiált halmazt pedig fuzzy halmaznak nevezzük. Tehát a tagsági függvény valamely crisp alaphalmaz minden eleméhez az értékkészletéből egy tagsági értéket rendel.

Az alábbi példában a függőleges tengely a $[0,1]$ intervallum a tagsági érték. A fuzzy halmazok a hideg, meleg, forró. Ha a fuzzy halmaz elemeihez hozzárendelve ábrázoljuk a tagsági beletartozást jelölő számokat, akkor a tagsági függvény ábráját kapjuk:



Látható, hogy az 5 fokhoz 0,3 „melegség” és 0,7 „hidegség” tartozik.

<http://users.iit.uni-miskolc.hu/~radai/MI/fuzzy.htm>

Halmazműveletek:

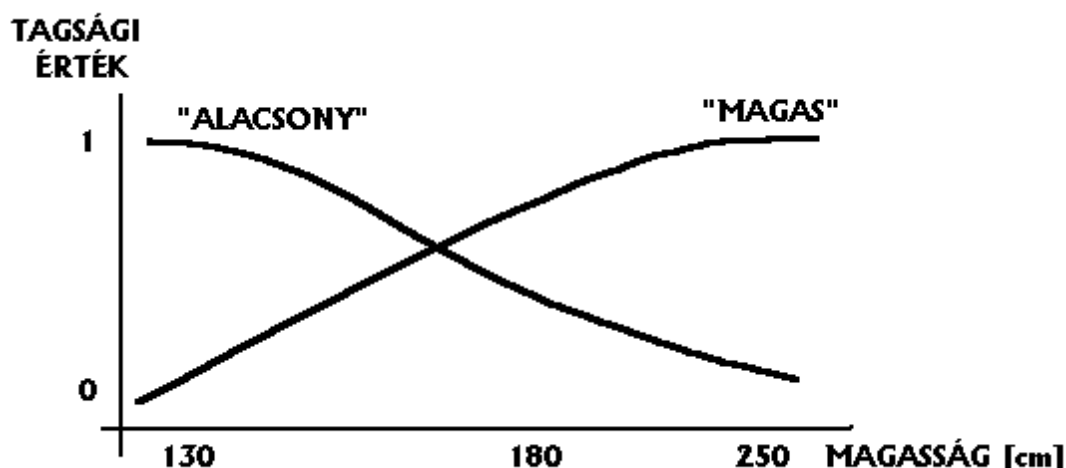
Magasságértékek: $A=\{130,131,132,\dots, 183, \dots, 250\}$

Magas és alacsony fuzzy halmazok:

$L=\{130(1), 140(1), 150(1), 160(0.8), 170(0.5), 180(0.1), 190(0)\}$

$M=\{130(0), 140(0), 150(0), 160(0.1), 170(0.4), 180(0.9), 190(1), 250(1)\}$

Tagsági fv:



Két fuzzy halmaz ÉS (AND, metszet) művelete az a halmaz, amely a két argumentum halmaz közös elemeit tartalmazza, minden elemet véve a legkisebb előforduló beletartozási értéken.

$M \text{ AND } L=\{130(0), 140(0), 150(0), 160(0.1), 170(0.4), 180(0.1), 190(0)\}=\{160(0.1), 170(0.4), 180(0.1)\}$

Két fuzzy halmaz VAGY (OR, únió) művelete az a halmaz, ami minden előforduló elemet tartalmaz a lehető legnagyobb beletartozási értéken véve.

$M \text{ OR } L=\{130(1), 140(1), 150(1), 160(0.8), 170(0.5), 180(0.9), 190(1), 250(1)\}$

Egy halmaz negáltján azt a halmazt értjük, mely tartalmazza az összes elemet, de az eredmény halmaz elemeinek tagsági értékeit kivonjuk 1-ből.

Fuzzy szabályzó felépítése:

Fuzzyfikálás: az éles, mért értékek alapján megfelelő fuzzy változó előállítása. A fuzzyfikálást gyakran megelőzi a mért értékek normalizálása.

A következtetőgép és a szabálybázis: a különböző bemenetekhez hozzárendelhető egy-egy fuzzy halmaz rendszer. Ezek alkotják szabálybázist. pl.:

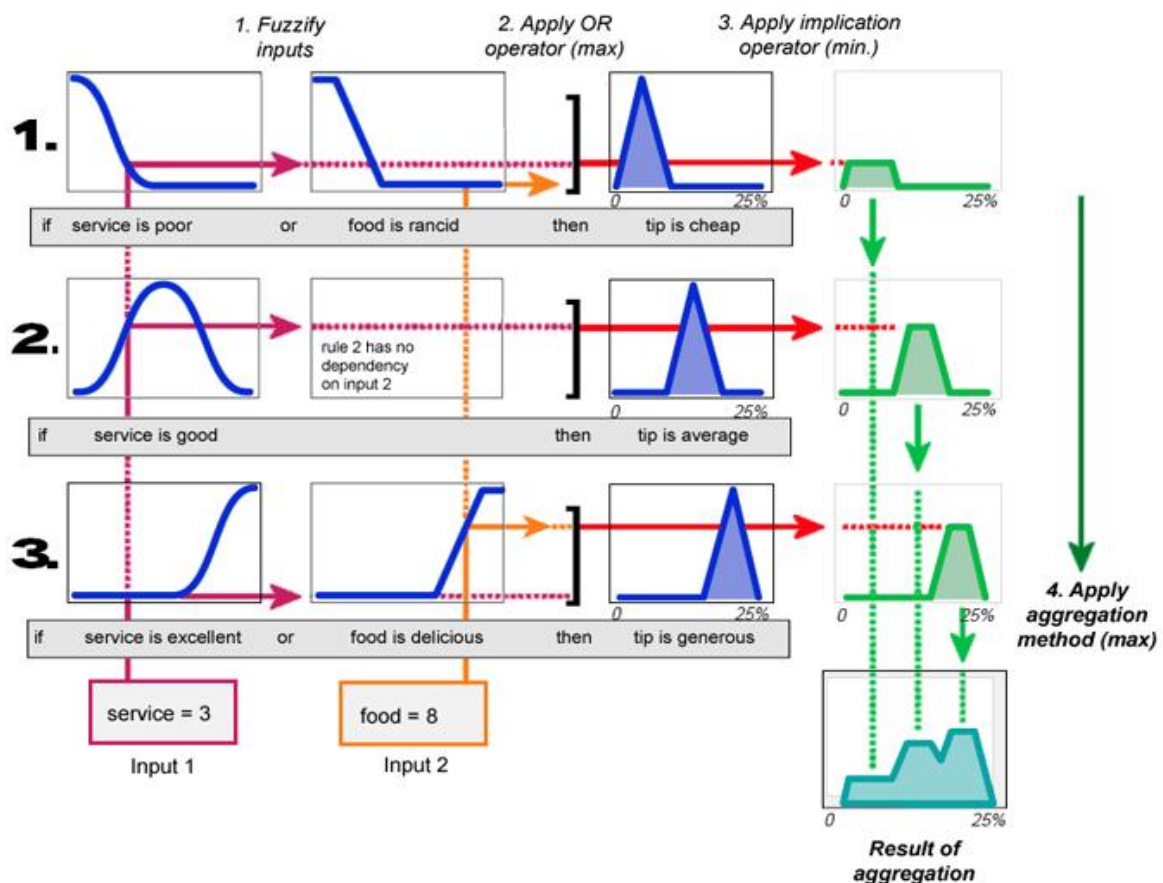
étteremben az egyik bemenet a kiszolgálás, a három tagsági függvénye a rossz, jó, kiváló. Egy másik bemenet lehet az étel minősége, ennek legyen két tagsági függvénye vacak, ízletes. Ezek a szabályok fogják meghatározni a borra való mértékét. A különböző bemenetek normáláson esnek át (t-norm, t-conorm), ezáltal egy tagsági függvény lesz a kimenetük. pl.: HA (a kiszolgálás rossz vagy az étel vacak) $\rightarrow$ (ezt normálva kapunk egy értéket), AKKOR a borra való alacsony lesz $\rightarrow$ ezt pedig a normált érték behelyettesítésével a tagsági függvényben-nel kapjuk meg.

Defuzzyfikáció: a fuzzy tagsági függvényekből előállításra kerül a beavatkozó jel(ek). Számos módszer ismert, ezekből a néhány leggyakoribb:

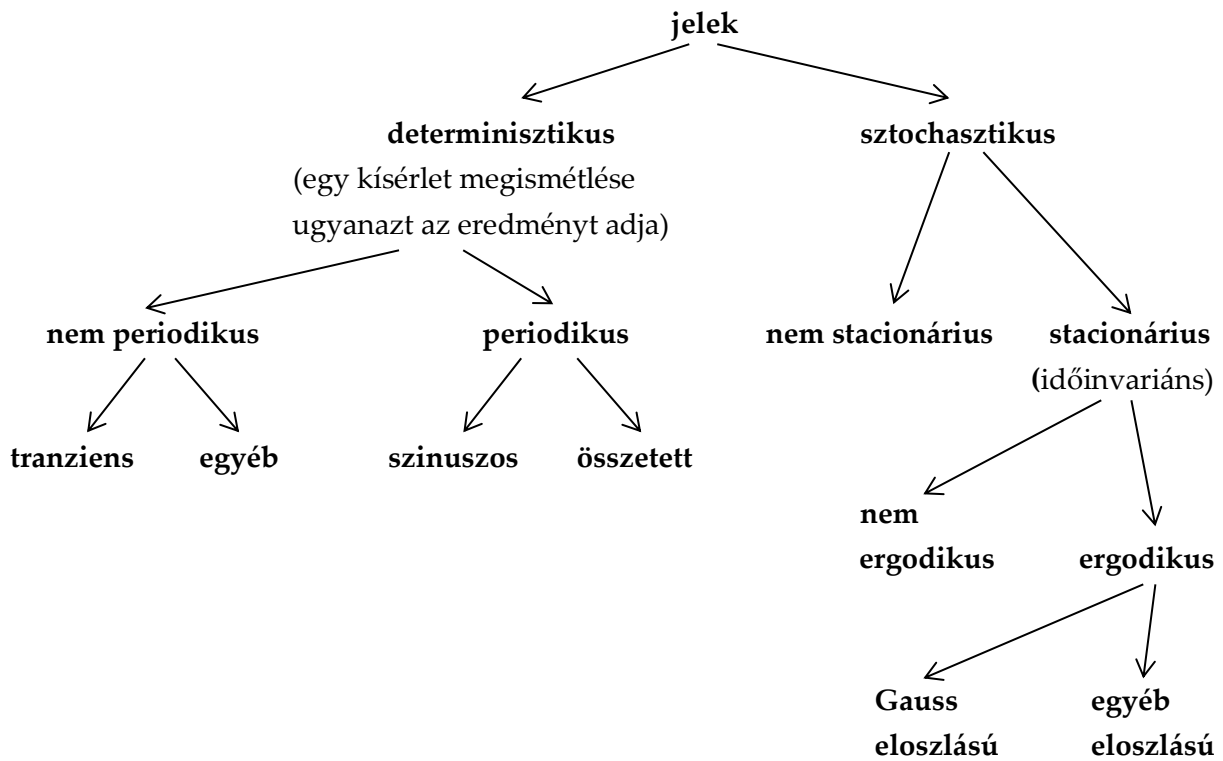
Center of gravity, súlypont: a tagsági értékek meghatározása után, a tagsági függvények által lefedett területek összegének súlypontja.

Center of sums, összeközéppont módszer: az átlapolódó részeket multiplicitással veszi figyelembe.

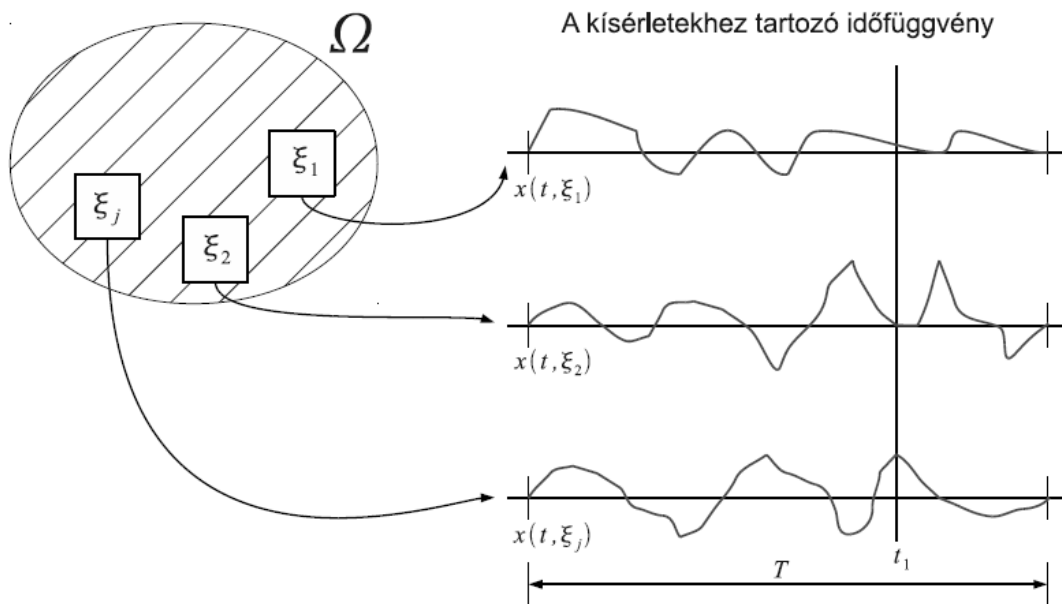
Mamdani féle max-min:



Jelek csoportosítása



Sztochasztikus folyamat: folytonos sűrűségfüggvényű / eloszlásfüggvényű folyamat matematikai modellje. Egy elemi esemény egy függvény bekövetkezése:



Stacionárius sztochasztikus folyamat: a folyamat nem változik az időben, nem függ attól, hogy mikor vizsgáljuk, időinvariáns. Példa: a folyamat szempontjából mindegy, hogy ma vagy holnap vizsgáljuk a MASAT pályáját vagy a szélben lengedező nádszálát.



Példák **nem stacionárius** sztochasztikus folyamatra:

- Egy ellenálláson a termikus zaj változása az ellenállás öregedése során
- Egy műhold geostacionárius pályán mozog, viszont egy idő után le fog esni.

Ergodikus hipotézis: a sokaság szerinti átlagolás és az idő szerinti átlagolás eredménye megegyezik. Ez azt jelenti, hogy nem kell sok MASAT, sok egyforma nád, stb., mert nem sokaság szerint átlagolunk, hanem időben. De ez csak egy hipotézis, mert végülis senki sem tudja ellenőrizni!

Nem ergodikus folyamat: csak memóriajellegű folyamatok nem ergodikusak. Pl.: flip-flop, aminek a kimenete bekapcsolás után beáll. Sokaság szerint átlagolva: a két érték ('0' és '1') közötti értéket kapnánk, míg idő szerint átlagolva az egyik ('0' vagy '1') értéket. Ez tehát stacionárius, de nem ergodikus.

Gauss esetben az autokorrelációs függvény (ill. teljesítménysűrűség függvény) mindent megmond a stacionárius sztochasztikus folyamatról.

Tranziens jel: véges energiájú, $E(f)$ energiasűrűség spektrum jellemzi és létezik Fourier-transzformáltja. Teljesítménye 0, mert ha $t \rightarrow \infty$, eltűnik a teljesítmény.

Példa az **egyéb nem periodikus jelre**: 2 független frekvenciájú szinusz, melyeknek nincs közös alapharmonikusuk és csúszkálnak egymáson.

1. Példa: melyik jelcsoportba tartozik a következő jel?

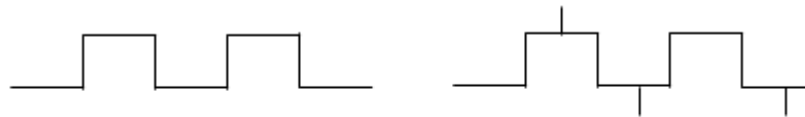
$$\sin(f_1 2\pi t) + \sin(f_2 2\pi t)$$

$$f_1 = 1 \text{ kHz}$$

$$f_2 = 1,001 \text{ kHz}$$

Válasz: matematikailag periodikus, de az egyébbe kell tennünk, ha nem tudjuk a 2 oszcillátort szinkronizálni.

2. Példa: ugyanaz-e a 2 jel?



: ugyanolyan, mint az előző,
csak 1-1 minta eltér

Válasz: ha vesszük a 2 jel DFT-jét, majd az IDFT-jét, akkor a kiugrások egyre inkább eltűnnek (a spektrum oldalon egyforma a 2 jel) → rajtunk múlik melyik jelmodellbe soroljuk...

3. Példa: tekinthető-e a szinusz sztochasztikus folyamatnak?

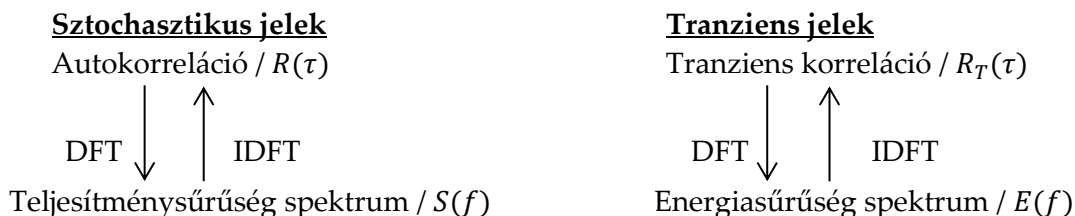
Válasz: a sztochasztikus folyamat azt jelenti, hogy ha megismétlem a méréseket, akkor más időfüggvények jönnek ki, viszont a szinusz nem változik. Egy valami változik csak: a kezdőfázis, hogy honnan indítjuk a mérést. A kezdőfázis pedig legyen a $(0, 2\pi]$ intervallumon egyenletes eloszlású (mert nincs kitüntetett kezdőérték).

Ha így mérünk sokszor, akkor ezek a mérések együtt adják a sztochasztikus folyamatot. Így már tudunk definiálni autokorrelációs függvényt, illetve teljesítménysűrűség függvényt.

Energiasűrűség spektrum: $E(f) = |X(f)|^2$, azaz a Fourier-transzformált abszolútérték-négyzete. Olyan, mint sztochasztikus jeleknél a teljesítménysűrűség spektrum.

Tranziens korreláció: a tranziens jelekre jellemző korrelációs függvény, mely az energiasűrűség spektrum inverz Fourier-transzformáltja:

$$R_T(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} E(f) e^{j2\pi f\tau} df$$



Teljesítménysűrűség mérése:

1. Sávszűrővel kivágjuk az érdekes frekvenciát, majd ezt elosztjuk a sávszélességgel és megkapjuk a teljesítménysűrűséget.
2. Korrelátorral mérjük az $R(\tau)$ -t, majd FFT-t számolunk (Wiener-Hincsin összefüggés).

3. $|X(f)|^2$: vesszük a jel Fourier-transzformáltját és abszolútérték-négyzetet képzünk (energiasűrűség spektrum). Ezt hívják Fourier-analizátornak, és így működnek a mai digitális spektrumanalizátorok. Viszont ez egy durva becslő, amit korrigálni kell ($1/T$ -vel, hiszen a teljesítménysűrűség számítása majdnem ugyanaz, mint az energiasűrűségé, csak egy $1/T$ szorzóban térnek el).

1. Példa: sávszűrővel teljesítménysűrűséget mérünk. Meg tudjuk különböztetni a zajt a szinusztól?

Válasz: csak úgy ránézésre nem, viszont a szinuszhoz tartozó teljesítmény egy nagyon hegyes csúcs, a zajhoz tartozó teljesítmény pedig el van osztva a frekvenciával. Ha csökkentjük a sáv szélességet, akkor a szinusznak ott marad a teljesítménye, a zajé viszont csökken. Akkor szinusz a szinusz, ha csökkenő sáv szélességgel egyre nagyobb a teljesítménysűrűség, azaz fix a teljesítmény.

2. Példa: egy oszcillátornak valamekkora fáziszaja van, a frekvenciája picit változik. A generált jel szinusz vagy nem szinusz?

Válasz: attól függ: ha ez a pici frekvenciaingadozás nem számít, akkor elsődlegesen szinuszosnak tekintjük ugyanúgy, ahogy a keringő műholdat is stacionernek tekintjük. Viszont ha a szinusszal beszorzunk, 0-ra keverünk és hosszú ideig átlagolunk, az olyan mintha csináltunk volna egy nagyon keskeny sávszűrőt. Ha a sávszűrő olyan keskeny, hogy a szinusz kimászkál belőle, akkor ebből a szempontból nem szinusz. Ha a sávszűrő olyan széles, hogy nem látjuk, hogy ingadozik, akkor ebből a szempontból szinusz.

3. Példa: ha azt feltételezzük, hogy van egy zajjal fedett szinuszunk, hogyan döntjük el, hogy ott van-e tényleg a szinusz vagy sem?

Válasz: annyira tudjuk eldönteni, amennyire keskeny a sávszűrőnk. Ha nagyon keskeny a sávszűrő és véges a teljesítmény, akkor benne van a szinusz. Ha a szinusz időnként kimászkál a sávszűrőből, akkor ilyen értelemben nem szinusz a szinusz

4. Példa: ha összeadunk két jelet, akkor a teljesítményük, ill. a teljesítménysűrűségük összeadódik?

Válasz: csak úgy nem, de van, hogy igen. ☺

$x(t)$ és $y(t)$ két jel, melyek összegének teljesítménye:

$$P = E\{[x(t) + y(t)]^2\} = E\{x(t)^2 + 2x(t)y(t) + y(t)^2\}$$

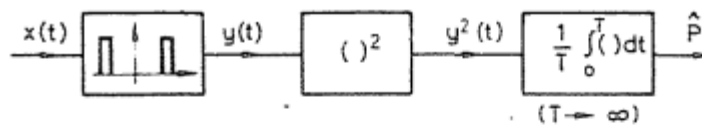
Ez az összteljesítmény származik az $x(t)$ jel teljesítményéből, az $y(t)$ jel teljesítményéből, illetve egy $2x(t)y(t)$ tagból. Ha a 2 jel korrelálatlan, akkor ez a tag kiesik és tényleg összeadódik a 2 jel teljesítménye, egyébként nem.

Egy jel átlagos négyzetes értéke megegyezik az autokorrelációs függvény értékével a 0 helyen, hiszen a korreláció a 2 minta szorzata és annak az átlaga.

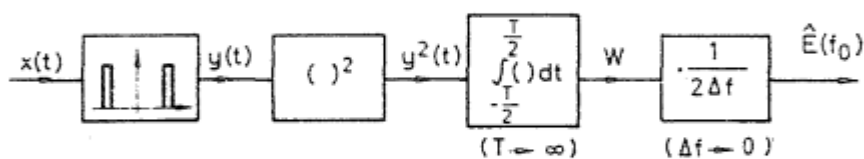
Spektrumanalízis eszközei, korreláció becslő

Sávszűrős analízis

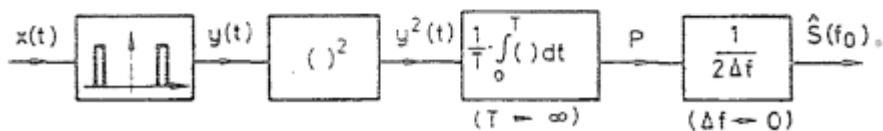
Elnevezése szerint mindegyik energetikai spektrum az adott jel energia-, ill. teljesítménytartalmának frekvencia szerinti eloszlását írja le. Ezért várható, hogy ideális sávszűrővel ezek a spektrumok mérhetők. (a) sávteljesítmény mérése, (b) energiasűrűség-spektrum mérése, (c) a teljesítménysűrűség-spektrum mérése:



a)



b)



c)

Teljesítményspektrum: periodikus jelek esetén Fourier-sor.

$$P_i = |C_i|^2 \quad \text{Ahol} \quad C_i = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-j2\pi \frac{i}{T} t} dt \quad \text{és } T \text{ a periódusidő.}$$

A jelteljesítmény alakulását a frekvencia függvényében az ún. teljesítményspektrum fejezi ki. A **teljesítményspektrum** esetén nyilvánvaló: ha megfelelően keskeny sávszűrővel csak a minket érdeklő harmonikust engedjük át, a teljesítmény könnyen mérhető.

Energiasűrűség-spektrum: determinisztikus, tranziens jelek esetén Fourier-transzformált abszolútérték-négyzete.

$$E(f) = \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \right|^2$$

Teljesítménysűrűség-spektrum: sztochasztikus és periodikus jelek esetén az autókorrelációs függvény Fourier-transzformáltja.

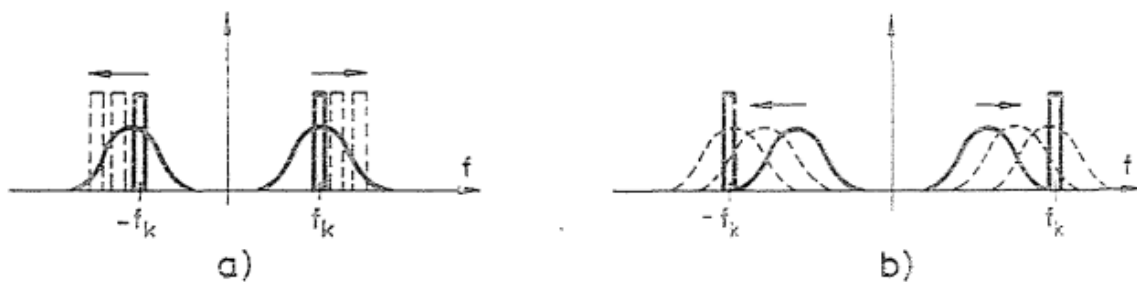
$$S_x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

Szűrőbank: A szűrőbank sáváteresztő szűrők összessége. A szűrőbankot felépítő szűrők átviteli tartományai általában ugyanolyan szélesek, és kis mértékben átlapolják egymást. A szűrőbankok egyik legfontosabb tulajdonsága, hogy a sáváteresztő szűrők eredő átvitele konstans. Az alapsávi szűrő sávjának középpontja lehet a frekvenciatengelyen, ilyenkor ez egy aluláteresztő szűrő, vagy lehet maga is egy sávszűrő.

Letapogató rendszerű analizátorok

A letapogató rendszerű analizátorok közös jellemzője, hogy egy időpillanatban a spektrumnak csak egyetlen pontját mérik. Ezért végig kell pásztázniuk a spektrumot a teljes mérés elvégzéséhez. Tranziens jel analízisére csak akkor alkalmasak, ha a tranziens jelet időben periodikusan megismételjük. A spektrum egy pontját a sávszűrős elv alapján mérhetjük. A pásztázás kétféle módon végezhető el:

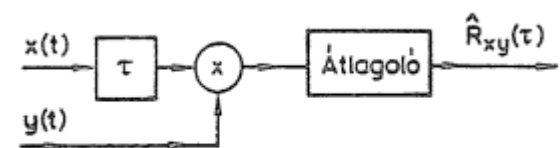
1. A szűrő fk középfrekvenciáját változtatjuk (hangolt szűrős analizátor, 24.45a ábra).
2. A spektrumot toljuk végig a fix középfrekvenciájú frekvenciaablak előtt (transzponáló rendszerű, más néven heterodin analizátor, 24.45b ábra).



24.45. ábra. A letapogató módjai
a szűrőhangolás; b spektrummozgatás

Korrelátor: korreláció mérésére alkalmas eszköz. Az autokorrelációs függvény előállítását után annak Fourier transzformáltja megadja a teljesítménysűrűség függvényt.

Korreláció mérése analóg/digitális módszerrel (az ábrán két jel korrelációjának mérése



24.21. ábra. Analóg elvű korrelációmérés

látható), a digitális mérő Sample and Hold áramkörökkel, A/D-vel és analóg helyett digitális szorzóval van ellátva.

Fourier-analizátorok

Fourier-analizátoroknak nevezzük mindazokat a készülékeket, amelyek Fourier-transzformációs egységeken alapulnak. A gyakorlatban gyakran a gyors Fourier-transzformáción alapuló eszközöket nevezik így.

Amennyiben valamilyen módon elő tudjuk állítani egy tranziens jel Fourier-transzformáltját, a determinisztikus jelek spektrumait egyszerűen meg tudjuk határozni. A determinisztikus tranziens jel spektruma (ill. ennek négyzete) maga az eredmény, a periodikus jelnél pedig egy periódust tranziens jelnek tekintve végrehajtjuk a Fourier-transzformációt és az eredményt a periódusidővel osztjuk: az alapharmonikus egész számú többszöröseinél a Fourier-sor együtthatóit kapjuk.

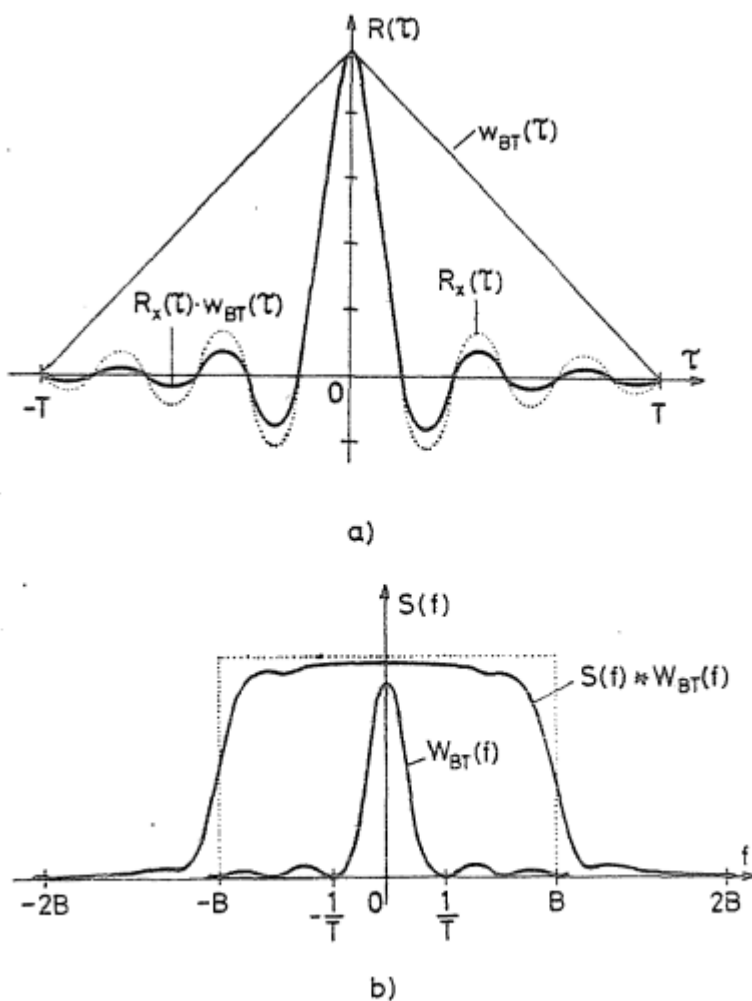
A b és c ábrák(lásd fejezet elején a sávszűrők) hasonlósága alapján azt várjuk, hogy ebből $S_x(f)$ közelítése így nyerhető: $\hat{S}_x(f, T) = \frac{1}{T} |X(f, T)|^2$

Ezt a közvetlen spektrumbecslési algoritmust direkt Fourier-transzformációnak (DRIT), a kifejezést periodogramnak nevezzük.

Az $\hat{S}_x(f, T)$ és $S_x(f)$ -et vizsgáljuk meg abból a szempontból, hogy hogyan közelítik meg egymást. A végeredmény:

$$E\{\hat{S}_x(f, T)\} = \int_{-T}^T \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) R_x e^{-j2\pi f\tau} d\tau = W_{BT}(f) * S_x(f)$$

Úgy tekinthetjük, hogy a háromszög alakú, ún. Bartlett-ablakkal szorzott autokorrelációs-függvény Fourier-transzformáltját adja a periodogram várható értéke. A Bartlett-ablak definíciója:



24.41. ábra. A Bartlett-ablak fellépése

a az ablakfüggvény az időtartományban; b az ablakfüggvény a frekvenciatartományban

$$W_{BT}(\tau) = \begin{cases} 1 - \frac{|\tau|}{T} & , ha -T < \tau < T \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

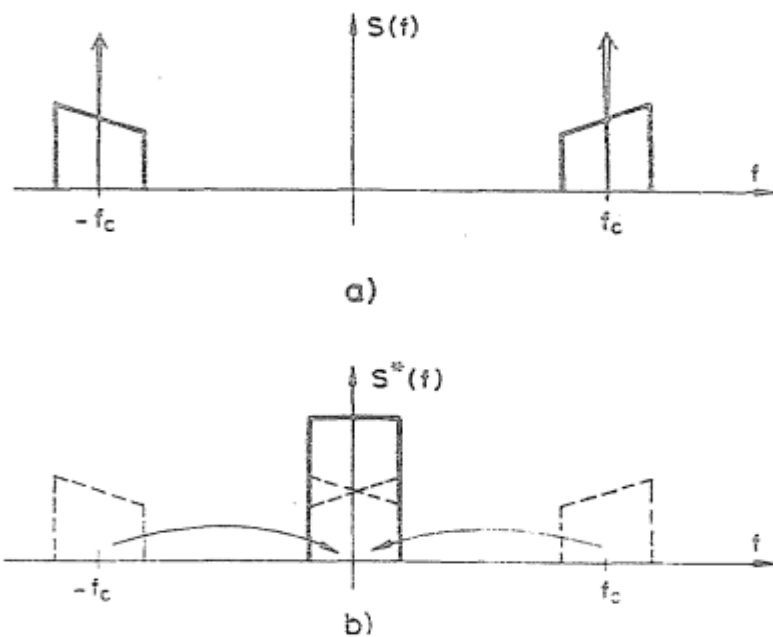
Példaként a 24.41 ábra. A mintaregisztrátum hossza T.

Sávszelektív Fourier analízis

A Fourier-analízis felbontóképessége legfeljebb $\Delta f=1/T$ ill. ablakfüggvényt alkalmazva ennél is rosszabb. Gazdaságossági okokból $N=2^{10}$ fölé nem érdemes menni az adatszámmal, ez pl. 10kHz frekvencián a mintavételezési törvény miatt szükséges minimális $f_m=20\text{kHz}$ mintavételezési frekvenciával is csak $\Delta f=1/T=f_m/N=20\text{ Hz}$ felbontást jelent. A jobb felbontás eléréséhez tehát kisebb mintavételezési frekvenciát kellene biztosítanunk. Ezt úgy érhetjük el, hogy a bennünket érdeklő tartományt 0 Hz környezetébe transzformáljuk, és az érdektelen részek kiszűrése után a mintavételezési törvény kisebb f_m -et követel. A keverés pontosan ilyen tulajdonságú.

A szinuszos keverés spektrumhasító tulajdonsága miatt a két spektrumrész egymásra másolódik, és a spektrum csak az f_c frekvencián nem torzul. Nem lehet kihasználni tehát a Fourier-analízis előnyét, hogy sok pontban képes egyszerre meghatározni a spektrum értékét, hiszen a torzított spektrum kevés információt nyújt. Olyan keverésre van tehát szükség, amely csak eltolást okoz, hasítást nem. Ez pedig a komplex keverés: $e^{-j2\pi f_c t}$ komplex függvénnyel való szorzás.

A moduláció tehát egy balra- és egy jobbratolás összegét jelenti.



24.82. ábra. Szinuszos keverés
a alaphelyzet; b a spektrum a keverés után

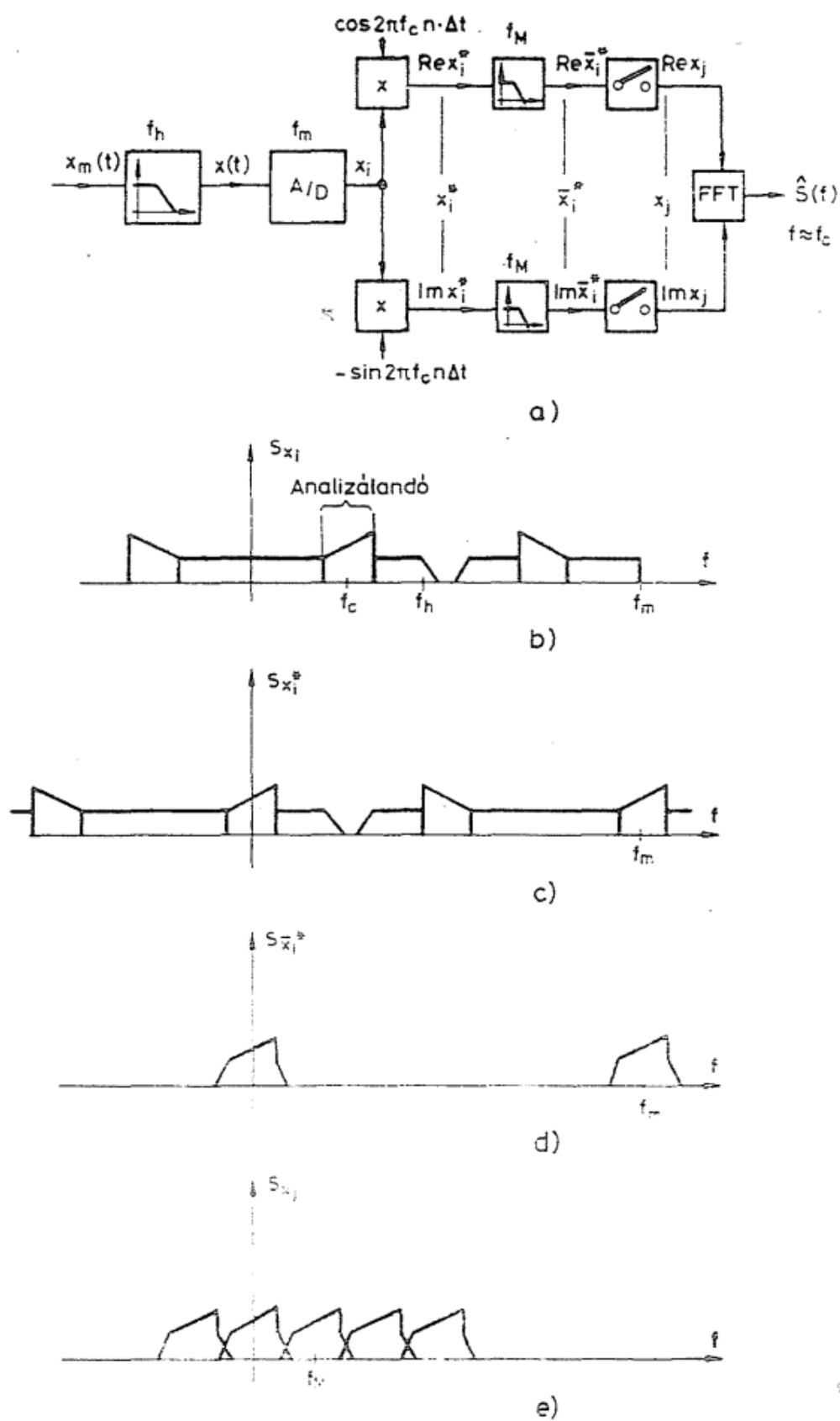
A komplex keverés ismeretében megérthetjük, miért okoz fázishasítást a $\cos(2\pi f_c t)$ függvénnyel való moduláció: $\cos(2\pi f_c t) = (e^{j2\pi f_c t} + e^{-j2\pi f_c t})/2$

A komplex keverés végrehajtható a valós és a képzetes résszel (koszinusz, ill. szinusz) való szorzásként; ügyelni kell azonban arra, hogy a mintafüggvény most már komplex lesz. Ez a sávszelektív Fourier-analízis (Band-Selectable Fourier Analysis, BSFA, vagy más néven komplex demoduláció).

A mérendő $x(t)$ jel határfrekvenciáját az aluláteresztő szűrő segítségével korlátozzuk, majd $f_m > 2f_h$ frekvenciával mintavételezzük. A kapott x_i sorozat spektruma a 24.83b ábrán

látható. Minket az f_c frekvencia környéke érdekel, ezért az $e^{j2\pi f_c t}$ függvénnyel modulálunk. A komplex keverést közvetlenül nem tudjuk elvégezni, ezért a blokk vázlaton látható módon a valós és képzetes részt külön kezeljük, pl. $x_i^* = \text{Re}x_i^* + j\text{Im}x_i^*$ alapján a $\text{Re } x_i^*$ és $\text{Im } x_i^*$ értékeket számoljuk. A spektrumképeken a komplex jelek spektruma látható.

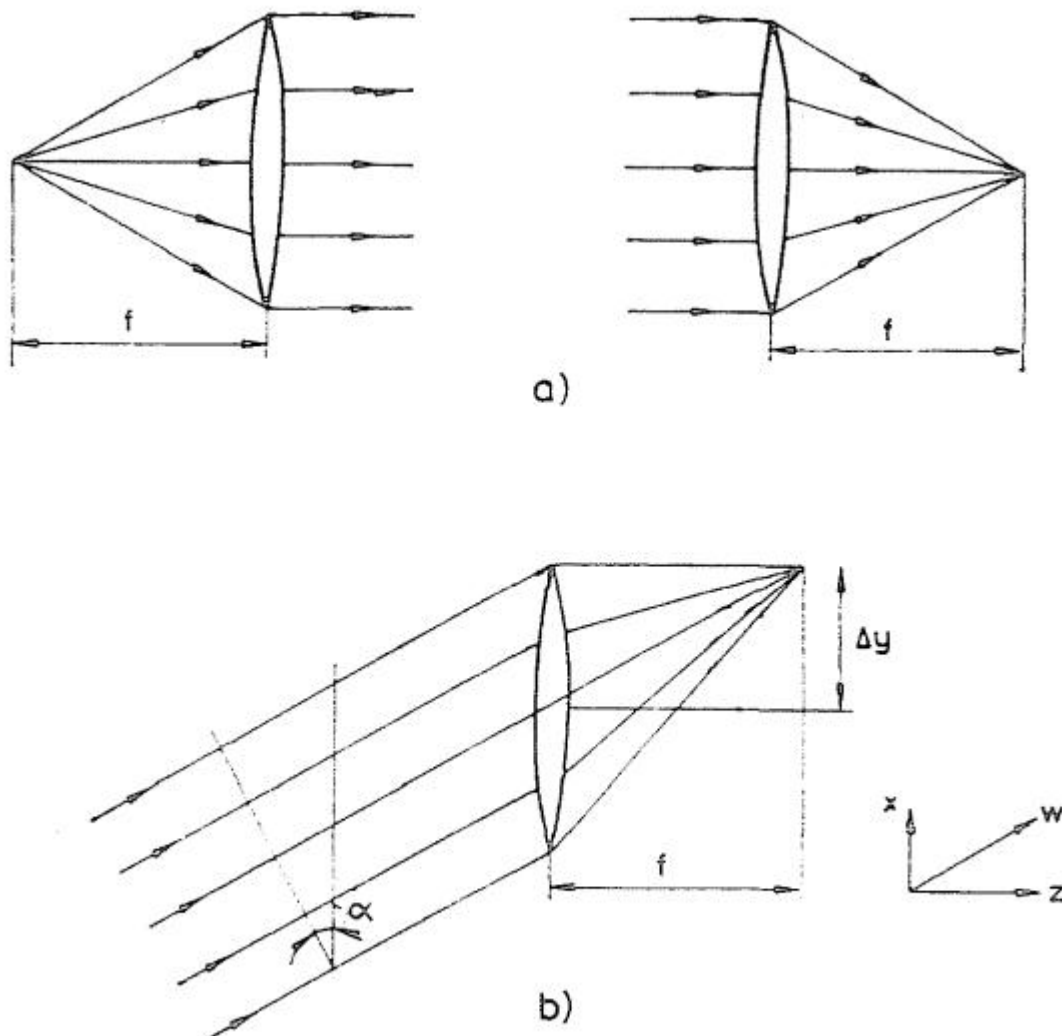
Az eltolts Sx_i^* spektrum látható a 24.83c ábrán. Most már aluláteresztő szűréssel kivágható a 0-ra kevert spektrumtartomány (24.83d ábra). Mivel a jel sávkorlátja csökkent, a mintavétel ritkítható (újramintavételezés) annyira, hogy a 0 középső spektrumtartomány éppen ne torzuljon (24.83e ábra). Az x_i^* sorozatból (azaz a $\text{Re}x_i^*$ és $\text{Im } x_i^*$ sorozatból) csak minden f_m/f_M -edik értéket tartunk meg. A 24.83e ábráról leolvasható, hogy a célt elértük: megfelelő spektrumú, minimális frekvenciával mintavételezett jelsorozatot kaptunk, melyen gazdaságosan elvégezhető a gyors Fourier-transzformáció.


24.83. ábra. A sávselektív *Fourier*-analízis

Az optikai Fourier-transzformáció

Ha egy vékony lencse fókusz síkjában egy $f(x)e^{j\omega t} = a(x)e^{j\varphi(x)}e^{j\omega t}$ hullámfront helyezkedik el, akkor a másik fókusz síkban jó közelítéssel $F(ky)e^{j\omega t}$ hullámfront jelenik meg, ahol k alkalmas konstans, y az optikai tengelytől mért merőleges távolság és $F(ky) = F(f(x))$.

A legegyszerűbb példák közismertek: az optikai tengellyel párhuzamos sugarakat (konstans függvény) egy pontba (Dirac-delta) gyűjti össze a lencse, a fókuszbeli pontszerű fényforrás fényét pedig az optikai tengellyel párhuzamos sugarakká alakítja. Az is ismert az elemi optikából, hogy az optikai tengellyel szöget bezáró párhuzamos sugarak is egy pontba fókuszálódnak, de ez a gyűjtőpont eltolódik a fókusz síkban.



24.73. ábra. Egyszerű példák az elemi optikából

a az optikai Fourier-transzformáció alapesetei; *b* gyűjtőpont-eltolódás véges beesési szög esetén

A korreláció indirekt elvű mérése

A fentiekben láttuk, hogy egy véges hosszúságú regisztrátum Fourier-transzformáltjának varianciája folytonos spektrumú jeleknél közvetlen kapcsolatban van a spektrummal. Valóban, az

$$S(k) = \frac{1}{N} |X_k|^2$$

kifejezés várható értéke folytonos jeleknél közelítőleg a teljesítménysűrűségfüggvénnyel egyenlő. Ez azért is kézenfekvő, mert az energia-sűrűségfüggvény és a teljesítménysűrűségfüggvény fizikai értelmezése nagyon hasonló, ezért kézenfekvő, hogy az energia-sűrűségfüggvény definíciós összefüggéséhez hasonlóan a teljesítménysűrűségfüggvényt is meg tudjuk határozni.

A pontos érték úgy számítható ki, hogy a korábban elhanyagolt háromszög-ablakot (Bartlett-ablakot) figyelembe vesszük:

$$E \{ \hat{S}(k) \} = \{ S(k) \} \star \mathcal{F} \{ w_{\Delta}(m) \}$$

A várható érték tehát az „igazi” spektrum és a frekvenciatartománybeli Bartlett-ablak konvolúciója. Ennek az a következménye, hogy az éles csúcsok szétkenődnek, a meredek élek pedig ellapulnak.

A periodogram varianciája 100%, ezért valahogy átlagolni kell. Két lehetőség van:

- A periodogramot többször egymás után mért regisztrátumokra kiszámítjuk, és az eredményeket átlagoljuk (Welch-módszer).
- A periodogramot sok pontra, nagy felbontással kiszámítjuk, és a szomszédos vonalcsoportokat átlagoljuk (Bartlett-módszer).

$$\text{var} \{ \hat{S}(k) \} \approx \left(\frac{S(k)}{2} \right)^2 \text{var} \{ \chi_2^2 \} = S^2(k)$$

A cirkuláris korreláció értelmezése

$$\hat{R}_{xy}^c(\tau) = \int_0^{\frac{N}{T}} \frac{1}{T} \overline{X(f, T)} Y(f, T) e^{j2\pi f \tau} df$$

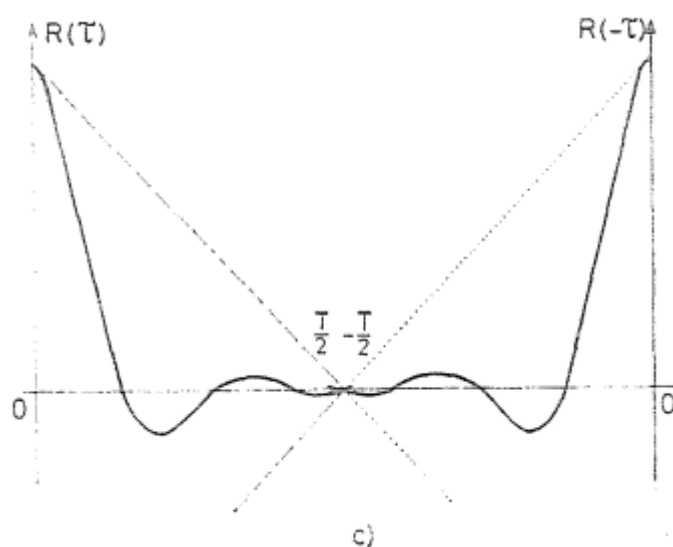
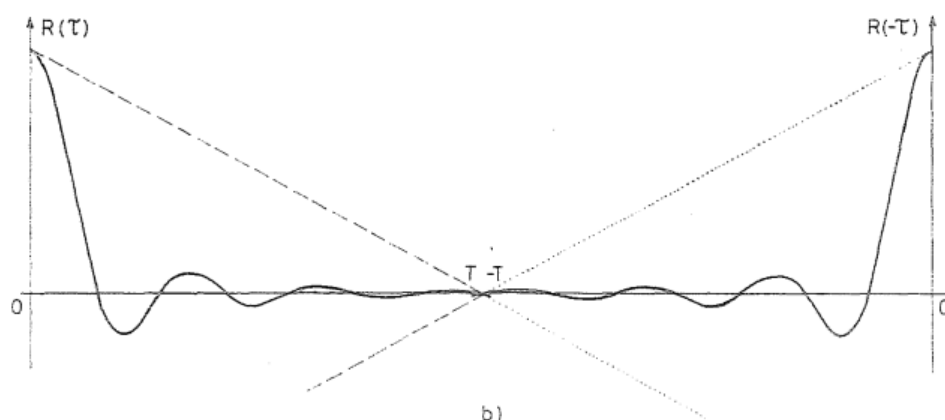
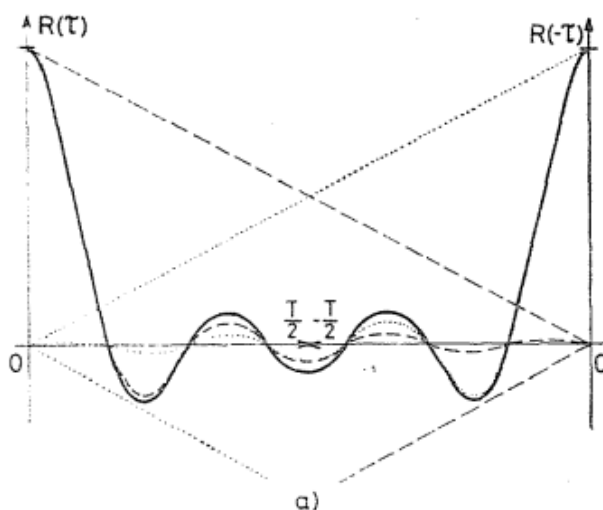
Ennek várható értéke:

$$E\{R_{xy}^c(i\Delta)t\} = \left(1 - \frac{i}{N}\right) R_{xy}(i\Delta t) + \frac{i}{N} R_{xy}[(i-N)\Delta t], \quad i=0, 1, 2 \dots N-1.$$

Azt kaptuk, hogy a háromszög alakú, ún. Bartlett-ablakkal súlyozott korrelációs függvény baloldala rámásolódik a jobb oldalra (a ábra). Ha a korrelációs függvény a $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ intervallumon kívül elhanyagolható (tehát elegendően hosszú mintaregisztrátumot dolgozunk fel), ez az átmásolódás nem zavaró. Ha azonban $R(\tau)$ szélesebb (pl. periodikus komponens esetén egyáltalán nem tűnik el), akkor az egymásramásolódás kellemetlen torzítást okoz.

Vizsgáljuk meg, miből is származik az összemásolódás! A mintaregisztrátum az $i\Delta t$ ($i=0, \dots, N-1$) pontokban adott ($T=N\Delta t$ időtartam), és így Fourier transzformáltja is N pontos. $X(f, T)$ -ek és $Y(f, T)$ -nek így a $\frac{k}{T}$ ($k=0, \dots, N-1$) helyeken (N pont) számítottuk ki értékeit. Az utána **elvégzett szorzásnak azonban a konvolúció** felel meg az időtartományban, és így az $i\Delta t$ ($i=0, \pm 1, \dots, \pm(N-1)$) pontokban kellene megkapnunk a korrelációs függvényt. Ennek a $2T$ korrelációhossznak azonban az $\frac{l}{2T}$ ($l=0, \dots, 2N-1$) pontok felelnek meg, tehát a spektrumra

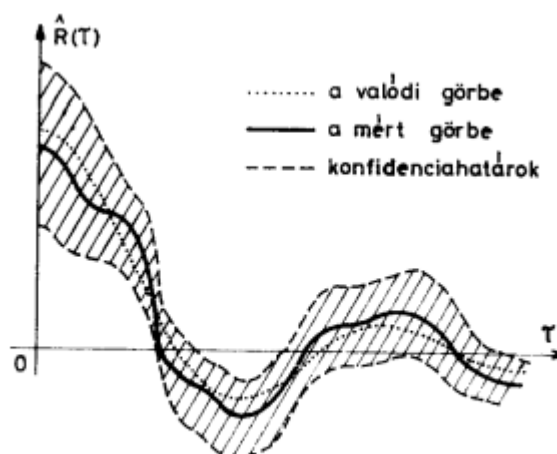
kétszer sűrűbb mintavételezéssel lenne szükségünk. Nem tartjuk be a mintavételi törvényt. Mit lehet tenni? (1) Az N -pontos $X(f, T)$ -ből a mintavételi tétel értelmében a közbenső értékek is meghatározhatók, de a számítás meglehetősen körülményes. (2) Ezért célszerűbb, ha az időtartományban kiegészítjük a mintaregisztrátumokat N darab 0-val, és így $2N$ -pontos diszkrét Fourier-transzformációt hajtva végre a megfelelő pontokban kapjuk meg a Fourier-transzformáltakat és a spektrumbecslőt (b ábra). (3) Egy másik megoldás az, hogy az



időfüggvényt $T/2$ hosszra csonkítjuk (c ábra).

A cirkuláris korreláció fellépte egyébként analóg azzal a megfigyeléssel, hogy míg a folytonos transzformáció a konvolúciót és a szorzást valóban egymásba viszi át, a DFT a frekvenciatartománybeli szorzást az ún. cirkuláris konvolúciónak felelteti meg.

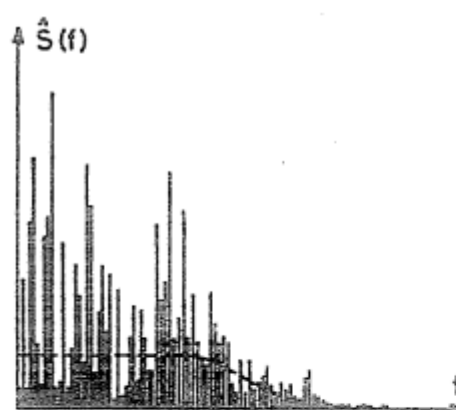
A Bartlett ablak esetén korrekciót kell végezni: a Bartlett-ablakkal osztanunk kell. Mivel kis számmal osztva a variancia nagyon megnőne, a $\pm T/2$ intervallumban végezzük csak el az osztást.



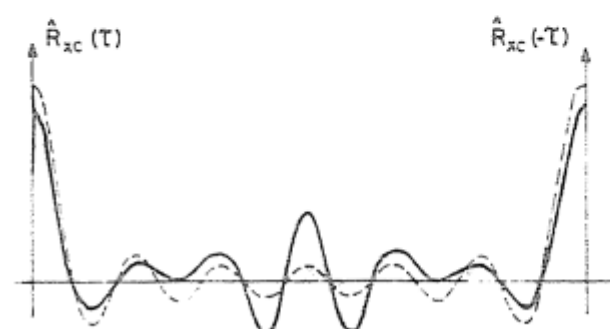
7.6. ábra. A konfidencia-sáv kijelzése korreláció-becslésben

A korrelációbecslő varianciája

Egy sávkorlátozott fehér zajt próbálunk becsülni, ennek konstans a spektruma (egészen B-ig). Szaggatott vonallal az ablakfüggvénnyel torzított függvényt (azaz a becslők várható értékét) jelöltük. A spektrumbecslőn jól érzékelhető a nagy variancia. Ennek az az oka, hogy a szomszédos frekvenciapontokhoz tartozó becslők egymástól gyakorlatilag függetlenek.



a)



b)

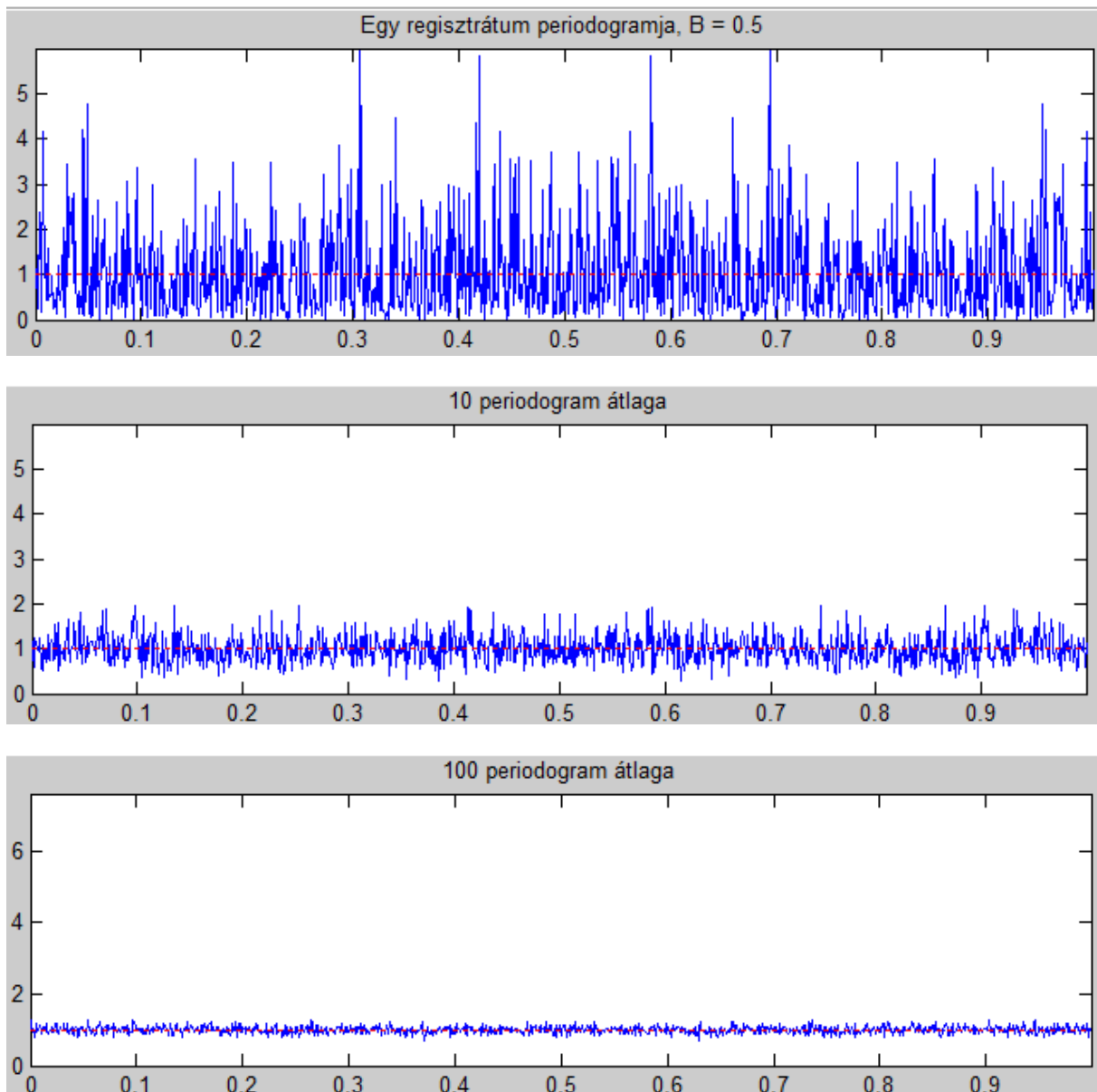
A korábbiakban láttuk, hogy a periodogram varianciája nagy: 100%. Arra számíthatunk, hogy az inverz Fourier-transzformált varianciája szintén nagy. A korrelációbecslőnél az a helyzet, hogy a szomszédos pontokhoz tartozó becslők erősen korreláltak. Emiatt a mért pontok az emberi szem számára függvényvé állnak össze,

24.106. ábra. A variancia megjelenése a frekvencia- és az időtartományban

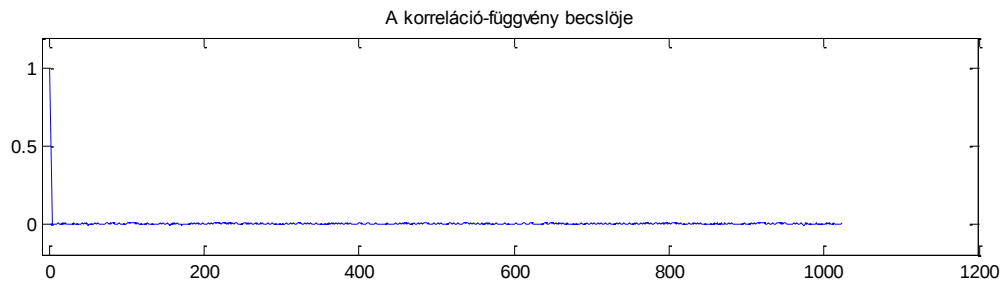
pedig az ábra nagy részén a hullámozás a varianciából származik. Mivel ez veszélyes érzéksalódás, jeleznünk kell a felhasználó számára. Ennek legésszerűbb módja a konfidencia-sávok kijelzése (vagyis azon határok kijelzése, melyek közé az ismert variancia esetén az igazi függvény jó eséllyel beleesik, 7.6. ábra). Ezt sajnos a korrelátorok többsége ma még nem teszi meg.

G-mondja: A variancia 100%. Sztem ez azt jelenti, hogy az átlagtól való átlagos eltérés az átlaggal megegyezik. A varianciája a mérésnek nagyon nagy és ezért a várható értéke elveszik, gyakorlatilag beleveszik a szétkenődött becslőbe, ezt nem szeretjük. Ezért alkalmazzuk a Welch és Bartlett módszereket.

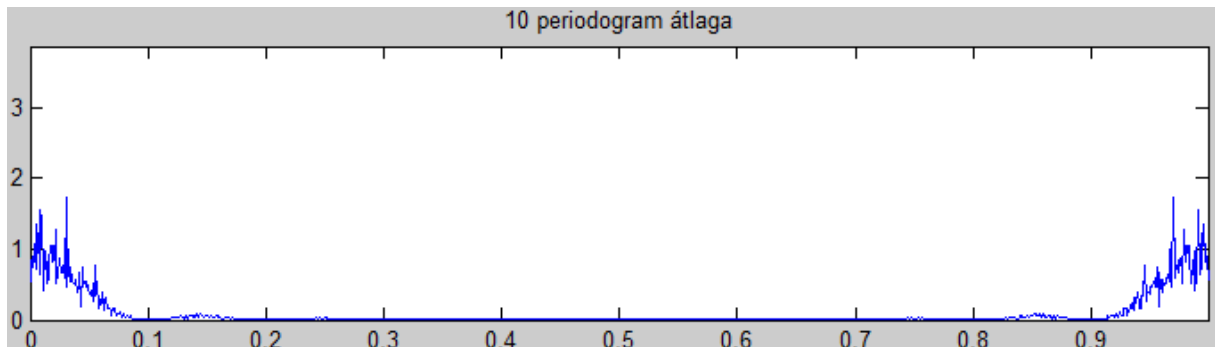
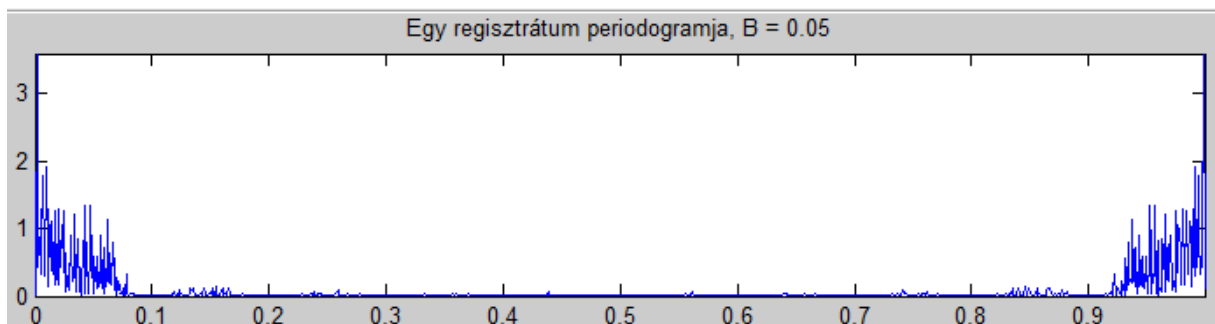
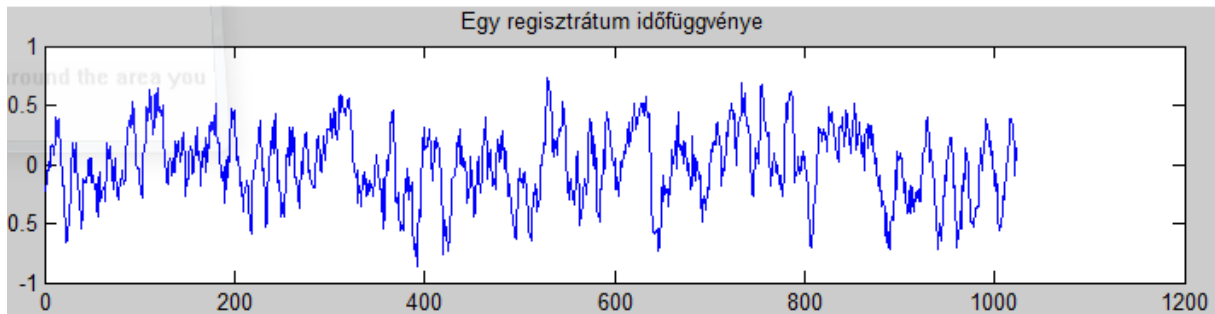
Ez itt mind Bartlett módszer, vagyis mozgóablakos átlagolás. Ha 10, 100-as átlagolást alkalmazunk, akkor a korrelációbecslő egyre pontosabban tudja becsülni a tényleges spektrumot. 10-es átlagolással a variancia tizedére csökken, a szórás ennek négyzetgyökével.

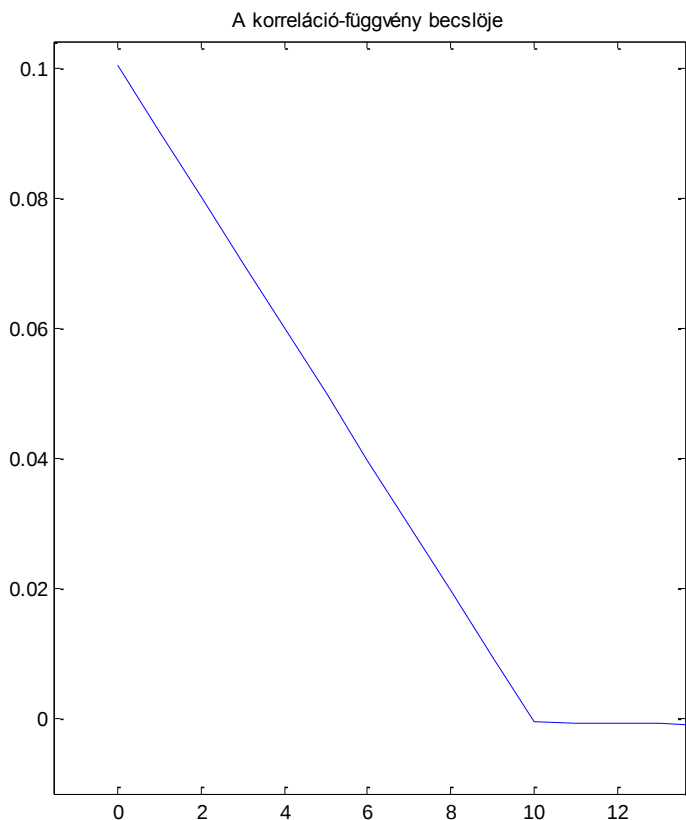
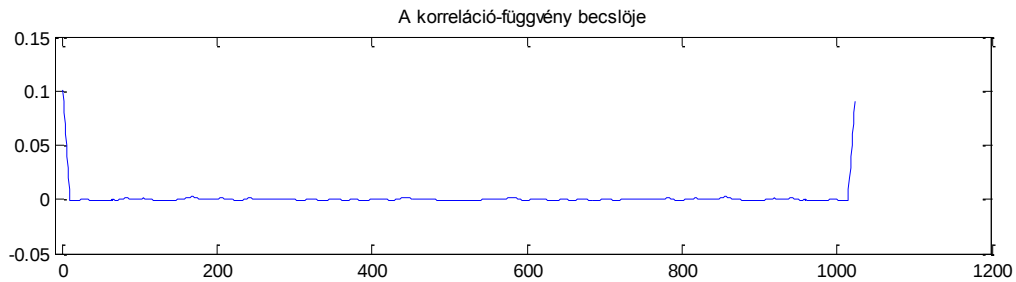
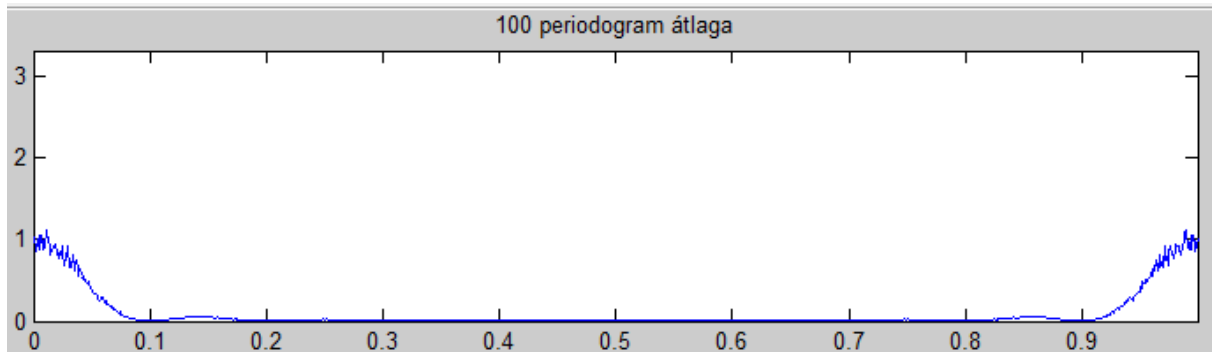


A korreláció becslője 100 átlagolás után azt mutatja amit szeretnénk, természetesen még itt is van hiba. Az látható, hogy a korreláció mindenhol nulla kivéve a nulla helyen. Itt 1-et kell felvennie mivel korrelációról beszélünk.



Ha alkalmazzuk a Bartlett módszert, vagyis mozgóablakos átlagolást végzünk, akkor az egy aluláteresztő szűrésnek felel meg, ez látható is az idő- és frekvenciatartománybeli jeleken.





A periodogram átlagolás hatására ebben az esetben is jobb tulajdonságokkal bír. Mivel ez egy mozgóablakos átlagolás volt, ezért a minták 10 távolságban egymástól korreláltak lesznek.

Hogyan lehet megmérni a bizonytalansági sávot valós esetben (mekkora a varianciája a mérésnek)? (1) becslők egymásra rajzolása, ha ezek egy sávban ingadoznak, akkor ez variancia, nem függenek össze. (2) a konfidencia intervallum: kiszámoljuk az átlagot és attól való négyzetes eltérést számítjuk ki. Mivel sokaságról van szó, ezért Gauss eloszlású lesz, ezért ez lesz a Gauss szórása, 2-3 szigma pedig elegendően nagy konfidencia (95-99,99%). Elvben függ a jel fázisától nemkoherens mintavételezés esetén, hogy mekkora a korrelációbecslő, de nem jelentős a

változás. Van varianciája, de nem nagy.

$|X_k|^2$ eloszlása a Bartlett ablak miatt exponenciálisan lecsngő.

Cirkuláris konvolúció

<http://www.dspguide.com/ch9/3.htm>

állítjuk be, hogy a **modellből számított és a mért értékek különbségeinek négyzetösszegét minimalizáljuk** (legkisebb négyzetes vagy LS módszer).

Felmerül a kérdés, hogy az LS módszer mennyire jó, és nincs-e ennél jobb eljárás? Erre a válasz az, hogy amennyiben ismerjük a megfigyelés modelljét, beleértve a zaj beépülését a mért eredményekbe, akkor általában van. Ezt **maximum likelihood** módszernek nevezik. Bizonyos speciális esetekben az LS módszerre vezet, de nem mindig. A maximum likelihood módszer lényege a következő:

1. Felírjuk a megfigyelések együttes sűrűségfüggvényét. Ez tartalmazza a meghatározni kívánt paramétereket.
2. A fenti függvényt (vagy annak logaritmusát, ha az egyszerűbb, hiszen a logaritmus-függvény monoton) maximalizáljuk a paraméterek változtatásával. A maximalizálás gyakran (de nem mindig) deriválással történhet.

Mikor jobb egy becslő a másikinál? Két jellemzőt szoktak megvizsgálni: a torzítást (az a jó, ha egy becslő torzítatlan) és a varianciát vagy szórásnégyzetet (az a jó, ha egy becslő varianciája kicsi).

A végeredményképpen kapott becslőt hibájával szokták jellemezni. A felhasználót azonban elsősorban nem ez érdekli, hanem az, hogy a keresett érték milyen intervallumba esik nagy valószínűséggel (hibahatár). Ez az ún. **konfidencia-intervallum**.

Bayes-tétel

Ha ismert az A és B események valószínűsége, és a $P(B|A)$ feltételes valószínűség¹, akkor

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) P(A)}{P(B)}$$

$P(A)$ -t az A esemény a priori², $P(A|B)$ -t az a posteriori³ valószínűségének is nevezik; a szokásos értelmezésben A valamiféle hipotézis, B egy megfigyelhető esemény, és tétel azt adja meg, hogyan erősíti vagy gyengíti az esemény megfigyelése a hipotézis helyességébe vetett hitünket. Tehát ismerjük a **valós** esemény/paraméter valószínűség eloszlását ($P(A)$), a rá utaló, hozzáköthető **megfigyelhető** paraméter valószínűség eloszlását ($P(B)$), és azt, hogy

¹ Feltételes valószínűség: Az „A” eseménynek a „B” eseményre vonatkozó feltételes valószínűsége megadja az „A” esemény bekövetkezésének a valószínűségét, feltéve hogy a „B” esemény már bekövetkezett, vagy bekövetkezik. Jelölése $P(A | B)$, szóban: A feltéve B.

² a priori: A tapasztalatot, a tényeket megelőző tudás.

³ a posteriori: A tapasztalatból származó ismeret.

a **megfigyelhető** paraméter bekövetkezése mellett, a valós esemény/paraméter bekövetkezése milyen valószínűség sűrűség függvényű. Ebből következtetünk arra, hogy milyen eloszlású az, hogy ha a valós paraméter mellett feltéve a megfigyelhető értéke mekkora.

Bayes becslés

Kezdjük egy példával: Egy orvosnak meg kell állapítania, hogy kanyarós-e egy páciens. Kiütések nem egyértelmű indikátorai annak, hogy kanyarós a beteg, de jelezheti (lehet anélkül is kanyarós valaki, hogy nincs kiütése). Jelöljük M -mel a kanyarós megbetegedést, S -sel a kiütések jelenlétét, m jelölje a megbetegedések számát, x pedig azt, hogy beteg ÉS kiütése is van, az összes páciens N . Annak valószínűsége, hogy valaki kanyarós m/N , az pedig, hogy kiütése is van x/N . Annak feltételes valószínűsége, hogy egy kanyarós betegnek kiütései vannak: $P(S|M)$, az értéke pedig x/m .

Annak a valószínűsége, hogy valaki kanyarós és kiütése van kétféleképpen írható fel:

(1) Annak a valószínűsége, hogy a páciensnek kiütései vannak feltéve, hogy kanyarós azzal szorozva (valószínűségek szorzata $\rightarrow$ együttes bekövetkezés, ÉS kapcsolat) annak valószínűségével, hogy valaki kanyarós:

$$P(M \text{ és } S) = P(S|M) \cdot P(M)$$

(2) valamint annak a valószínűsége, hogy a páciens kanyarós feltéve, hogy kiütései vannak, szorozva annak valószínűségével, hogy egy páciens kiütéses:

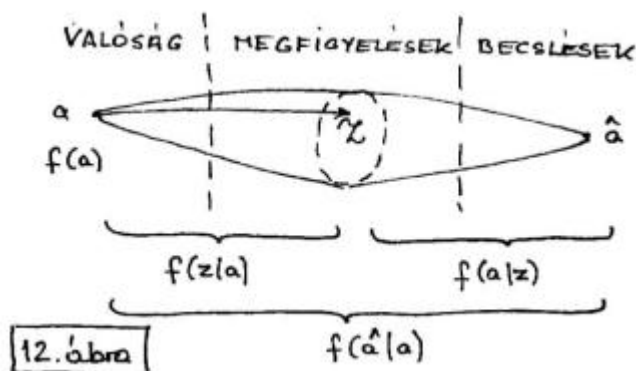
$$P(S \text{ és } M) = P(M|S) \cdot P(S)$$

A két egyenletet egyenlővé téve egymással megkapjuk annak a valószínűségét, hogy a páciens kanyarós feltéve, hogy kiütései vannak:

$$P(M|S) = P(S|M) \frac{P(M)}{P(S)}$$

Úgy kaptuk meg a valószínűséget, hogy (I) a páciensek kiütésének valószínűségét, (II) a páciensek kanyarós voltának valószínűségét és azt (III) a feltételes valószínűséget használjuk fel, hogy egy páciensnek kiütései vannak és kanyarós.

A példa értelmezése: A fenti példa könnyen átültethető a villamosmérnöki gyakorlatba: ismert a megfigyelt paraméter sűrűségfüggvénye: (II) $f(a)$, és (III) a csatorna karakterisztikája: $f(z|a)$. A



megfigyelés után, ezek alapján a Bayes szabály felhasználásával előállítható az $f(a|z)$ ún. a posteriori sűrűségfüggvény:

$$f(a|z) = f(z|a) \frac{f(a)}{f(z)}$$

$$(I)f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(a)f(z|a) da$$

Tételezzük fel, hogy az ismeretlen a valószínűségi változó paramétert a $\{z_i\}$ megfigyelések felhasználásával kívánjuk becsülni. Továbbá az ismeretlen paraméterről bizonyos előismerettel rendelkezünk, melyet a paraméter $f_a(a)$ a priori valószínűség-sűrűségfüggvénye ad meg.

Van sok megfigyelés az ismeretlen paraméterről: $z_1, z_2, \dots, z_N$. A vizsgálati modellben feltételeztük, hogy a megfigyeléseket zaj terheli: $z_i = a + n_i$.

Emiatt ismerni kell a megfigyelések feltételes sűrűségfüggvényét: $f(z|a)$, a **csatornakarakterisztikát**. A megfigyelés utáni ismereteket a paraméter $f(a|z)$ a posteriori sűrűségfüggvénye adja meg. **A Bayes-becslési módszerek mindegyike az a posteriori sűrűségfüggvény meghatározására vezet.**

Miután az a posteriori sűrűségfüggvény rendelkezésünkre áll a segítségével meghatározzuk az ismeretlen paraméter (vektor) lehető legjobb becslőjét. Ehhez értelmezzük a „legjobb” fogalmát alkalmas költségfüggvényeken keresztül:

$$R(\hat{a}, a) = E\{C(\hat{a}, a)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} C(\hat{a}, a) f(a|z) da$$

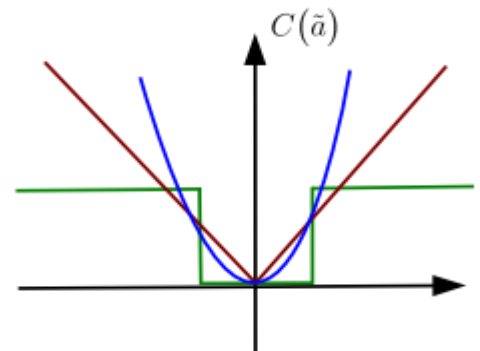
amely függvény minimuma a Bayes költség:

$$R_B = \min_{\hat{a}} R(\hat{a}, a) = \min_{\hat{a}} E\{C(\hat{a}, a)\}$$

A $C(\hat{a}, a)$ az ún. **költségfüggvény, kritériumfüggvény, hibafüggvény vagy illesztési függvény** bármilyen feldolgozási algoritmust jelölhet, amely viszonylag egyszerűen megvalósítható és amely érvényes optimumkritérium alapját képezheti. Leggyakrabban a négyzetes, abszolútérték és lépcsős kritériumfüggvényeket használatosak:

$$C(\hat{a}, a) = \sum_{i=1}^m (\hat{a}_i - a_i)^2 = (\hat{a} - a)^T (\hat{a} - a)$$

$$C(\hat{a}, a) = \sum_{i=1}^m |\hat{a}_i - a_i|$$



$$C(\hat{a}, a) = \begin{cases} 0, & \text{ha } |\hat{a}_i - a_i| \leq \frac{\Delta}{2} \quad \forall i - re \\ 1, & \text{egyébként} \end{cases}$$

Minimális átlagos négyzetes hibájú becslés: $\hat{a}_{MS} = \int_{-\infty}^{+\infty} af(a|z)da$, azaz ezzel a kritériumfüggvénnyel a legjobb becslés az a posteriori várhatóérték.

Minimális átlagos abszolút hibájú becslés: $\hat{a}_{ABS} = f(a|z)mediánja$

Maximum a posteriori becslés: $\hat{a}_{MAP} = f(a|z)maximuma$

Maximum Likelihood becslés

Adott egy modell, mellyel elképzeléseink szerint jól leírható a meghatározni kívánt rendszer. (A modell típusának és rendszámának megválasztásával most nem foglalkozunk, adottnak tekintjük.) A modellnek vannak szabad paraméterei, melyeket mérésel kívánunk meghatározni. A mérési eredményeink zajjal terheltek. Azaz, magukat a paramétereket nem tudjuk mérni, csak egy valószínűségi változót, mely több-kevesebb összefüggést mutat a modell paraméterrel. Kérdés, hogy a mért értékekből hogyan becsüljük meg a modell paramétereit, hogy a lehető legpontosabb becslést kapjuk.

Az egyik legáltalánosabb becslési stratégia, amit parametrikus becslésnél használunk, az un. maximum likelihood eljárás. **A módszert abban az esetben alkalmazzuk, mikor a modell paraméterek sűrűségfüggvényei ismeretlenek** (hiszen a modellben szereplő paraméterek is valószínűségi változók a mérés szempontjából), **viszont a mérést terhelő zaj eloszlása ismert**. Amennyiben egy eloszlásról semmit sem tudunk, legkézenfekvőbb megoldás egyenletesnek feltételezni.

A maximum likelihood becslés tehát a következőt jelenti: maximalizálni kell a

$$P \{ \text{ezt mértem} \mid \text{a paraméter ennyi és ennyi} \}$$

feltételes valószínűséget. Formálisan a bayes-döntésből vezethetjük le. A Bayes döntést az alábbi formula írja le:

$$P \{ \mathbf{p} \mid \mathbf{y}_m \} = \frac{P \{ \mathbf{y}_m \mid \mathbf{p} \} P \{ \mathbf{p} \}}{P \{ \mathbf{y}_m \}}$$

(ahol $\mathbf{p}$ a paramétervektor, $\mathbf{y}_m$ a mért vektort jelenti) ML döntés esetén ez a képlet leegyszerűsödik:

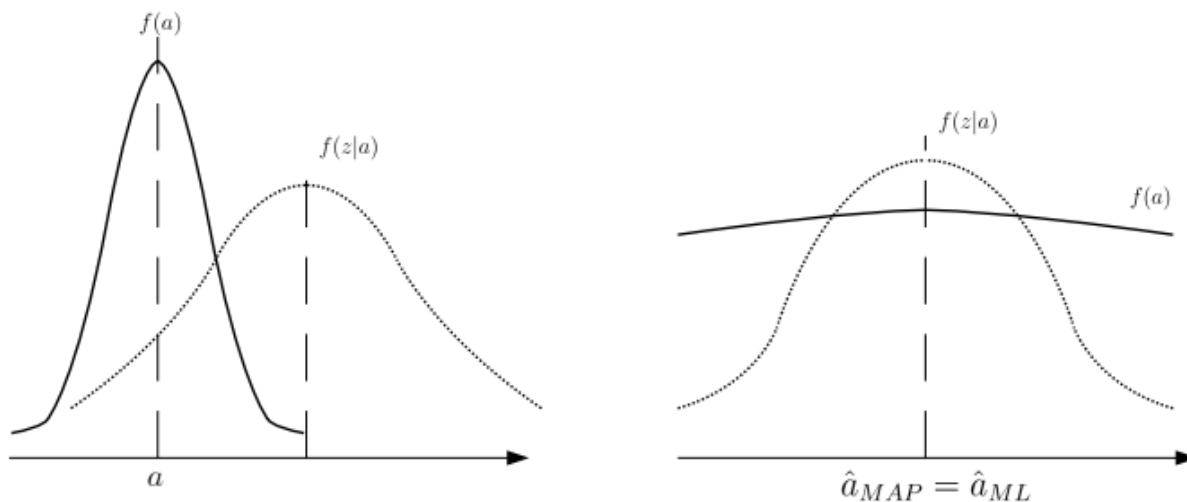
$$P \{ \mathbf{p} \mid \mathbf{y}_m \} = C P \{ \mathbf{y}_m \mid \mathbf{p} \}$$

hiszen a paraméterek egyenletes eloszlásúak, a $P \{ \mathbf{y}_m \}$ pedig csak súlyozó tényezőként működik.

Az $L(y_m | p) = P \{y = y_m | p\}$ függvényt likelihood függvénynek nevezzük, és mindig meghatározható kizárólag a mérési zaj eloszlásának ismeretében. A paramétervektor maximum likelihood becslése (p_{ML}) pedig a likelihood függvény p szerinti maximalizálásával adódik.

Megjegyzés: A logaritmus függvény monotonitása miatt a maximalizálás szempontjából ekvivalens a likelihood függvény helyett annak logaritmusát maximalizálni, ami sokszor – számítástechnikai okokból – célszerű lehet.

Amennyiben csak az $f(z|a)$ feltételes sűrűségfüggvény adott (tehát a Bayes-becslő származtatható), ilyenkor a legjobb becslést az ún. Maximum Likelihood becslő eredményezi. A Bayes-becslőknél az $f(a)$ a priori sűrűségfüggvény ismeretére szükség volt. A maximum likelihood becslőknél $f(a)$ -t nem ismerjük, ami úgy modellezhető, mintha egyre jobban szétterülő sűrűségfüggvényünk volna. Az a mérendő paramétert tehát egyre nagyobb varianciájú valószínűségi változónak tekintjük.



2. ábra. Az a priori sűrűségfüggvény hatása

A maximum likelihood becslésnek szemléletes értelmezést is adhatunk. Minthogy vagy nem ismerjük a paraméter eloszlását, vagy a paraméter ismeretlen, nem valószínűségi változó, csak a megfigyelésekre támaszkodhatunk. Az ML becslésnek ezért azt a paraméterértéket tekintjük, amely mellett a kapott megfigyelés a legvalószínűbb. A likelihood függvény tehát a kapott megfigyelés hihetőségének mértékét a keresett paraméterérték függvényében adja meg. A maximum likelihood becslőnek nagyon kellemes tulajdonságai vannak: (1) aszimptotikusan torzítatlan (nagy N -ekre a torzítás nullához tart), (2) aszimptotikusan hatásos, (3) aszimptotikusan normális eloszlású, (4) egy függvény becslője egyenlő a becslő függvényével.

Likelihood és log-likelihood függvény

Likelihood függvénynek a következőkben a megfigyelés feltételes sűrűségfüggvényét $f(z|a)$ tekintjük, melynek $\mathbf{a}$ szerinti maximumhelyéhez tartozó paraméterérték adja meg definíciószerűen az optimális becslést. A szélsőérték feladatát a likelihood egyenlet írja le, kihasználva a logaritmus függvény monotonitását a log-likelihood függvényt kapjuk.

$$\frac{\partial \ln f(z|a)}{\partial a} \Big|_{a=\hat{a}} = 0$$

$$\frac{\partial f(z|a)}{\partial a} \Big|_{a=\hat{a}} = 0$$

1. Példa

Adjunk becslést N db zajos mérésből egy vekni súlyára. A modellünk a következő:

$$y = g + n \quad (3)$$

ahol y a mért érték, g a valódi súly, n pedig a mérést terhelő zaj. Tudjuk, hogy a mérési zaj Gauss-eloszlású, az egyes mérések zaja egymástól független. Ezek alapján a likelihood függvény kiszámolható:

$$L(\mathbf{y}_m | g) = \prod_{i=1}^N P\{y_i | g\} = \prod_{i=1}^N f_n(y_i | g) \quad (4)$$

ahol f_n jelöli a zaj sűrűségfüggvényét. Mivel a zaj normális eloszlású, így a likelihood függvény:

$$L(\mathbf{y}_m | g) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}^N} \exp\left(-\sum_{i=1}^N \frac{(y_i - g)^2}{2\sigma_n^2}\right) \quad (5)$$

Esetünkben a likelihood függvény logaritmusát egyszerűbb lesz maximalizálni, így felírjuk az ún. log-likelihood függvényt:

$$\ln L = C - \frac{1}{2\sigma_n^2} \sum_{i=1}^N ((y_i - g)^2) \quad (6)$$

ahol C egy konstans. A vekni súlyának ML becslése ezek alapján.

$$g_{ML} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i \quad (7)$$

Vagyis eredményül azt kaptuk, hogy a vekni súlyának ML becslését úgy kapjuk, hogy a mért értékek számtani átlagát képezzük.

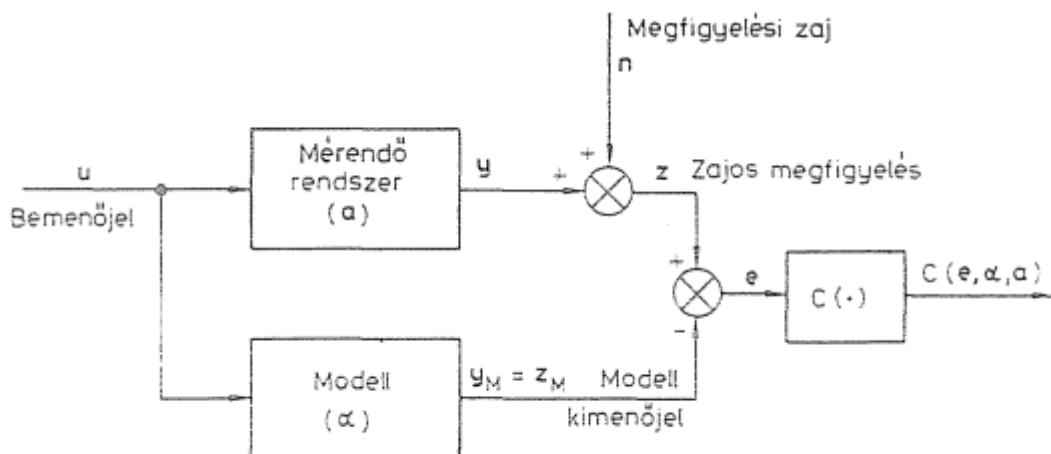
Legkisebb négyzetes hibájú becslők

Láttuk, hogy általában a becslők az a priori ismeretek és valamilyen alkalmasan megválasztott hibakritérium alapján származtathatók. A Bayes-becselőknél a becsülni kívánt

paraméter és a megfigyelések statisztikai jellemzőit kellett ismerni, az ML becslőknél a megfigyelések feltételes sűrűségfüggvényének a priori ismeretére volt szükség. A priori ismeret hiányában viszont csupán a mérendő rendszer és a modell közötti valamilyen értelemben megfogalmazott eltérés minimalizálása lehet a származtatás alapja.

A négyzetes kritérium mellett sok elméleti és gyakorlati megfontolás szól, így pl.: könnyen kezelhető analitikusan, fizikailag jól interpretálható (pillanatnyi teljesítmény, energiatartalom stb.) és nem utolsósorban az ilyen kritériumok alapján származtatott becslő könnyen realizálható. E kedvező tulajdonságok is közrejátszanak abban, hogy a legkisebb négyzetes hibájú becslők a becsléstudomány egyik leggyakrabban alkalmazott témakörét képezik.

A legkisebb négyzetes hibájú becslés feladatát a következőképpen fogalmazhatjuk meg: a mérendő rendszer ismeretlen a paraméterének olyan $\hat{a}$ becslését keressük, amely



3.13. ábra. A négyzetes hiba függvény értelmezése

mellett a rendszerről nyert megfigyelés (z) és a modell kimenőjének (y_M) négyzetes eltéréseként definiált hiba minimális lesz:

$$C(a, \alpha) = (z - y_M)^T (z - y_M)$$

A becslést a mérendő rendszerről nyert megfigyelés felhasználásával valamilyen $\hat{a} = g(z)$ összefüggés szerint kaphatjuk.

G mondj: például képzelj el egy olyan mérendő rendszert (a), amely semmi más nem csinál mint a kimenetén egy szinuszt állít elő (y). Ezt a szinuszt akarjuk minél jobban közelíteni egy modellel. A modellnek vannak szabadsági fokai, ezeket tudjuk állítani. Analitikus esetben veszünk sok mintát és számolunk egy LS-t vagyis a szabad paramétereket úgy próbáljuk beállítani, hogy a mért és becsült értékek közti különbség négyzete minimális legyen, ez a fenti $C(a, \alpha)$ függvény minimalizálását jelenti. Ez az R mátrixos számolgatás méréselméletből. Iteratívan pedig ugyanez történik, csak nem egyből, hanem egy bizonyos bátorsági tényezővel, szintén méréselmélet házi.

Egy szinusz jelet már alacsony fokszámú polinommal is jól lehet közelíteni. Gyakorlatilag 3 fokú már 95% fölötti korrelációt mutat.

Gauss-Markov (GM) becslő: A maximum likelihood becslő speciális esete, amikor a megfigyelési zaj Gauss eloszlású, a megfigyelési egyenlet pedig lineáris. N dimenziós megfigyeléseket végzünk, n az N dimenziós zaj-vektor:

$$E\{n\} = 0, \text{ cov}\{n, n\} = \Sigma_{nn}, f(n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}} |\Sigma_{nn}|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2} n^T \Sigma_{nn}^{-1} n}, \quad (63)$$

ahol $|\Sigma_{nn}|$ a Σ_{nn} mátrix determinánsát jelöli.

A megfigyelési egyenlet: $z = Ua + n$, amellyel a csatorna karakterisztika

$$f(z|a) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}} |\Sigma_{nn}|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2} (z - Ua)^T \Sigma_{nn}^{-1} (z - Ua)}, \quad (64)$$

melynek szélsőérték helye a

$$\frac{\partial \ln f(z|a)}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a} [(z - Ua)^T \Sigma_{nn}^{-1} (z - Ua)] \Big|_{a=\hat{a}_{GM}} = 0 \quad (65)$$

összefüggés alapján határozható meg. (65) alapján:

$U^T \Sigma_{nn}^{-1} Ua - U^T \Sigma_{nn}^{-1} z = 0$, amiből

$$\hat{a}_{GM} = [U^T \Sigma_{nn}^{-1} U]^{-1} U^T \Sigma_{nn}^{-1} z, \quad (66)$$

ha $[U^T \Sigma_{nn}^{-1} U]^{-1}$ létezik.

Megjegyzések: (1) A (66) összefüggés $\Sigma_{aa}^{-1} = 0$ (a „szórás végtelen”) helyettesítés mellett a Bayes esetből származtatható. (2) A Gauss-Markov becslő torzítatlan.

Szórásnégyzet becslése

Tapasztalati szórás:

$$s_N = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i^2 - \bar{x}^2)} = \sqrt{\frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^N x_i^2 \right) - \bar{x}^2},$$

ahol N a mintaszám, x_i az aktuális minta értéke, $\bar{x}$ pedig a minta átlaga.

A korrigált tapasztalati szórásnégyzet esetében az osztást $N-1$ -el hajtjuk végre, azért, hogy a mögöttes folyamat becslőjét kapjuk. Ha N -el osztunk, akkor az eddig mintavett jelsorozat becslője lesz. Nagy N -eknél a különbség nem vehető észre, kis N -eknél azonban pontosabb a becslés.

$$s = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}$$

Kvantálás, dither, kerekítés

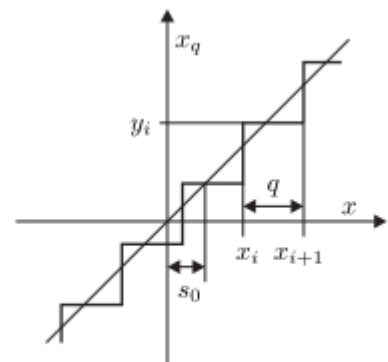
Smith könyv idevágó részei, bevezető

<http://www.dspguide.com/ch3/1.htm>

Tanszéki anyag, level 2

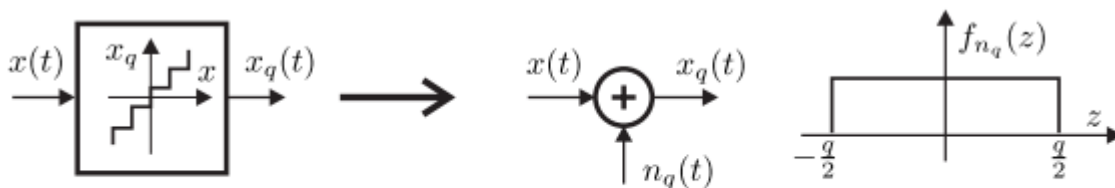
A kvantálásnál – annak ellenére, hogy finom felbontású kvantálásnál a kvantált jel erősen emlékeztet az eredeti jelre – nem lehet biztosítani a kvantálatlan jel hibátlan helyreállítását. Ennek egyik legfőbb oka az, hogy a kvantálás nemlineáris művelet még akkor is, ha az A/D konverzióknak leginkább megfelelő modellt, az ún. egyenletes kvantálót vizsgáljuk (3.1. ábra).

Tehát a mintavételezéssel ellentétben itt nem az a célunk, hogy valamilyen, a mintavételezéshez hasonló feltételt adjunk az egyértelmű visszaállíthatóságra. Mit tudunk tehát garantálni? A válasz az, hogy **az eredeti jel momentumai** (hatványainak várható értéke) **közt néhányat őrizzünk meg a kvantált jelben** (természetesen például digitális jeleknél, ahol csak két amplitúdószint van, teljes visszaállíthatóságot jelentene!). Például **egy jel átlagértékének (DC szintjének) mérésekor csak az első rendű momentum pontos átvitelére van szükség**, így akár egybites kvantálót is alkalmazhatunk. Formálisan a mintavételezés és a kvantálás lényegében ugyanaz a matematikai művelet.



3.1. ábra. Az egyenletes kvantáló

Kvantálási hiba: a kvantált jel és az eredeti jel különbsége. (1) Eloszlása közelítőleg egyenletes, és annál jobb a közelítés, minél kisebb q értéke a jel maximális amplitúdójához képest. (2) Ha a két jel keresztkorreláció függvényét képezzük, az várhatóan kicsi lesz, és a kvantumnagyság csökkentésével egyre kisebb. (3) Határfrekvenciája jóval nagyobb, mint az eredeti jelé, és a határfrekvencia q csökkentésével egyre nő. A kvantálási hiba statisztikailag modellezhető egy $\pm q/2$ egyenletes eloszlású additív zajjal.



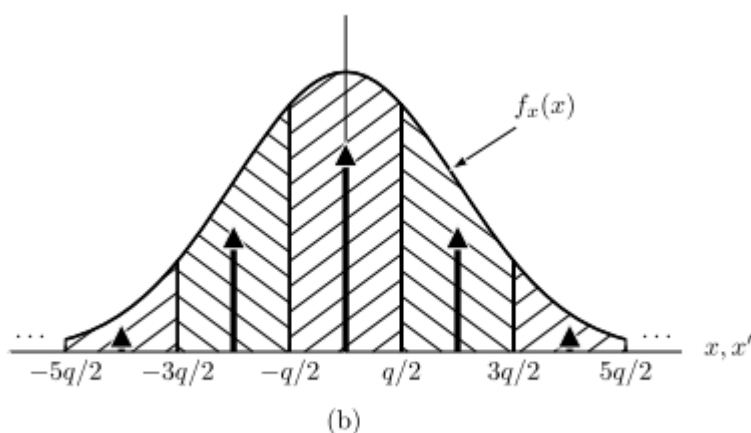
3.3. ábra. A kvantálás zajmodellje

Egyenletes eloszlású; az eredeti jellel korrelálatlan (esetleg független az eredeti jeltől); fehér spektrumú.

A kvantált jel sűrűségfüggvényét megkapjuk az eredeti jel sűrűségfüggvényének szűrésével és mintavételezésével. Jelölje az eredeti jelet x , a valószínűség-sűrűségfüggvényét $f_x(x)$. Tudjuk, hogy egy valószínűségi változó karakterisztikus függvénye a valószínűség-sűrűségfüggvényének inverz Fourier-transzformáltja. Legyen a kvantált jel x' és valószínűség-sűrűségfüggvénye $f_{x'}(x')$. Ez utóbbi olyan Dirac-impulzus-sorozat, amelynek elemei az amplitúdó-tengelyen a megfelelő kvantálási szinteknek felelnek meg.

$$\Phi_x(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x) e^{jux} dx.$$

A 3.4. ábrán láthatjuk a kvantálás hatását a valószínűség-sűrűségfüggvényre. Megfigyelhető, hogy a kvantálási lépcsőknek megfelelő területtel „arányos” Dirac-impulzusokat kapunk. Emlékeztetünk arra, hogy a Dirac-impulzusnak nincs függvényértéke, csak azt tudjuk, hogy az adott tartományban az integrálja véges. Ebben az esetben ez azt jelenti, hogy az eredeti jel valószínűség-sűrűségfüggvényének megfelelő területével egyezik meg az adott Dirac-impulzus integrálja. Például a 0 értéknél elhelyezkedő Dirac-impulzusra igaz, hogy:

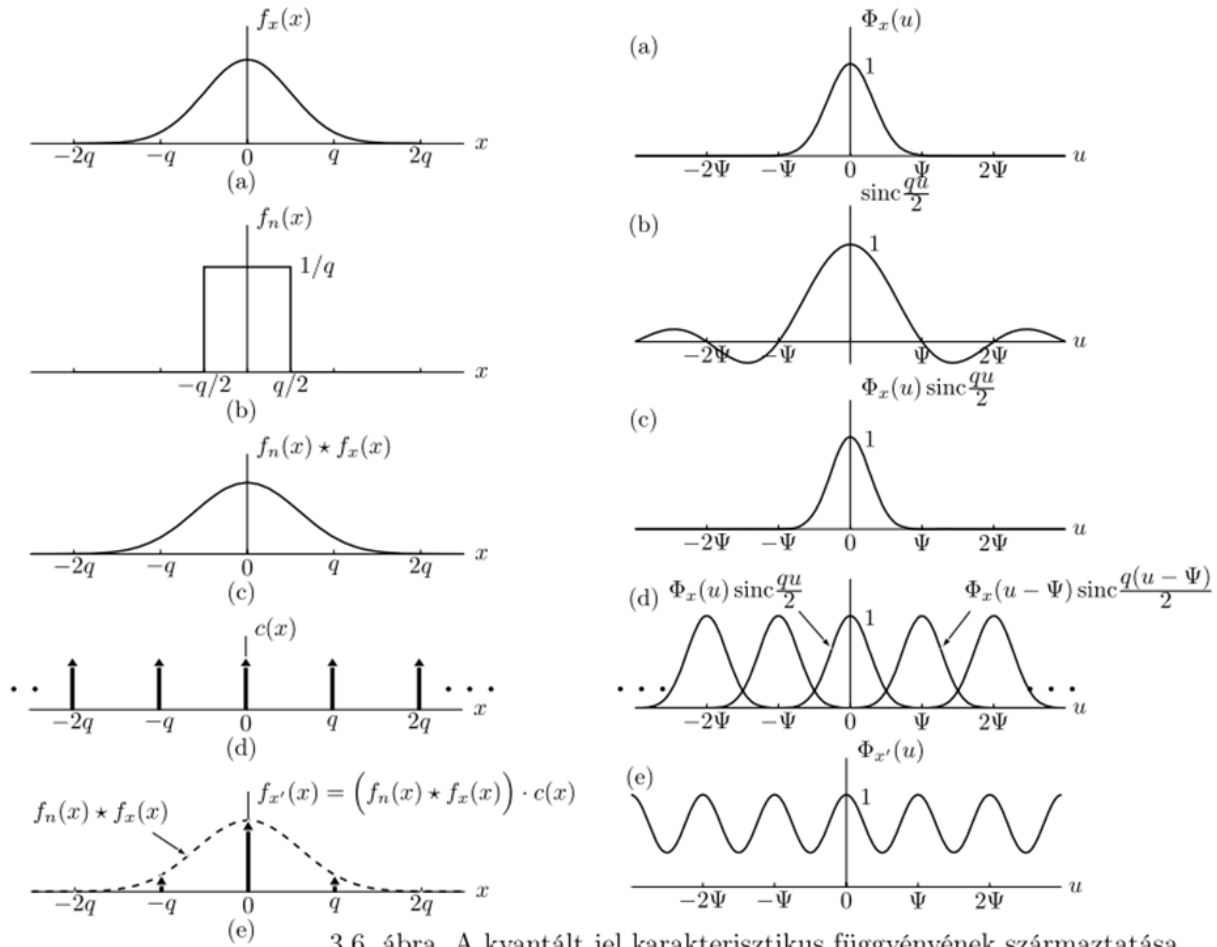


3.4. ábra. Az eredeti és a kvantált jel sűrűségfüggvénye

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_0 \delta(x) dx = \int_{-q/2}^{q/2} f_x(x) dx.$$

A különböző kvantálási szintekhez ($\dots, -3q/2$ -től $-q/2$ -ig, $-q/2$ -től $q/2$ -ig, $q/2$ -től $3q/2$ -ig, $\dots$) tartozó sűrűségfüggvény tehát „összehúzódik” egy megfelelő Dirac-impulzus-sorozattá. Ez a művelet egy fontos lépésben eltér az időtartománybeli mintavételezéstől. Két lényeges lépésre bontható, mégpedig: (1) konvolúció egy négyszög alakú impulzussal, (2) mintavételezés (a „szokásos” módon).

A kvantált jel valószínűség-sűrűség-függvényének származtatása: (a) az eredeti jel valószínűség-sűrűségfüggvénye, (b) a négyszög alakú pulzus, (c) a négyszög alakú pulzus és az eredeti jel valószínűség-sűrűség-függvényének konvolúciója, (d) a mintavételezés, azaz a moduláló Dirac-impulzus-sorozat, (e) a kvantált jel valószínűség-sűrűségfüggvénye.



3.6. ábra. A kvantált jel karakterisztikus függvényének származtatása

Első kvantálási tétel: Ha az x jel karakterisztikus függvénye „sávkorlátozott”, azaz:

$$\Phi_x(u) = 0, \text{ ha } |u| > \frac{\pi}{q} = \frac{\Psi}{2}, \text{ akkor:}$$

a $\Phi_{x'}$ -ben található ismétlődések nem lapolódnak át, az x karakterisztikus függvénye visszaállítható $\Phi_{x'}(u)$ -ből, az x valószínűség-sűrűségfüggvénye visszaállítható $f_{x'}(u)$ -ből.

Az első kvantálási tétel kimondja tehát, hogy ha a q kvantumnagyság elég kicsi, akkor a kvantált jelből egyértelműen helyreállítható az eredeti jel.

Második kvantálási tétel: Ha az x jel karakterisztikus függvénye „sávkorlátozott”, azaz:

$$\Phi_x(u) = 0, \text{ ha } |u| > \frac{2\pi}{q} - \varepsilon = \Psi - \varepsilon, \text{ ahol } \varepsilon \text{ tetszőlegesen kicsi pozitív szám, akkor } x \text{ momentumai visszaállíthatók a kvantált jel momentumaiból.}$$

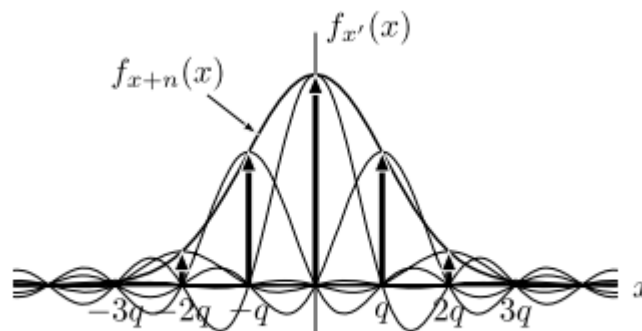
Mit mondanak a kvantálási tételek? Ahogy a fejezet elején megjegyeztük, általában nem tudjuk garantálni az eredeti jel visszaállíthatóságát. Ez azt jelenti, hogy általában a jel valószínűségi sűrűségfüggvénye nem korlátos tartójú és így nem teljesülnek az I. kvantálási tétel feltételei. Furcsa módon ugyanakkor a feltétel nem teljesülése nem zárja ki a helyreállíthatóságot, csak nem garantálja minden jelre. Például egy egyszerű négyszögjelet már egy egybites kvantálóval is helyreállíthatunk, abban speciális esetben, ha a kvantálás a szinteket éppen változatlanul hagyja.

A II. kvantálási tétel nem a sűrűségfüggvény helyreállítására vonatkozik. Mint arra a legelején utaltunk, bizonyos feltételek teljesülése esetén – precízen a II. kvantálási tétel feltételeiről van szó – a jel megfelelő momentumai megmaradnak a kvantálás után is. A tétel éppen ezt az állítást fogalmazza meg egzakt formában.

A kvantált jel visszaállítása

Amennyiben a q kvantálási lépcső annyira kicsi, hogy az I. kvantálási tétel feltételeit teljesítjük, akkor az eredeti x valószínűség-sűrűségfüggvényét visszaállíthatjuk a kvantált x' jel valószínűség-sűrűségfüggvényéből. Ez nagyon fontos akkor, ha csak a kvantált adatok állnak a rendelkezésünkre, és ezekből kell az eredeti jel bizonyos statisztikai tulajdonságait meghatározni.

Az $f_{x'}(x)$ -ből tehát a $f_{x+n}(x)$ meghatározása a célunk. Ezt hasonlóan az időtartománybeli mintavételezéshez megtehetjük sinc-es interpolációval, ahogyan a 3.9 ábrán látható. Ezek után az eredeti x jel valószínűség-sűrűségfüggvénye megkapható, ha az $f_{x+n}(x)$ -et dekonvolváljuk $f_n(x)$ -szel.



3.9. ábra. Az interpoláció illusztrációja

Sheppard-korrektciók, a momentumok torzítása

A II. kvantálási tétel alapján a jel karakterisztikus függvényére az $u = 0$ környékén a következő összefüggés teljesül:

$$\Phi_{x'}(u) = \Phi_x(u) \operatorname{sinc} \frac{qu}{2}$$

azaz a kvantált jel karakterisztikus függvénye itt pontosan olyan alakú, mintha az eredeti jelhez egy független, egyenletes eloszlású zajt adtunk volna, hiszen független valószínűségi változók összegzésekor a sűrűségfüggvények konvolúcióját kell képeznünk, és így a karakterisztikus függvények szorzódnak. Eszerint a zajmodell első két tulajdonsága teljesül, és a momentumok közötti összefüggéseket a zajmodellből meghatározhatjuk ($x_q = x + n_q$). Ezek az ún. Sheppard-korrekciók.

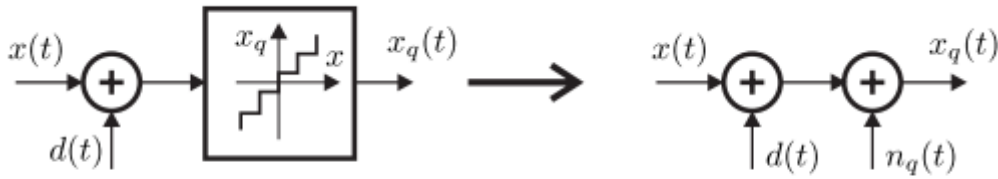
$$\begin{aligned}\mathcal{E}\{x\} &= \mathcal{E}\{x_q\} \\ \mathcal{E}\{x^2\} &= \mathcal{E}\{x_q^2\} - \frac{q^2}{12} \\ \mathcal{E}\{x^3\} &= \mathcal{E}\{x_q^3\} - 3\mathcal{E}\{x_q\}\frac{q^2}{12} \\ &\dots\end{aligned}$$

Figyeljük meg, hogy az első momentum torzítatlan méréséhez elegendő az alábbi feltétel teljesülése:

$$\Phi_x\left(\frac{2\pi k}{q}\right) = 0, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Dither

A bemenő jelhez kvantálás előtt tőle statisztikailag független zajt, ún. dithert adunk:



3.10. ábra. Dither alkalmazása

A kevert jel karakterisztikus függvénye a függetlenség miatt:

$$\Phi_{x+d}(u) = \Phi_x(u)\Phi_d(u)$$

Ha a dither teljesíti a feltételt, akkor az összeg is teljesíteni fogja, hiszen a két karakterisztikus függvény szorzódik, és $\Phi_{x+d}(u)$ a megfelelő helyen nulla lesz, $\Phi_x(u)$ értékétől függetlenül. A jelhez hozzáadott ditherrel tehát biztosítani lehet a Sheppard-korrekciók érvényességét. Ügyeljünk azonban arra, hogy a Sheppard-korrekciók ilyenkor nem az x jel momentumaira, hanem az $x+d$ jel momentumaira érvényesek, ezért x momentumainak meghatározásához d momentumait is figyelembe kell venni!

$$\text{var}\{x\} = \text{var}\{x_q\} - \frac{q^2}{12} - \text{var}\{d\}$$

Ugyanakkor a dither hozzákeverése miatt általában a mérések varianciája is nő. Így például a várható érték becslése esetén, ha közelítőleg teljesítjük a kvantálási tétel feltételét, a variancia a következő:

$$\text{var}\{x_q\} = \text{var}\{x + d + n_q\} \approx \text{var}\{x\} + \frac{q^2}{12} + \text{var}\{d\}$$

Az esetleg nagy amplitúdójú dither erősen megnövelheti a varianciát, ezért gyakran speciális technikával „szabadulnak meg” tőle, például kvantálás után a dither értékével korrigálnak (ha ez rendelkezésre áll), vagy kiszűrik, ha lehet.

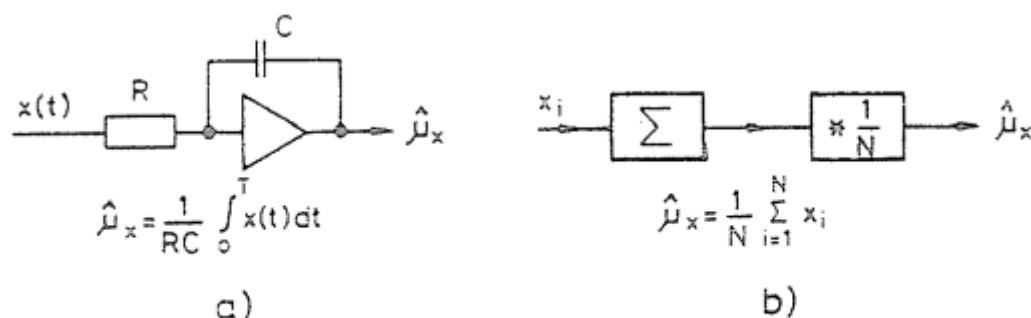
Az audio-technikában a háromszög-eloszlású dither az elterjedt (két, kvantumnagyság szélességű egyenletes eloszlású dither konvolúciója). Bebizonyítható, hogy ekkor a várható érték torzítatlan, és a variancia is jelfüggetlen, ami azért fontos, mert különben lüktető zaj jelenhet meg (pl. négyszög-dithernél ténylegesen meg is jelenhet), ami csendesebb részeknél nagyon zavaró.

Az átlagolás

Az egyszerű átlagolás

Analóg módszerrel az egyszerű átlagolás az integrálást jelenti:

$$\hat{\mu}_z = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} z(k), \quad \hat{\mu}_z = \frac{1}{T} \int_0^T z(t) dt.$$



24.6. ábra. Az egyszerű átlagolás
a analóg; b diszkrét átlagolás

Az egyszerű (ideális) átlagolás nem más, mint a várható érték becslője annak feltételezésével, hogy a mintasorozat ergodikus.

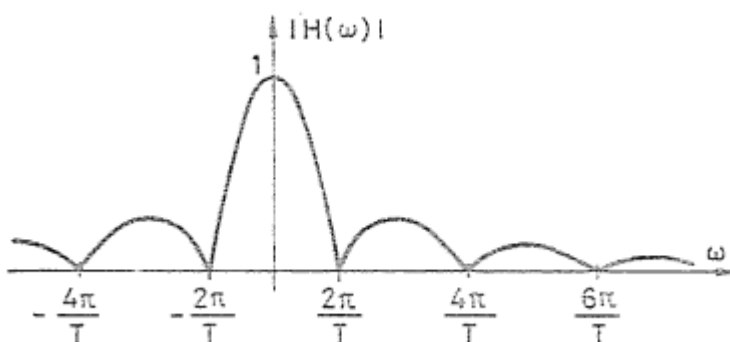
Egyrészt, időben előrehaladva egyre több mintát veszünk figyelembe mind kisebb, (de minden mintára azonos) súllyal. Azt is mondhatjuk, hogy egyre inkább megbízunk az egyre kevésbé bizonytalan becslőnkben, és ezért egyre kevésbé hagyatkozunk egy újabb zajos megfigyelésre.

Másrészt, a régi és az új megfigyelések egyforma súlyúak, vagyis az átlagérték csak abban az esetben alkalmazható eredményesen, ha a becslendő jellemző valóban konstans. Egyébként a kiszámított átlagérték a zaj kiküszöbölése helyett a becslendő paraméter megváltozását fogja elfedni. Tehát az ideális átlagolás egyáltalán nem képes a becslendő paraméter megváltozását követni. Erre megoldás a mozgó ablakos átlagolás.

Mozgó ablakos átlagolást akkor célszerű alkalmazni, ha a középérték időben változik. Ezáltal a megfigyelési intervallum leszűkül, a mintáknak csak egy részét vesszük figyelembe. Az **exponenciális átlagolás** nem szűkíti le a megfigyelési intervallumot, azonban a régi megfigyeléseket egyre csökkenő súllyal veszi figyelembe.

Mozgóablakos átlagolás frekvenciátvittele a sinc függvény. A frekvenciaátviteli karakterisztikából a mozgó átlagolás két további érdekes tulajdonsága fedhető fel.

1. Ha az átlagolási idő, vagy az átlagolásszám növekszik, az átlagoló egyre jobban elnyomja a nem nulla frekvenciás komponenseket, azaz mintegy kiszűri az időinvariáns átlagértéket.

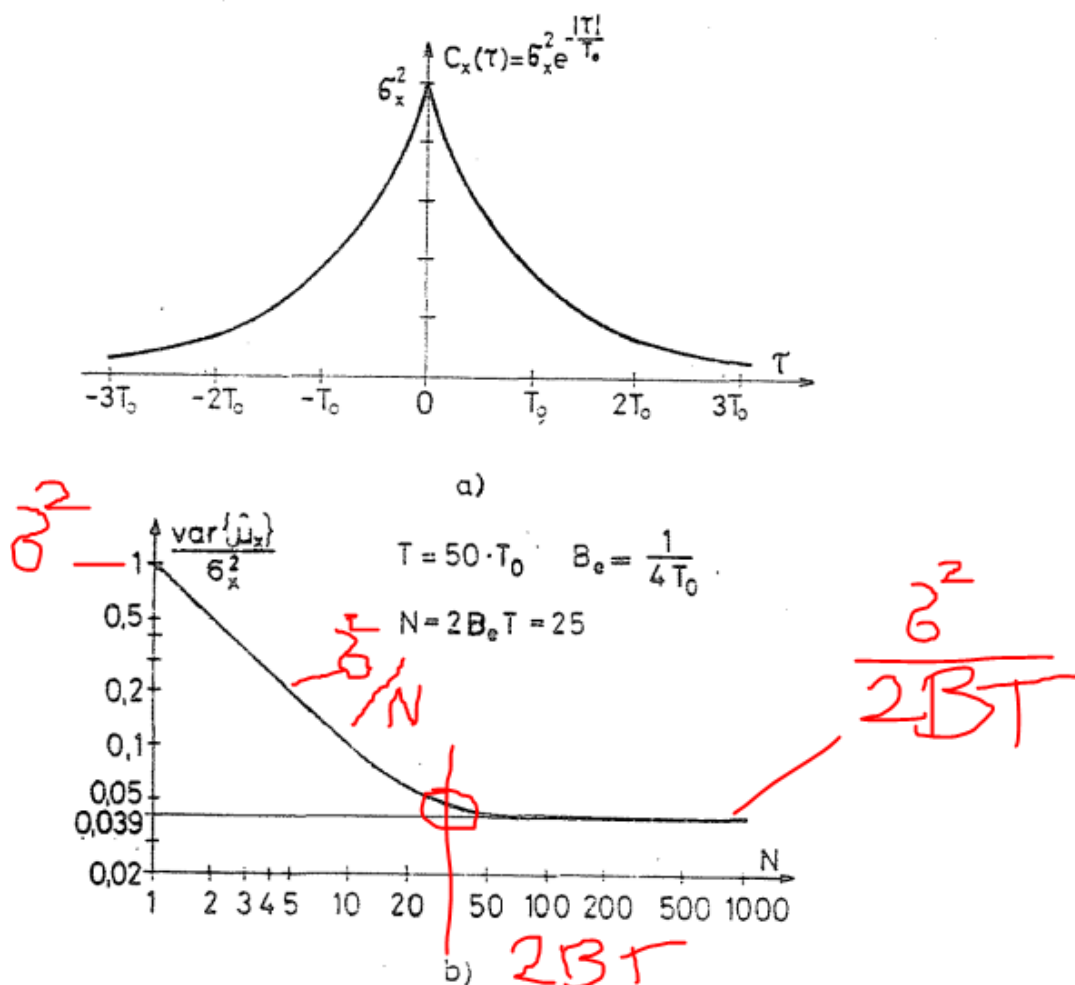


2. Az átlagoló elnyomja az $\omega=(2\pi k)/T$ (folytonos esetben) és $\omega=(2\pi k)/(TN)$ (diszkrét esetben) frekvenciákat. Ez a tulajdonság eredményesen alkalmazható periodikus zavarjelek elnyomására, amennyiben biztosítjuk az átlagolási idő és a periodikus idő kapcsolatát.

Az ideális átlagolás torzítása: megállapíthatjuk tehát, hogy ha a középérték időben állandó az ideális átlagolással végzett középértékbecslés feltételelesen, és így feltétel nélkül is torzítatlan.

Az egyszerű átlagolás tulajdonságai

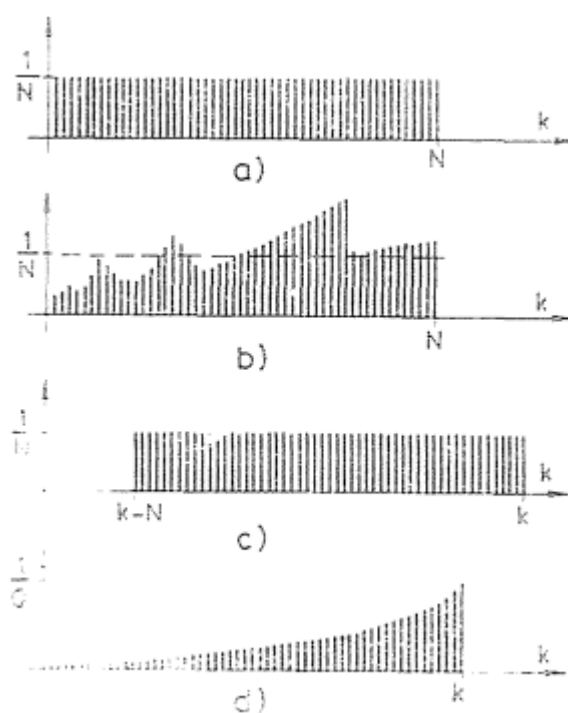
A becslés torzítatlan	$E\{\hat{\mu}_x\} = \frac{1}{T} \int_0^T E\{x(t)\} dt = \mu_x.$
Varianciája	$\text{var}\{\hat{\mu}_x\} = \frac{1}{T} \int_{-T}^T \left(1 - \frac{ \tau }{T}\right) C_x(\tau) d\tau.$


 24.7. ábra. A középértékmérés varianciája N függvényében sávkorlátozott fehér zaj esetén

Ekvivalens sávszélesség: annak a sávkorlátozott fehérzajnak a sávszélessége, amelynek ugyanakkora a varianciája, mint a bemenő jelnek, és azonos hosszúságú átlagolással ugyanannyira csökken az átlagérték varianciája.

$$B_e = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} S_c(f) df}{2S_c(0)}$$

A diszkrét esetben tehát alkalmas mintavételi szám esetén tetszőlegesen megközelíthető a folytonos módszer varianciája, ami a szemlélet alapján nem is meglepő. Az $N = 2B_e T = 25$ érték éppen az adatszám, amivel a közelítő mintavételi tétel értelmében a folytonos jel visszaálítható, ennél több adat már nem ad több információt. A varianciák egyenlőségére kapott $N \geq 2B_e T$ feltétel jelentése tehát



heurisztikusan megmagyarázható: a maximális információt ilyenkor szolgáltatja a mintavételezett adatsorozat.

Közelítő rekurzív átlagolás

A megoldás előnye, hogy a szokásos aritmetikáknál a 2 egész hatványával való osztás egyszerű léptetéssel megvalósítható és így módon az átlagolás sebessége már nem az átlagképzés időigényességétől, hanem inkább az adatszerzés (A/D átalakítás) sebességétől függ. A megoldás hátránya, hogy az iménti közelítő algoritmus növeli a becslés varianciáját, ami az $M(k)$ függvény módosításával azonban javítható.

$$\hat{\mu}_z(k) = \hat{\mu}_z(k-1) + \frac{1}{2^{M(k)}} [z(k-1) - \hat{\mu}_z(k-1)],$$

$$\hat{\mu}_z(0) = 0 \quad k = 1, 2, \dots$$

ahol az $M(k)$ egész értékű függvény kielégíti a

$$2^{M(k)} \leq k < 2^{M(k)+1}$$

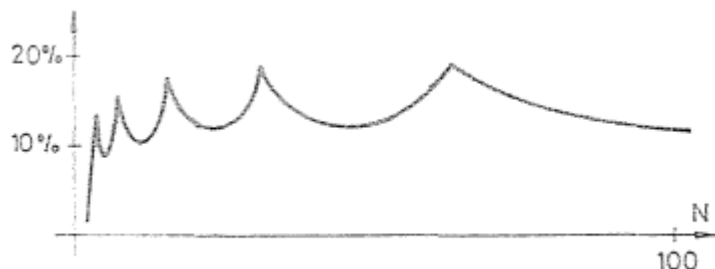
egyenlőtlenséget.

Független mintavételi értékeket feltételezve és elhanyagolva a véges szóhosszúság miatti problémákat, kedvezőbb eredményre jutunk, ha az algoritmus az alábbi összefüggés szerinti:

$$1,5 \cdot 2^{M(k)-1} < k \leq 1,5 \cdot 2^{M(k)} \quad k = 1, 2, \dots$$

A közelítő rekurzív átlagolás mind feltételes, mind feltétel nélkül torzítatlan.

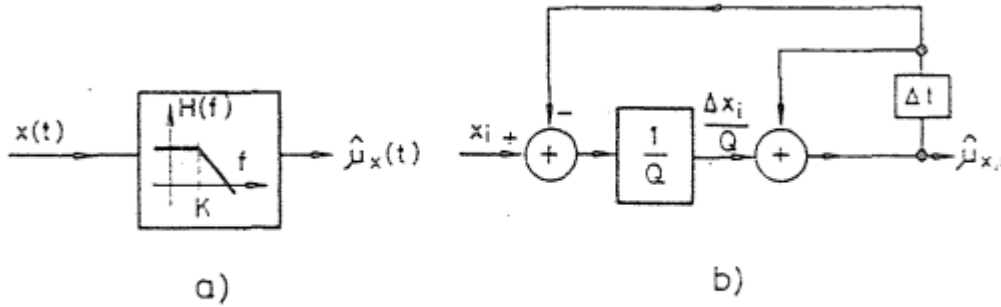
Az 5.8. ábrán feltüntetett relatív variancianövekedés pedig nem több mint 20%, ami a közelítő rekurzív átlagolás könnyű megvalósíthatósága mellett, elenyésző hátrány.



5.8. ábra. A közelítő rekurzív átlagolás relatív variancianövekménye

Az exponenciális vagy felejtő átlagolás

Az egyszerű átlagolást gyakran helyettesítjük a szintén rekurzív jellegű felejtő (exponenciális) átlagolással.



24.18. ábra. A felejtő átlagolás
a analóg; b diszkrét átlagolás

Analóg esetben ez a 24.18a ábrán látható elrendezést jelenti. Tegyük fel, hogy a $t=0$ pillanatban kapcsoljuk rá a szűrőre az $x(t)$ jelet. A szűrő átviteli, ill. súlyfüggvénye:

$$H(f) = \frac{1}{1 + j2\pi fK}, \quad h(t) = \frac{1}{K} e^{-\frac{t}{K}}. \quad (24.11)$$

Az 5.1.4. pontban levezettük a torzítás képletét (5.46):

$$\hat{\mu}(T_r) = \mu_x \left(1 - e^{-\frac{T_r}{K}}\right). \quad (24.12)$$

A középértékbecslés tehát torzított, és a torzítás az idővel exponenciálisan csökken.

A variancia az 5.1.5. pont alapján (ld. (5.73) kifejezés)

$$\text{var} \{\hat{\mu}_x\} = \int_{-T_r}^{T_r} e^{-\frac{|t|}{K}} \frac{1 - e^{-2\frac{T_r - |t|}{K}}}{2K} C_x(\tau) d\tau. \quad (24.13)$$

Az állandósult esetre innen $T_r \rightarrow \infty$ átmenettel kaphatunk összefüggést, de egyszerűbben is célhoz érhetünk:

$$\text{var} \{\hat{\mu}(T_r)\}_{|T_r \gg K} \cong C_{\hat{\mu}}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\hat{\mu}}(f) df = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{1 + j2\pi fK} \right|^2 S_{xc}(f) df,$$

ahol $S_{xc}(f)$ a kovarianciafüggvényből számított teljesítménysűrűség-függvény.

Sávkorlátozott fehér zaj esetén:

$$\int_{-B}^B \frac{1}{1 + (2\pi fK)^2} \frac{\sigma_x^2}{2B} df = \frac{\sigma_x^2}{2\pi BK} \arctg(2\pi BK);$$

$BK > 1$ esetén:

$$\text{var} \{\hat{\mu}(T_r)\}_{|T_r \gg K} \cong \frac{\sigma_x^2}{4BK}. \quad (24.14)$$

Így $T_r \gg K$ esetén az aluláteresztő szűrő időállandója határozza meg a varianciát, és ez nem függ a T_r időtől. Az aluláteresztő szűrő alkalmazása tehát $T_r \gg K$ esetén a variancia

szempontjából $T_e = 2K$ idejű integrálással egyenértékű, a mintaregisztrátum hosszát viszont általában jóval nagyobbra kell választani a torzítás csökkentése érdekében.

Az exponenciális átlagolás lényeges előnye, hogy a felejtő tulajdonság által követni képes a becslendő paraméter lassú változásait. A becslendő paraméter változékonysága miatt kézenfekvő, hogy az időben hozzánk közelebbi minták pontosabb információt hordoznak a keresett paraméterről. A nagyobb súlyok azt tükrözik, hogy ezeknek a közeli mintáknak nagyobb jelentőséget tulajdonítunk.

A folytonos exponenciális átlagoló frekvenciaátviteli függvénye alapján könnyen megállapítható, hogy ez egy elsőfokú aluláteresztő szűrő, amely egyszerű módon megvalósítható.

$$H(s) = \mathcal{L}\{w(t)\} = \frac{1}{1 + sK}$$

Megjegyzés: ha a szomszédos minták különbségét képezzük, akkor felüláteresztő karakterisztikát kapunk.

Fehérzaj: Olyan sztochasztikus folyamat, melynek spektruma minden frekvencián konstans. Varianciája elvben végtelen. Modell valós rendszerek esetén átvitelhez, az átviteli tartományban konstans (a rendszer sávszélessége) spektrumú zaj tekinthető fehér zajnak.

Sávkorlátozott fehér zaj: Olyan sztochasztikus folyamat, melynek $[-B, B]$ között a teljesítménysűrűség függvénye konstans, máshol nulla:

$$S(f) = \begin{cases} c & \text{ha } |f| \leq B \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

Mintavételi tételek

1. **A precíz frekvenciatartománybeli mintavételi tétel:** Ha egy jel időkorlátozott egy T intervallumon, akkor a Fourier transzformáltját $\Delta f \leq 1/T$ távolságokban mintavételezve nem veszítünk információt.
2. **A precíz időtartománybeli mintavételi tétel:** Ha egy jel sávkorlátozott, azaz igaz a Fourier transzformáltjára, hogy $X(f) = 0$, ha $|f| \geq B$, akkor $f_m \geq 2B$ frekvenciával mintavételezve nem veszítünk információt.
3. **Sztochasztikus folyamatokra a mintavételi tétel:** Ha egy sztochasztikus folyamat sávkorlátozott, azaz teljesítménysűrűség függvényére igaz, hogy $S(f) = 0$, ha $|f| \geq B$, akkor $f_m \geq 2B$ frekvenciával mintavételezve nem veszítünk információt.
4. **Közelítő mintavételi tétel:** Ha egy jel egyszerre sáv és időkorlátozott, akkor $N = 2BT$ megfelelően vett mintával leírható, vagyis ezekből a közbenső értékek kiszámíthatóak.

DFT

A Diszkrét Fourier Transzformáció

bevezető Smith könyv:

<http://www.dspguide.com/ch8/1.htm>

Mivel csak periodikus és mintavett jeleket tudunk foglalkozni, ezért gyakorlatban csak a DFT-t használjuk:

$$DFT: X_k = \sum_{i=0}^{N-1} x_i e^{-j2\pi \frac{ki}{N} \Delta t}$$
$$IDFT: x_i = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{j2\pi \frac{ki}{N} \Delta f}$$

Ez a Fourier integrált közelíti:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

Úgy hagyom el $\Delta t / \Delta f$ -et, hogy egységnyinek tekintjük. Inverzei-e egymásnak.

Vegyünk egy koherensen mintavételezett koszinusz jelet:

$$A \cos(2\pi f_1 t) = \frac{1}{2} A (e^{j2\pi f_1 t} + e^{-j2\pi f_1 t})$$

Hova tegyük az $1/N$ -et? Mindegy.

Van-e értelme a DFT-be rakni? Igen, ha van egy szinusznak, akkor a Fourier transzformált úgy közelíti a hozzátartozó spektrumvonalat, hogy egyre magasabb lesz. Ha osztunk, akkor a Fourier együthatót fogjuk közelíteni, nem a Dirac impulzust.

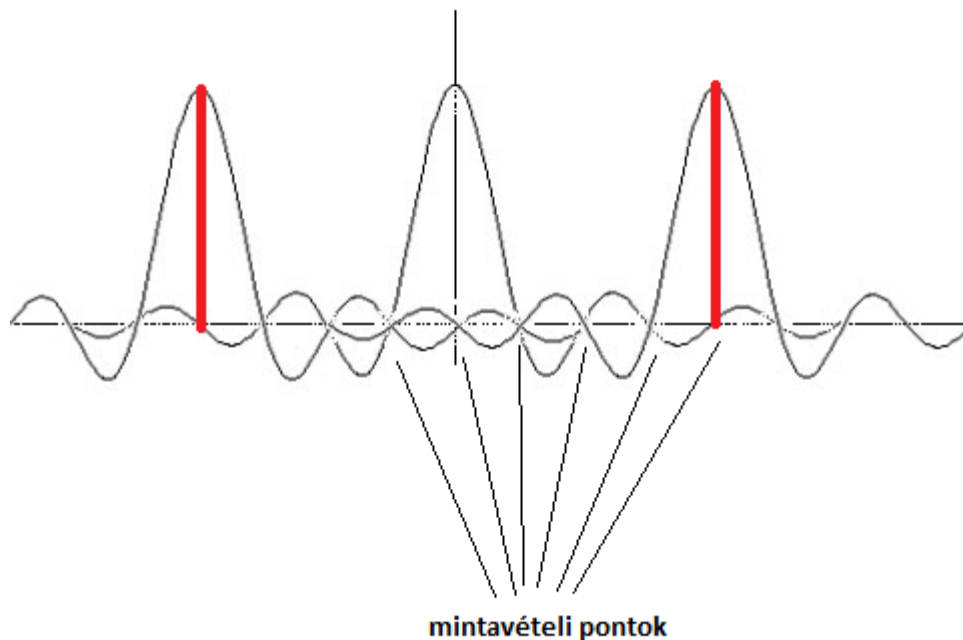
Szétosztva van értelme? Megtehetem.

Mennyire ekvivalens ha a mintavételezés által a folytonosból átmegyünk diszkrétbe? Mekkora hibát követek el? Mintavételi tétel $\rightarrow$ ha betartjuk, akkor nem veszünk információt. Ha koherens a mintavétel, akkor a Fourier transzformált megegyezik a folytonos idejűvel, azonos helyen és megegyező alakú lesz a Dirac.

A mintavétel egy négyszög ablakkal való szorzás, kivágunk belőle egész számú periodust. Ha kivágjuk belőle a szinuszt, akkor az egy szorzás az ablakkal, frekvenciatartományban pedig konvolúció lesz. A szinusz

frekvenciaspektruma két Dirac, a négyszögablaké pedig sinc. Mivel egész számú periodust veszünk, ezért a mintavételi pontokban pont a nulla

helyek fognak szerepelni. Egyrészt a nulla helyek egymásra esnek, másrészt, pont azokban a pontokban veszem a mintákat, ezért lesz vonalas a spektrum. T hosszú ablakot feltételezve, a sinc nulla helyei $1/T$ távolságokra vannak egymástól. $T = N\Delta t$. Ha N páros 2 valós, a többi komplex konjugált, ha páratlan, akkor egy valós.



A frekvenciatartományban mi történik, ha az időtartományban mintavételeztem? Ismétlődni fog a spektrum. Tehát nem érdemes $0-0,5(1)$ -on kívül számolni a DFT-t.

Nem koherens eset

A szinusz periodus idejének egészszámú többszöröse legyen a megfigyelés idő koherens esetben:

$$\frac{1}{f_1} \cdot \text{egész} = T = N \cdot \Delta t = \frac{N}{f_m}$$

Ha ezt nem tartom be, akkor a Dirac impulzusok szétszúsznak.

Fast Fourier Transform

Számos eljárás ismert az FFT kiszámítására, a leggyakrabban a Cooley-Tukey FFT algoritmust használják, ezért ennek ismertetésére szorítkozunk.

Az eljárás az „oszd meg és uralkodj” elvre épül, amely rekurzívan lebontja a DFT-t kisebb részekre, amelyeket gyorsabb kiszámolni. A mintaregisztrátum hosszának kettő egészszámú hatványának kell lennie. Az FFT az N hosszúságú időtartománybeli jelet N egyenként egy pontot tartalmazó jellé bontja szét, minden lépésben $N/2$ osztással. Ezután ezeknek a pontoknak a spektrumát határozzuk meg, majd az N spektrumot egyetlen frekvencia spektrummá szintetizáljuk.

A dekompozíció átfedéssel, vagyis páros és páratlan mintákra való szétbontás.

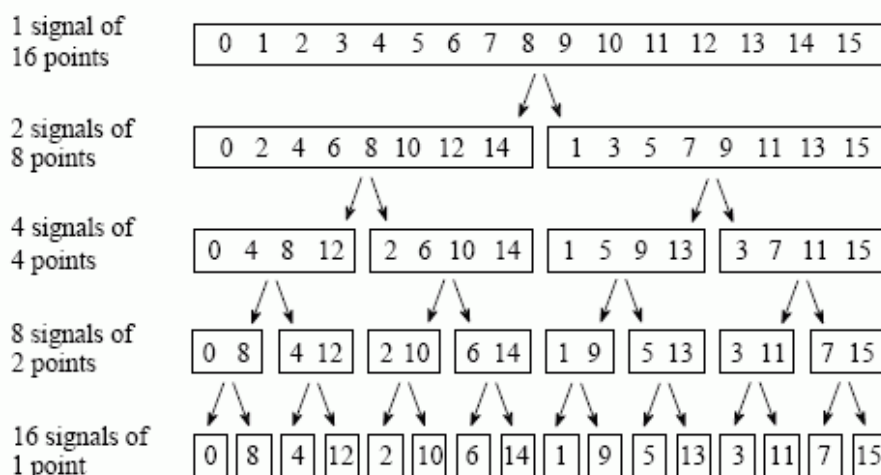


FIGURE 12-2

The FFT decomposition. An N point signal is decomposed into N signals each containing a single point. Each stage uses an *interlace decomposition*, separating the even and odd numbered samples.

A szétbontáshoz $\log_2 N$ szintre van szükség a teljes szétbontáshoz. A dekompozíció nem más mint a minták átszervezése, még hozzá úgy, hogy a bináris megfelelőjük tükörképével cserélnek helyet. pl.: a nyolcas indexű (1000) az egyes index (0001) helyére került. A következő lépés, hogy megkeressük az egyponthoz tartozó minták a frekvenciatartománybeli megfelelőjét. Mi sem egyszerűbb, ez önmagával megegyezik, viszont mostmár frekvenciatartománybeli mintákról beszélünk.

Az utolsó lépés ezeknek a mintáknak a kombinálása. Itt minden lépésben párosával össze kell kombinálni a jelszegmenseket, vagyis először az egy hosszúságúakat kettő hosszúságúakká, majd ezeket négy hosszúságúakká stb.

DFT vs FFT

Smith könyv:

működés:

<http://www.dspguide.com/ch12/2.htm>

összehasonlítás:

<http://www.dspguide.com/ch12/4.htm>

Gibbs hatás

<http://www.dspguide.com/ch11/4.htm>

fft(fft(x)) eredményének értelmezése (Schnell példatárban megtalálható)

Legyen a transzformálandó jel $x(u)$, Fourier transzformáltja $y(v)$, ennek pedig legyen $z(p)$ a Fourier transzformáltja:

$$y(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) e^{-j2\pi uv} du$$

$$z(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(v) e^{-j2\pi pv} dv$$

Legyen $p = -u$

$$z(-u) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(v) e^{j2\pi uv} dv = x(u)$$

Ha egy jelet kétszer egymás után Fourier transzformálunk, akkor az időtengely megfordul.

Bizonyítsa be, hogy $x = \text{IDFT}\{\text{DFT}(x)\}$

$$\text{DFT: } X_k = \sum_{i=0}^{N-1} x_i e^{-j2\pi \frac{ki}{N}} \quad \text{IDFT: } x_i = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{j2\pi \frac{ki}{N}}$$

$$x_{i_2} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{i=0}^{N-1} x_i e^{-j2\pi \frac{ki}{N}} \right) e^{j2\pi \frac{ki_2}{N}} = \sum_{i=0}^{N-1} x_i \underbrace{\left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j2\pi \frac{k(i-i_2)}{N}} \right)}_{\delta(i-i_2) = \begin{cases} 1, & i=i_2 \\ 0, & i \neq i_2 \end{cases}} = x_{i_2}$$

Színusz Fourier transzformálta, a DFT értelmezése

Írjuk fel a színusz Fourier-transzformáltját:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} A \sin(2\pi f_1 t + \varphi) e^{-j2\pi f t} dt$$

Ezzel az a baj, hogy négyzetesen abszolút integrálhatónak kellene lennie, viszont a kifejezés nem abszolút integrálható.

Ezért induljunk ki abból, hogy mi lenne, ha 2 Dirac-deltának ($-f_1$ és f_1 frekvencián) vennénk az inverz Fourier-transzformáltját:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft} df = \frac{A}{2}e^{-j2\pi f_1 t} + \frac{A}{2}e^{j2\pi f_1 t} = A\cos(2\pi f_1 t)$$

Tehát a szinusz Fourier-transzformáltjában 2 $\delta(t)$ van. Ezt el kell fogadni, mert ekkor vág egybe minden és lesz kerek a világ.

Koherens mintavételezésnél a szinusz egész számú periódusa esik az ablakba, a szinusz frekvenciájának megfelelő komponens DFT pontra esik. Ennek feltétele, hogy az alábbi egyenlet megoldható legyen úgy, hogy M egész számra jöjjön ki: $M = N \frac{f_1}{f_m}$. Nem koherens mintavételnél nem egész számú a periódus, a frekvencia nem esik DFT pontra.

Koherens mintavételezés esetén a szinusz jel Fourier transzformáltja maximum három vonalat tartalmaz: a DC összetevő a nulla frekvencián jelenik meg, valamint a szinusz pozitív és negatív frekvenciáján. A DC összetevő amplitúdója megegyezik a tényleges eltolás értékkel, a $\pm f_1$ frekvenciákon pedig a szinusz amplitúdójának fele fog megjelenni, ugyanis a két frekvencia közt egyenlő arányban megoszlik a szinusz amplitúdója. A pozitív frekvencián egy pozitív irányú spektrum vonal jelenik meg, a negatív frekvencián egy negatív irányú túske (koszinusz esetében mindkét vonal pozitív).

Ha nem koherens a mintavételezés akkor két jelenséget figyelembe kell vennünk: szivárgás és léckerítés effektus.

A 7.9 ábra egy szinuszos jel amplitúdó spektrumát, alatta pedig az egyes sávszűrők karakterisztikáját mutatja $N=8$ esetén, a normált frekvencia függvényében. A legalsó tengely mentén az egyes sávszűrők kimenetén megjelenő jel teljesítményét tüntettük fel, mindegyik értéket a szűrő sávközepének megfelelő frekvencia fölött. Ez a jel teljesítmény-spektrumának becslője, melyen nyilvánvaló a szivárgás hatása; (szaggatott vonallal az eredeti teljesítményspektrumot is feltüntettük).

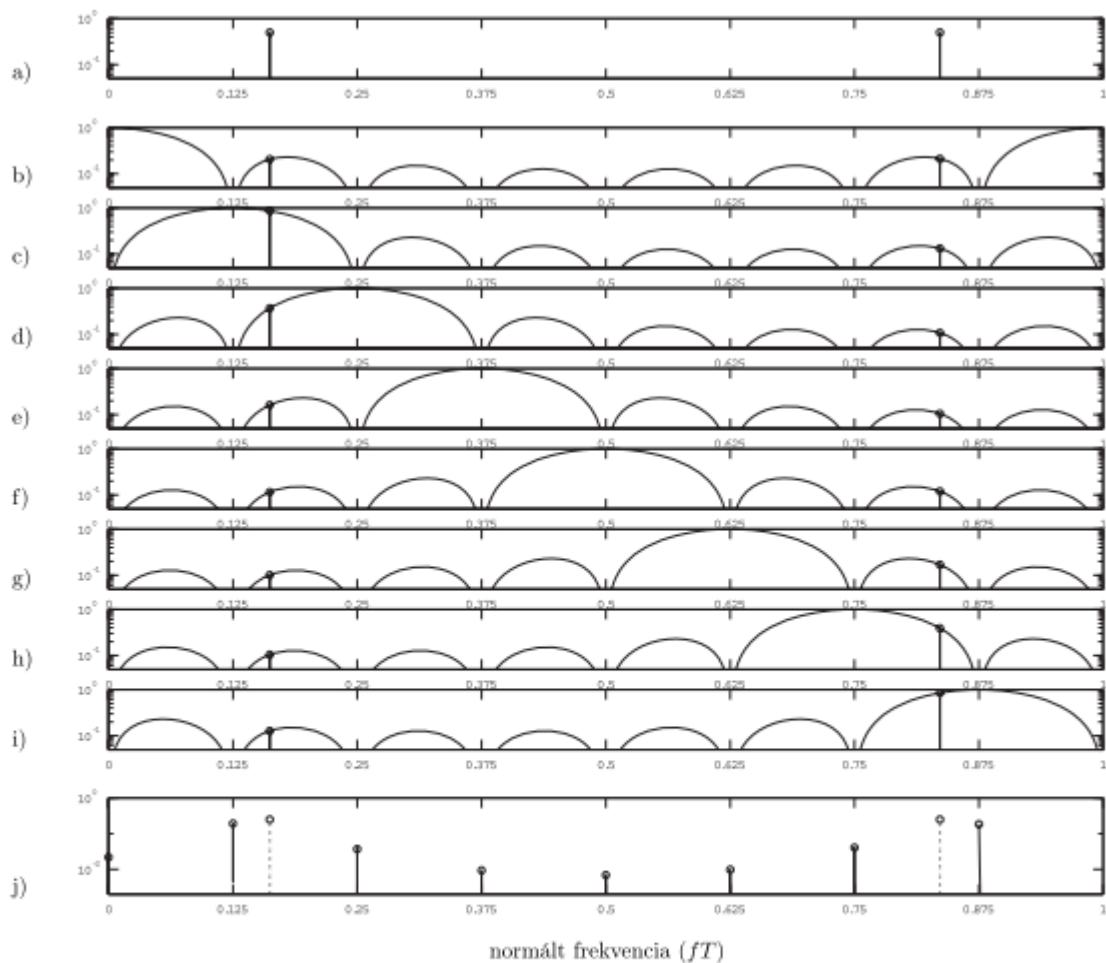
A **szivárgás** úgy jön létre, hogy mindegyik szűrő, a karakterisztikákon jelzett módon, csak véges mértékben csillapítja a jel két komplex harmonikus komponensét. A két egymásra ortogonális jelkomponens teljesítményét összegezve kapjuk az adott sáv eredő teljesítményét. Akkor lép fel, amikor a jelben található frekvencia komponens DFT vonalak közé esik, ilyenkor a DFT-ben nem tud megjelenni az adott frekvencia mivel nincs rá DFT vonal, így a szomszédos spektrumvonalak közt oszlik meg a teljesítménye. Ilyenkor ezek a csúcsok elvesznek.

A szivárgás tehát a szűrőkarakterisztikák átfedése ill. periodikus „leszívásai” miatt jön létre, a picket fence hatás pedig azért, mert a karakterisztikák nem elég „laposak” a sávközép $\frac{2\pi}{N} (k \pm \frac{1}{2})$ környezetében.

Picket fence effektus: a spektrumvonal alacsonyabb amplitudóval jelenik meg mint a tényleges értéke. Oka: a karakterisztikák nem elég laposak a sávközép környezetében.

A fázis információt a komplex eredményből $\arctan(X)$ meghatározásával kapjuk, ezekután a fázis karakterisztika felrajzolható.

A véletlenfázisú szinuszjel Fourier transzformáltja egy körön helyezkedik el, egyenletes eloszlással.



7.9. ábra. Spektrumszivárgás és picket fence jelenség: (a) egy szinuszos jel spektruma, (b-i) a DFT-szűrőbank szűrőkarakterisztikái ($N = 8$), (j) a szűrőkimenetek teljesítménye a megfelelő sávközépen ábrázolva (szaggatottal a valódi teljesítmény-spektrum).

Ezeket a hatásokat ablakozással lehet kiküszöbölni. A négyszögablakkal való kivágás a mintaregisztrátum széleinél szakadást eredményez (a DFT mindent periodikusnak lát!), így

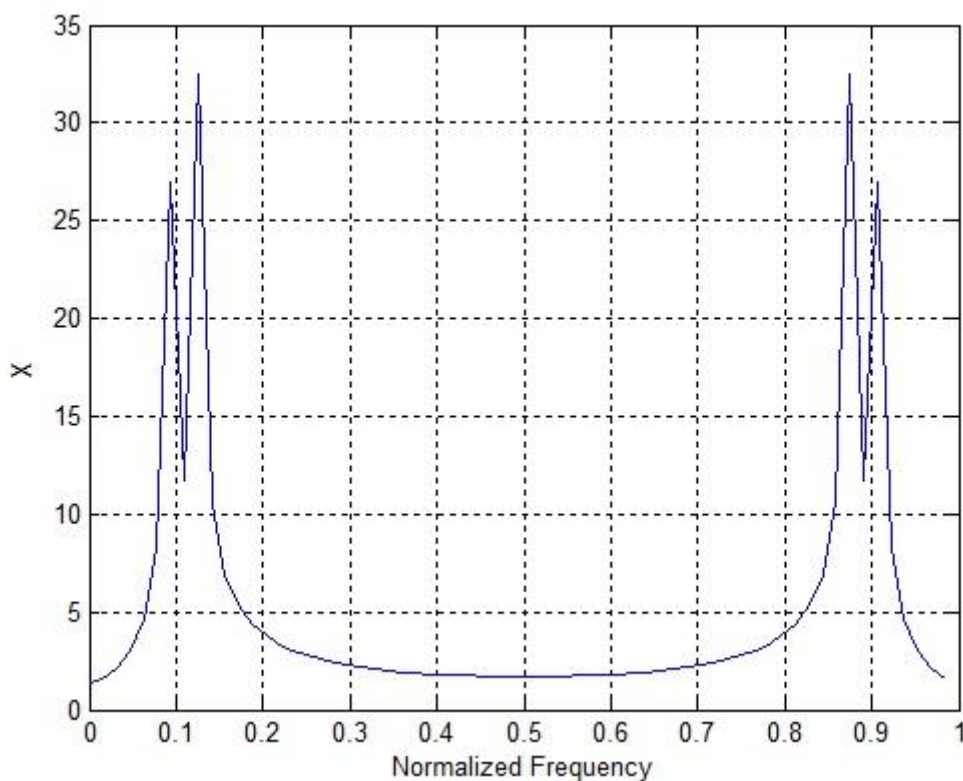
ugrás kerül a jelbe. Ablakozó függvénnyel való szorzás (gyakorlatilag egy súlyozás) kisimítja a széleket, javít a léckerítés hatáson.

DFT eredményének körszimmetriája

Smith könyv idevágó része, a DFT periodicitása:

<http://www.dspguide.com/ch10/3.htm>

Az lábbi ábrán egy DFT eredménye látható. Amit észrevehetünk: a frekvencia normalizáltan van ábrázolva, a 0-0,5 közötti rész tükörszimmetrikusan a 0,5-1 között is látható. Emiatt a szimmetria miatt általában csak a 0-0,5 közötti részt szokás megadni.



Bizonyítás:

$$X(k+N) = \sum_{i=0}^{N-1} x_i e^{-j2\pi \frac{(k+N)i}{N}} = \left(\sum_{i=0}^{N-1} x_i e^{-j2\pi \frac{ki}{N}} \right) e^{-j2\pi i} = X(k) e^{-j2\pi i} = X(k)$$

Zaj FT-jének amplitúdóeloszlása

A zaj természetéből adódó lesz a Fourier transzformáltjának eredménye. Gyakorlatban előforduló zajok: fehérzaj, rózsaszínzaj, Brown zaj, szürkezaj.

Fehérzaj: teljesítménysűrűség spektruma minden frekvencián konstans.

Rózsaszín vagy $1/f$ zaj: teljesítmény-sűrűség spektruma fordítottan arányos a frekvenciával. -3dB/oktávval csökken a teljesítménye.

Brown-zaj vagy vörös zaj: teljesítmény-sűrűség spektruma a frekvencia négyzetével csökken. -6dB/oktávval csökken a teljesítménye.

Apró finomságok, definíciók

Kovariancia: két jel együtt mozgása időben.

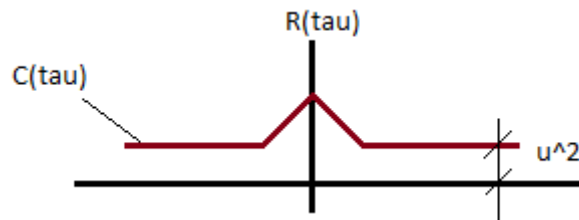
$$\sigma(x, y) = \text{cov}(x, y) = E\{(X - \mu)(Y - \nu)\} = E\{XY\} - \mu\nu$$

$$\sigma(x, x) = \sigma^2(X)$$

Autokovariancia: a jel önmagával eltolt kovarianciája.

$$C_{xx}(\tau) = E\{(X_t - \mu)(X_{t-\tau} - \mu)\} = R_{xx}(\tau) - \mu^2$$

$$\text{cov}(x, x) = \text{cor}(x, x) | \text{feltéve, hogy } \mu = 0 \leftrightarrow \text{cov}(x, x) = \text{cor}(x, x) - \mu^2$$



Karakterisztikus függvény: Ha X valószínűségi sűrűség függvénye akkor a karakterisztikus függvény annak IFT-je:

$$\varphi_x(t) = E\{e^{jtX}\} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{jtX} dF_x(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{jtX} f_x(x) dx$$

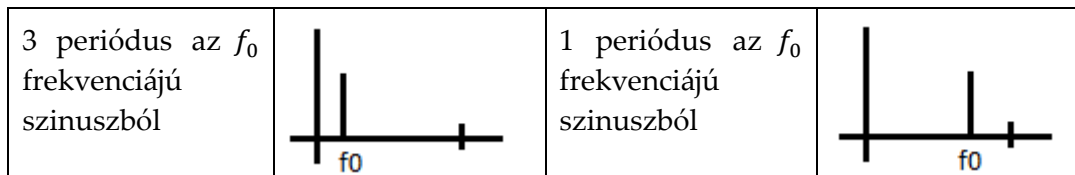
Korreláció

Ha Gauss eloszlású a jel, akkora 0 autokorreláció függetlenséget jelent.

Szűrő kiválasztása a feladathoz: van amelyik szűrő az amplitúdó karakterisztikát, van amelyik a frekvencia karakterisztikát módosítja előnyösen, mindig a feladathoz mérten kell választani, aszerint, hogy hol van kódolva az információ. Az időtartományban kódolt információ esetén a szűrő fázismenetének lineárisnak kell lenni, ami azt követeli meg, hogy az impulzusválasza szimmetrikus legyen.

Ergodikus jel: a sokaság és az időszerinti átlag megegyezik. Csak akkor nem ergodikus egy jel, ha az rendelkezik memóriával.

Amennyiben a regisztrátum **több periódust** tartalmaz, akkor a frekvenciatartománybeli képen annyiad részére csökken a felbontás ugyanannyi minta esetén. pl.: $N=600$



Centrális Határeloszlási Tétel: egymástól független val. változók melyek μ várható értékkel és σ szórással rendelkeznek összegezve normális eloszlásúak.

Egy valószínűségi változó **várható értéke** az általa felvehető összes érték súlyozott átlaga. A súly megegyezik annak valószínűségével, hogy (1) adott értéket (diszkrét) (2) adott tartományt felvesz.

Két független val. változó összegének valószínűségi sűrűség függvénye, ezen változók sűrűségfüggvényének konvolúciója. Két független val. változó különbségének valószínűségi sűrűség függvénye, ezen változók sűrűségfüggvényének kereszt korrelációja.

Akkor létezik a Fourier transzformált, ha kiszámítható az integrál; abszolút vagy négyzetesen integrálhatónak kell lennie.

Minden esetben valós jeleket mérünk, ezért az eredmény FT-jének komplex konjugált szimmetrikusnak kell lennie.

Mintavételezés

Lineáris az a művelet, amelynél ha összeadok két jelet a kettő összege jön ki.

Mese, level0 a digitális oszcilloszkóp

A digitális oszcilloszkóp (Digital Storage Oscilloscope: DSO) működési módja alapvetően abban tér az analóg oszcilloszkópétól, hogy egy dual-portos memória felhasználásával szétválasztja az adatgyűjtést és a megjelenítést. A bemenőjelet – megfelelő jelkondicionálás után először mintavevő-tartó áramkörre, majd A/D átalakítóra vezetjük. Az A/D átalakító bitszámát többnyire korlátozza az elérendő mintavételi sebesség. Ha csak katódsugárcsöves megjelenítésre használnánk ezeket a mintákat, akkor 8 bit elég lenne, de manapság egy digitális oszcilloszkóp egyre inkább egy nagy tudású jelanalizátor, amely igényes feldolgozásokat is végez, ehhez azonban nagyobb bitszámra van szükség (10-12 bit). A vezérlő egység gondoskodik a mintavételekről, az átalakítások indításáról, a memóriát címző egység léptetéséről, valamint a megjelenítés időzítéseiről. A megjelenítéshez ugyanolyan funkciókat kell megvalósítani, mint az analóg oszcilloszkópnál: (1) Y irányú eltérítés, (2) X irányú eltérítés, (3) Z „moduláció”. Az ezekhez tartozó címaritmetika címzi a megjelenítésre kijelölt memória-tartalmakat, ill. állítja elő a vízszintes eltérítés „fűrészelét”. A megjelenítés itt is periodikusan ismétlődő folyamat: ahhoz, hogy álló ábrát lássunk a képernyőn, ciklikusan ki kell olvasnunk a memóriát.

A frekvencia traszformációval kiterjeszthető az oszcilloszkóp sávszélessége, valamint lehet spórolni a mintavétel utáni áramkörök alacsonyabb frekvencia igényével.

A beállított mintavételi frekvenciával történő adatgyűjtés mindaddig folyamatosan zajlik, amíg a trigger-feltétel teljesülésének következményeként le nem áll. Ha a rendelkezésre álló memóriát teleírtuk, akkor ciklikusan felülírjuk. Az adatgyűjtés leállításának módozata:

- **Ha trigger esemény bekövetkezése után** még teleírjuk a memóriát, akkor ún. utótriggerelést valósítunk meg. Ekkor a trigger esemény utáni jelszakaszt tudjuk megjeleníteni. Az analóg oszcilloszkópnál lényegében csak erre van lehetőségünk.

- **Ha a trigger esemény bekövetkezésekor azonnal** leállítjuk a mintavételezést, akkor a memóriában a trigger esemény előtti időszak mintái lesznek találhatóak. Ezt nevezzük előtriggerelésnek.

- **Ha trigger eseményt követően** csak időben későbbi jelszakasz megjelenítését tervezzük, akkor beállíthatunk egy $k T$ késleltetési időt, és csak az ennek letelte után kezdődik a kívánt jelszakasz mintáinak begyűjtése. Ez az ún. utótriggerelés késleltetéssel üzemmód.

- **Ha a trigger esemény bekövetkezte után, egy előírt időtartamot ($k T$) kivárunk,** de ezalatt még nem írtuk tele a memóriát, akkor a trigger esemény előtti és utáni jelszakasz egyidejűleg látható lesz. Ez az ún. előtriggerelés késleltetéssel üzemmód.

Működési módok

Egyszeres lefutás (Single sweep): A digitális oszcilloszkóppal egyszeres, azaz periódikusan nem, vagy nehezen ismételhető, tranziens jelenségek megjelenítését is meg tudjuk oldani: az egyszer mintavételezett jelalakot jelenítjük meg.

Átlagolás (Averaging) – Additív zajszűrés: Ebben az üzemmódban additív zajjal terhelt jelalakok ismételt, fázishelyes begyűjtését és az egymásnak megfelelő pontok átlagolását, ún. additív zajszűrést valósítunk meg.

Holdoff funkció: Például egy adatcsomag esetén a trigger-feltétel minden pozitív szintátmenet esetén teljesül. Annak érdekében, hogy az impulzusokat egyértelműen a csomag első elemétől kezdődően lássuk, a trigger feltétel érvényre jutását a megjelenítendő impulzusok idejére tiltani kell.

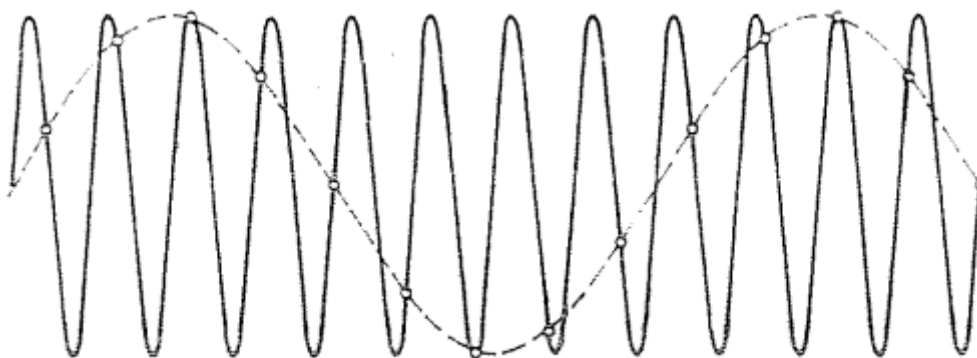
Csúcsdetektálás (Peak detect): A digitális oszcilloszkóp mérőcsatornája mintavételes üzemi: a jelet csak a mintavételi időpontokban követi. A mintavételezés látóköréből könnyen kikerül például 1 kHz-es mintavételi frekvenciát alkalmazva az 1 μ s szélességű impulzus láthatatlan marad. Annak valószínűségét, hogy megjelenése egybeessen a

mintavételi időponttal 10^{-3} nagyságrendűnek becsülhetjük. A csúcsdetektálás üzemmód az ilyen impulzusok „észrevételét” és megjelenítését szolgálja: a megjelenítés a következő „hivatalosan előírt” mintavétellel egyidejűleg történik.

Utófeldolgozás és megjelenítés: A korszerű digitális oszcilloszkópok jelentős számítási kapacitással is rendelkeznek. Tipikus szolgáltatásuk off-line spektrumszámítás az FFT algoritmusával.

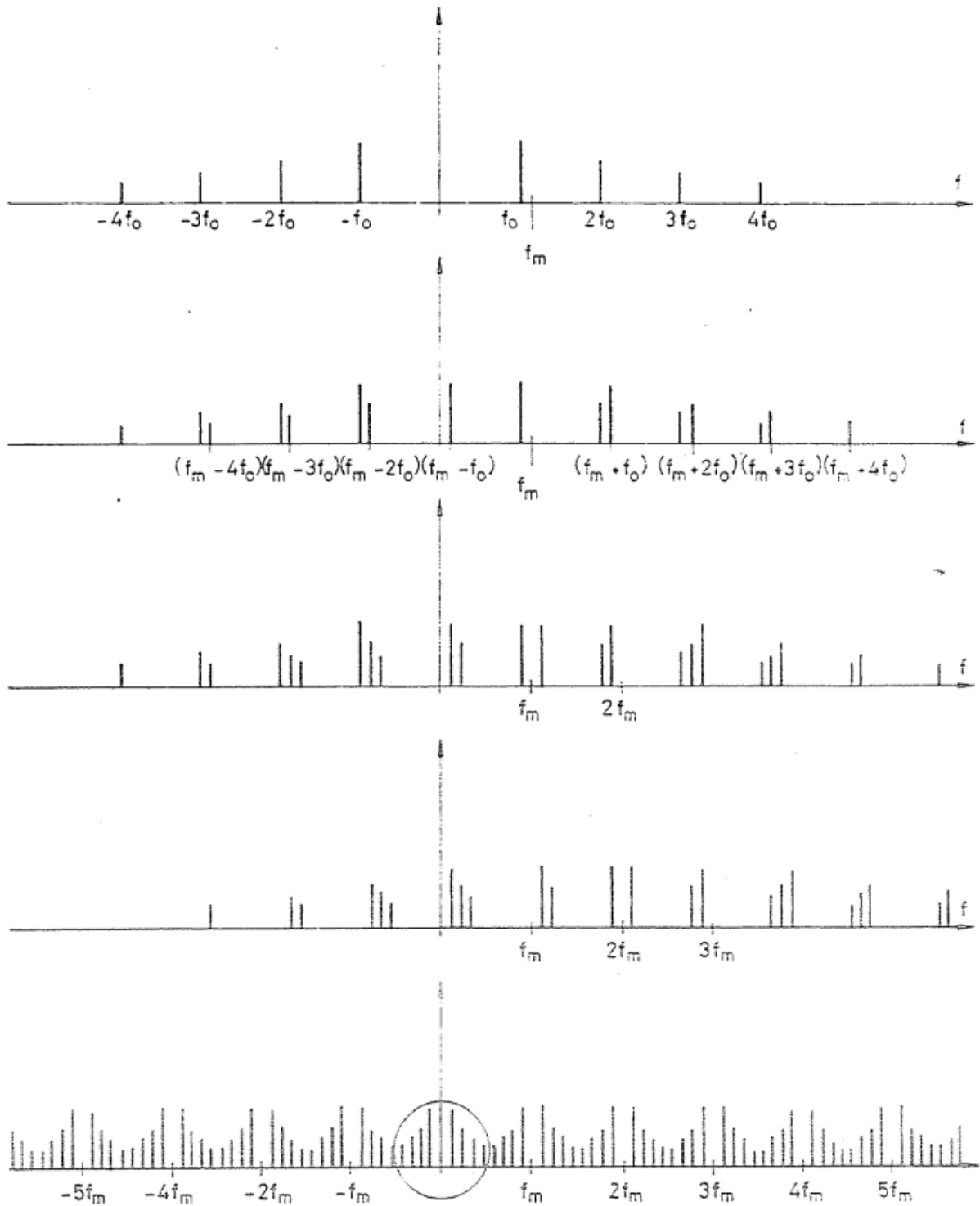
Schnell III. level1

A határfrekvencia lényeges növelését teszi lehetővé a mintavételező (sampling) elvű oszcilloszkóp. Ez ismétlődő jelek vizsgálatára alkalmas. Szekvenciális változata a jelfrekvenciától kissé eltérő frekvenciával vagy ennek törtrészeivel mintavételezi a jelalakot, és a különböző periodusokból származó mintavételi értékek egymás utáni felvillantásával jeleníti meg a jelformát a képernyőn:



24.2. ábra. A szekvenciálisan mintavételező oszcilloszkóp működési elve

A kisebb frekvencián megjelenő alakhű jel felfogható úgy is, mint a mintavételi törvény be nem tartásából származó frekvenciatranszformáció eredménye. A 24.3.a ábrán látható egy f_0 alapfrekvenciájú periodikus jel spektruma. Az f_m mintavételezési frekvenciát valamivel az f_0 fölött választottuk meg. A mintavételezés következtében az eredeti spektrum $\pm kf_m$ helyek körül megismétlődik. A 24.3.b, c, d ábrákon az f_m , $2f_m$, $3f_m$ helyekhez tartozó ismételt spektrumok egymásra másolódnak. Megfigyelhetjük, hogy a 0 frekvencia környékén felépül a letranszformált jel spektruma. Könnyen belátható, hogy a 24.3.e ábrán látható teljes letranszformált spektrum valóban az eredeti jel spektrumának felel meg. A mintavételező oszcilloszkóp hátránya zajérzékenysége (a képet pontonként más-más periódusból rakja össze). Határfrekvenciája, melyet a mintavételező kapcsolási ideje korlátoz, néhányszor 10 GHz.



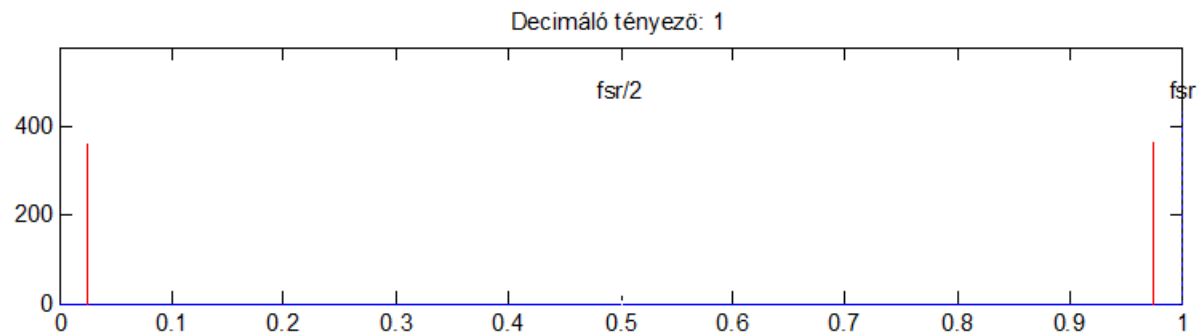
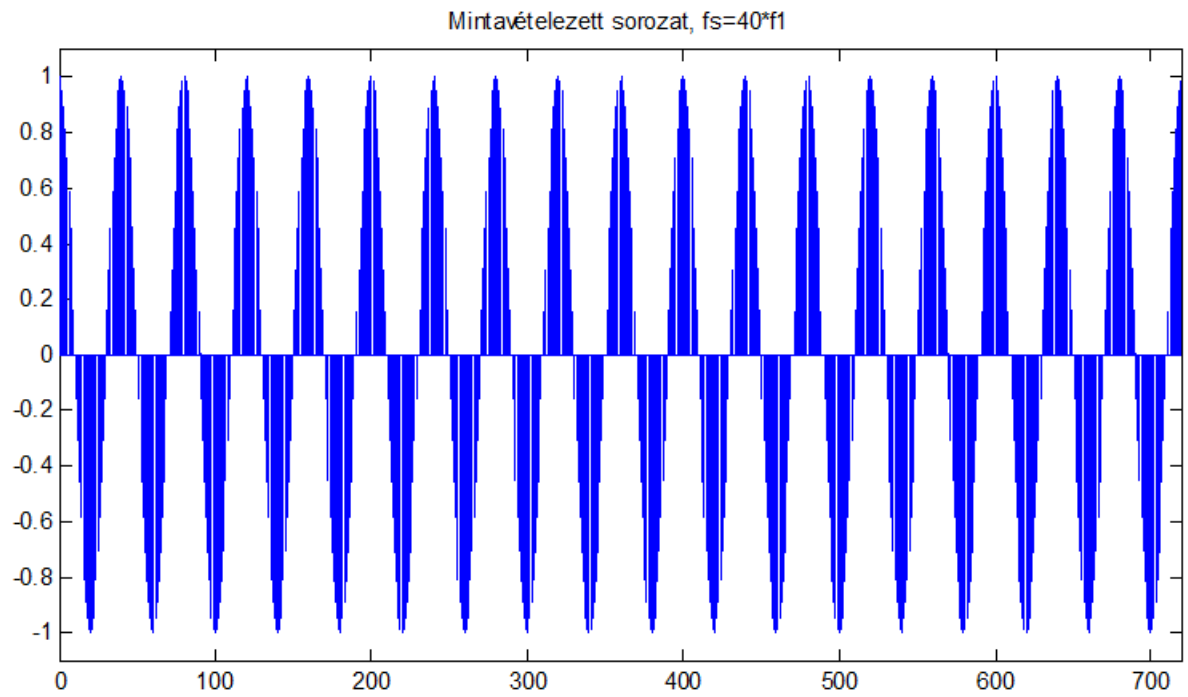
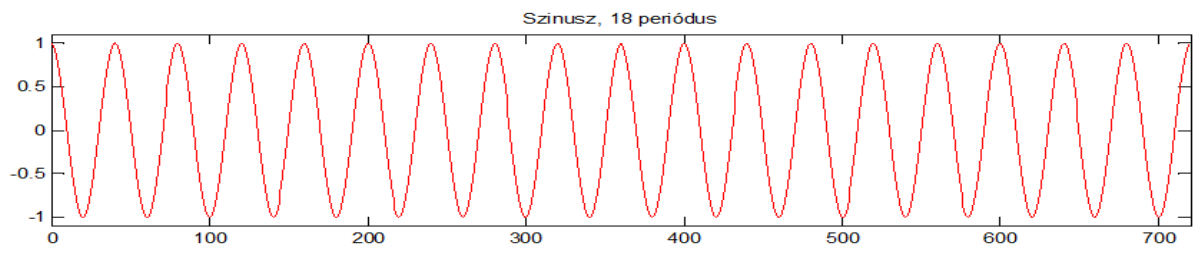
24.3. ábra. A szekvenciálisan mintavételező oszcilloszkóp mint frekvenciatranszformátor

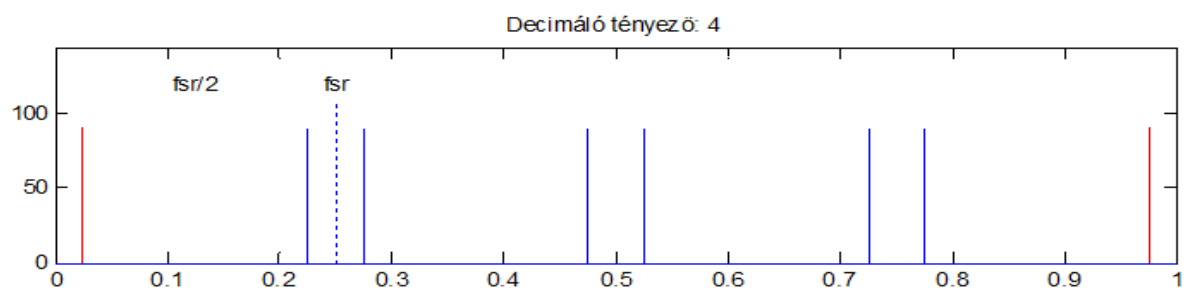
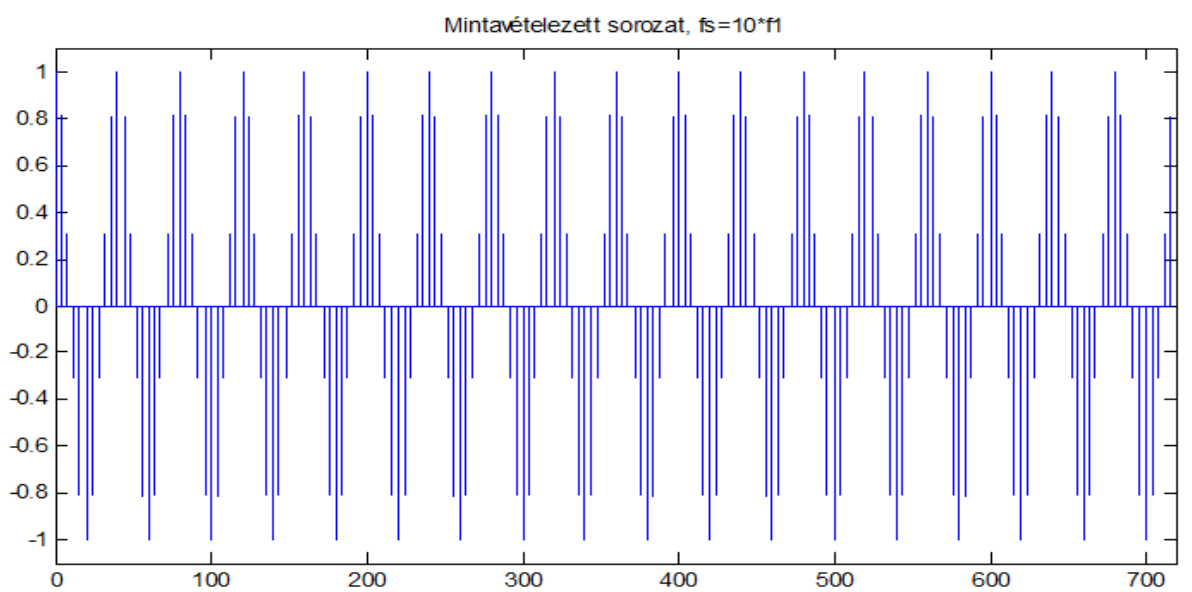
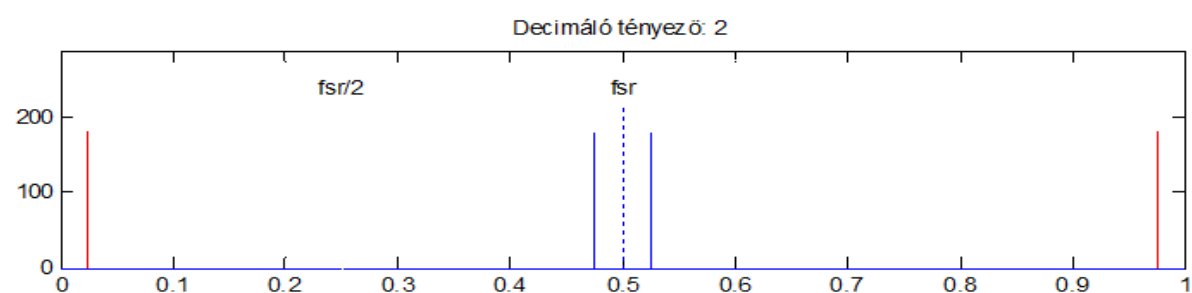
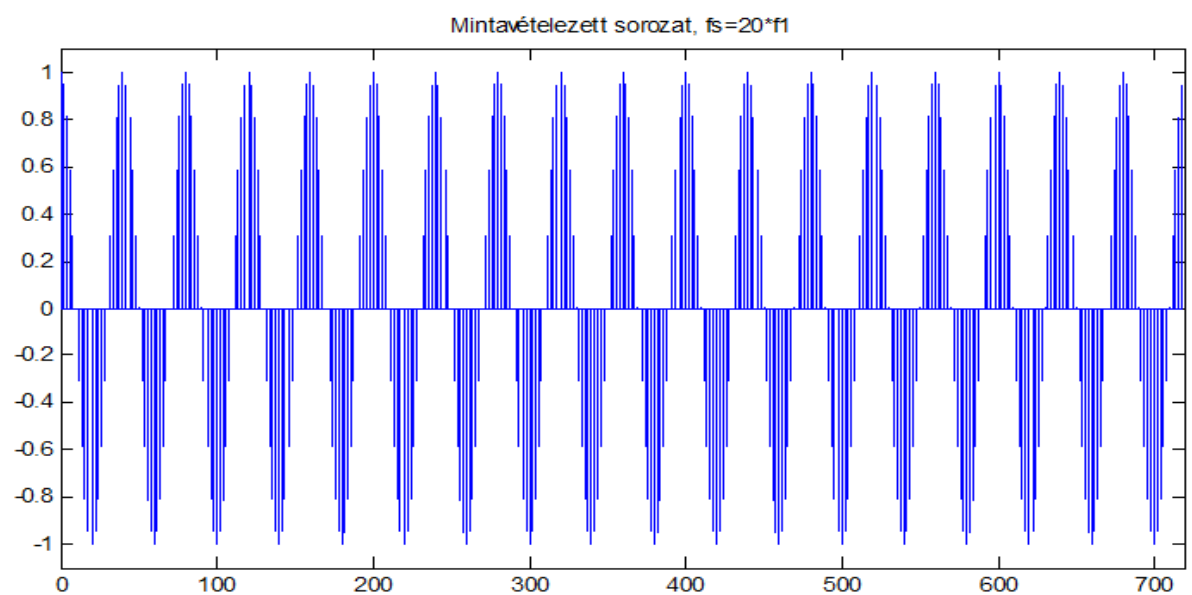
Analóg vs. Digitális aluláteresztő szűrő (átlagoló)

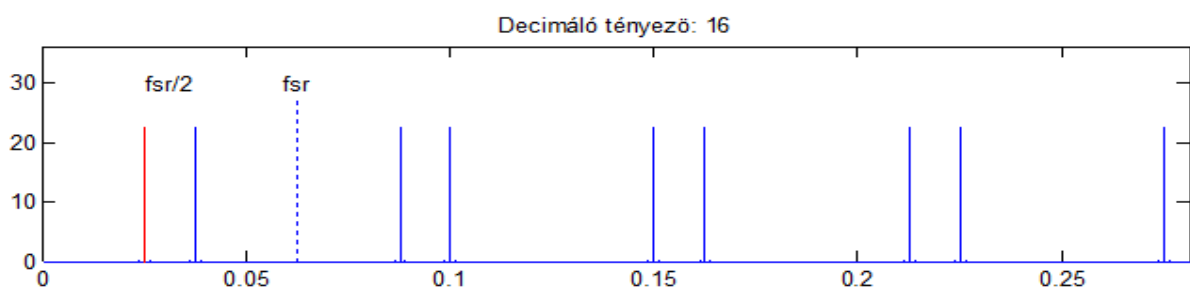
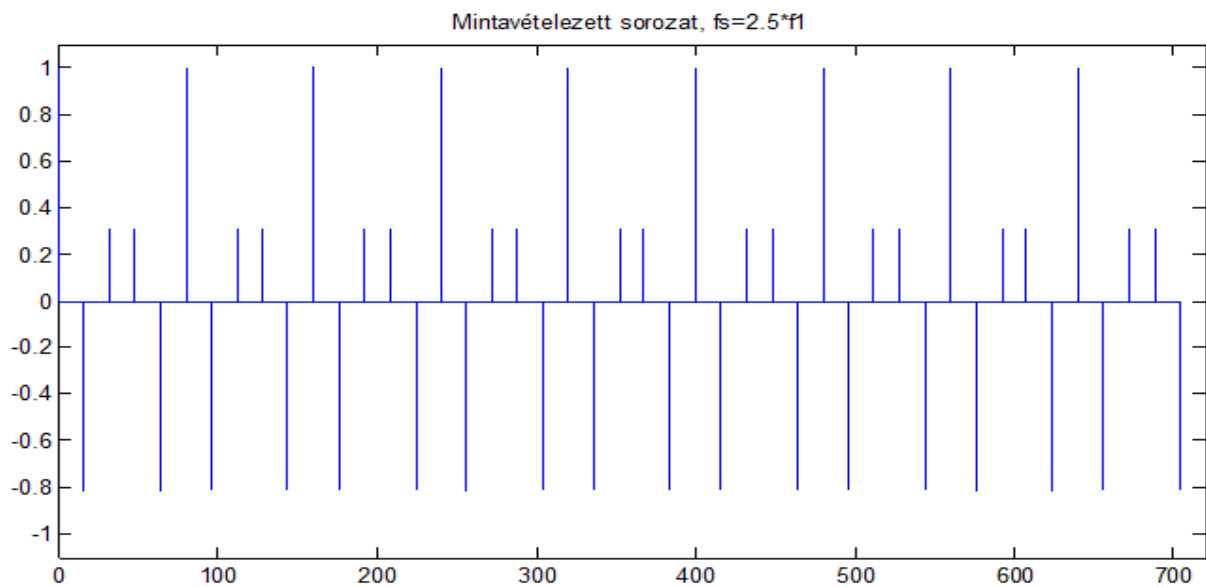
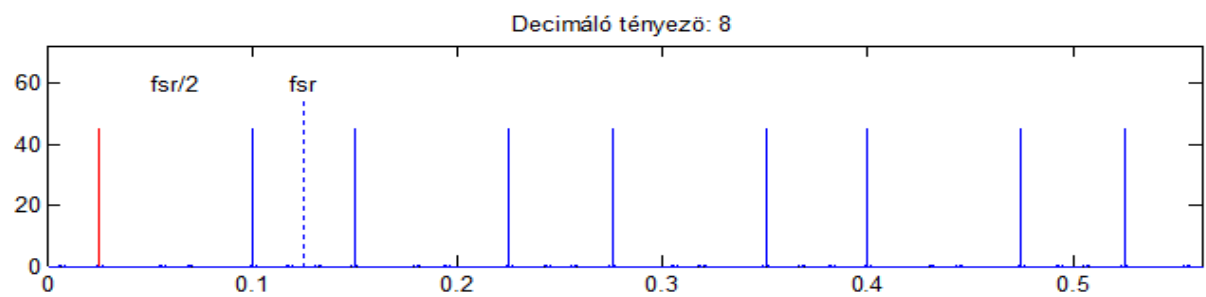
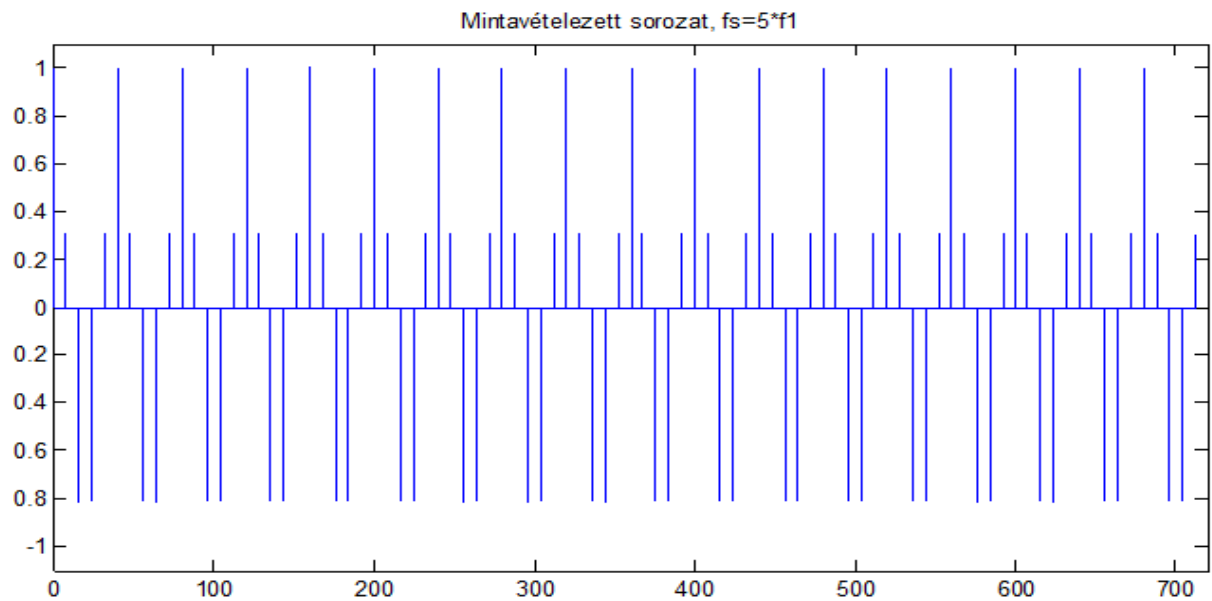
Smith könyv idevágó része:

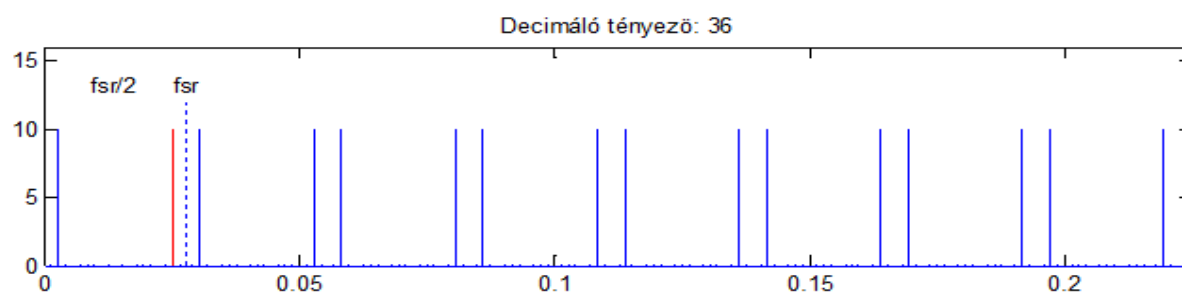
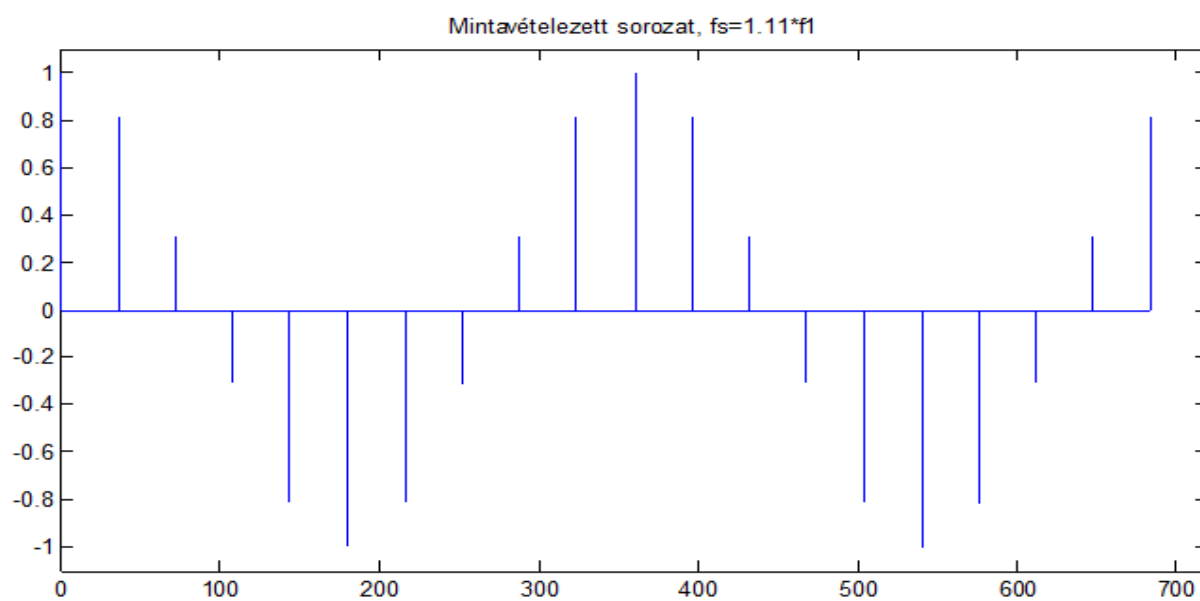
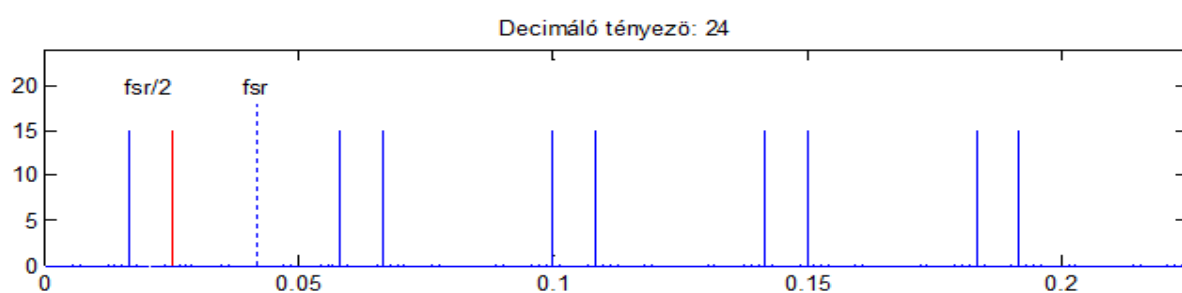
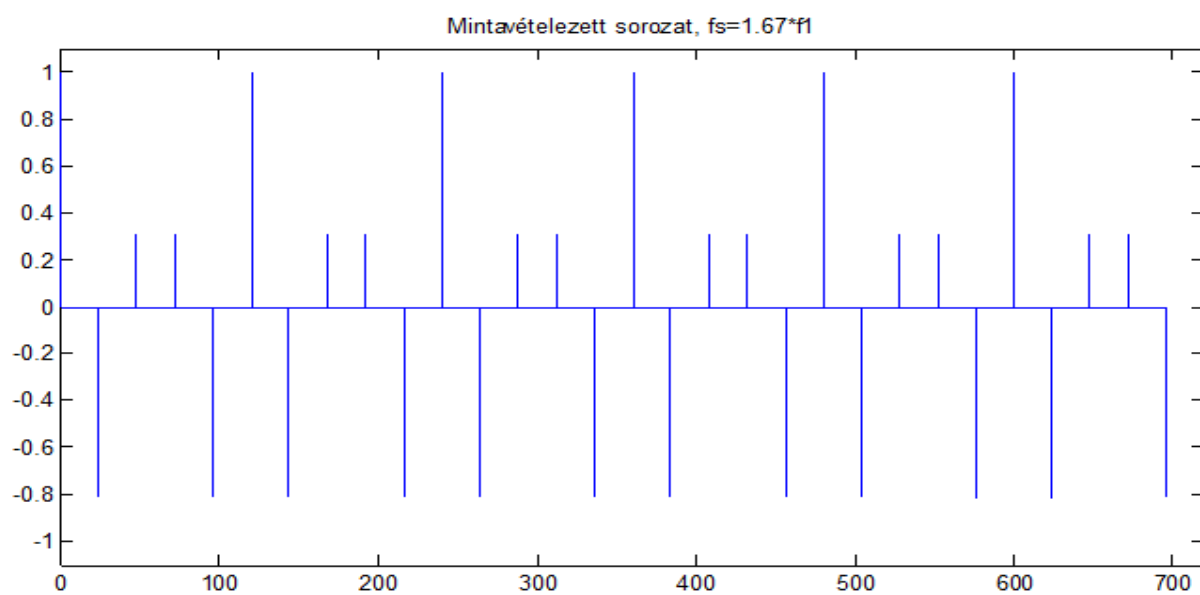
<http://www.dspguide.com/ch21/1.htm>

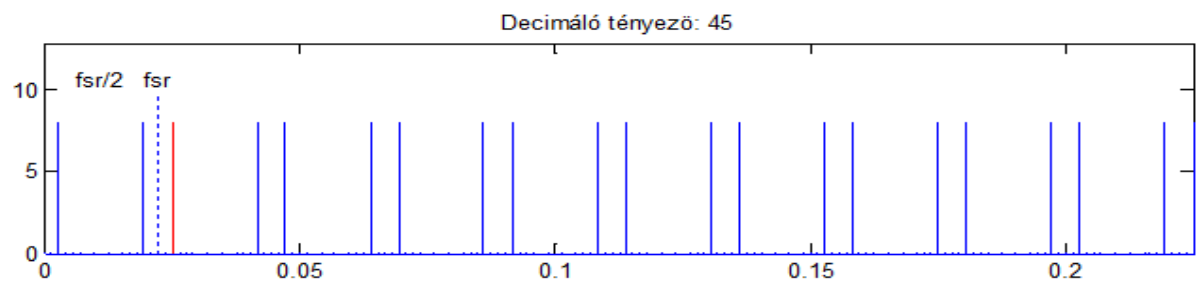
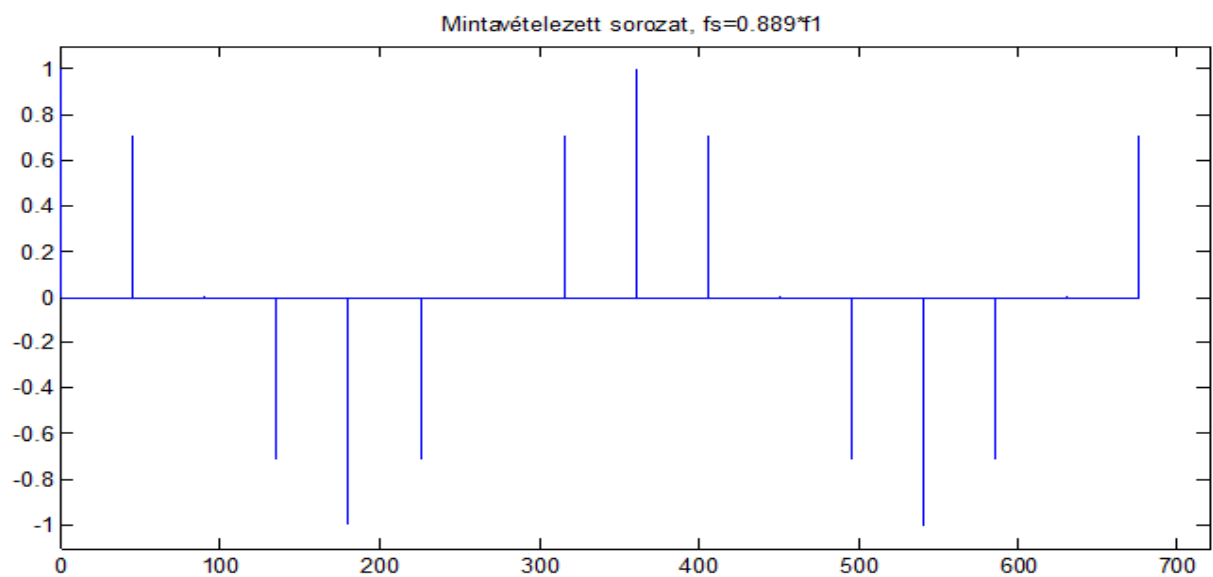
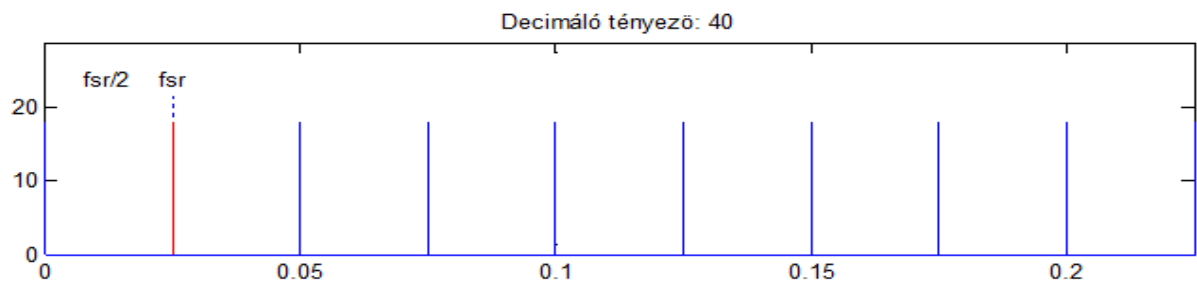
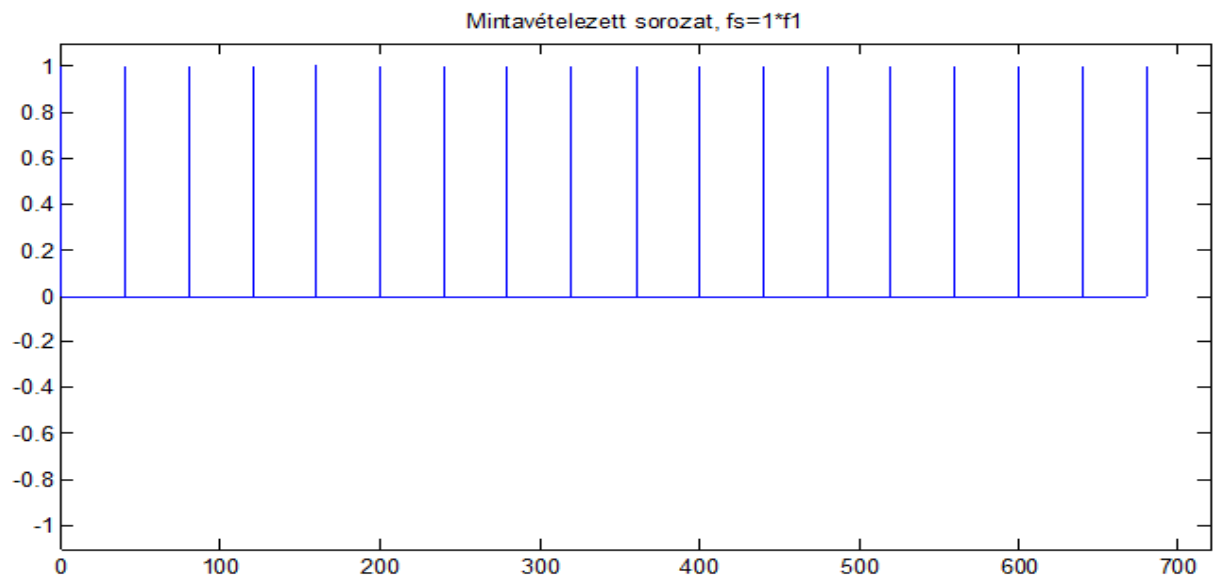
Csalóka ábrák











Az első hét ábrán látható, hogy maradéktalanul helyreállítható a szinusz jel, akkor ha kettőnél több minta áll rendelkezésre, vagyis betartottuk a mintavételi tételt. Amikor a szinusz frekvenciája és a mintavételi frekvencia megegyezik, csupa egyforma értéket fogunk mintavételezni, ez lehet akár a szinusz csúcsa vagy csupa nullák. A lényeg, hogy nem állítható elő belőle a szinusz jel. Tovább csökkentve a mintavételező frekvenciát már átlapolódás történik. Az ábrákon a piros vonal jelzi az eredeti spektrum vonalat. Az utolsó ábrán frekvenciatartománybeli átlapolódás látható, a jel alulmintavételezése áll fenn.

Mintavételezés

A Dirac-delta értelmezése

Smith könyv idevágó része:

<http://www.dspguide.com/ch13/1.htm>

1. A kimenetű jel alakját teljes mértékben a rendszer karakterisztikája határozza meg.
2. A kimenő jel amplitúdója a bemenő jel görbe alatti területével (integráljával) arányos.

Azokat a jeleket, melyek elég keskenyek az említett 3 tulajdonság teljesítéséhez, **impulzusoknak** nevezzük. Például egy mikrohullámú adó számára egy impulzus ps nagyságrendű, mert az elektronika válaszüze ns nagyságrendben mérhető. Viszont egy vulkán évekig eltartó kitörése jó impulzusnak tekinthető az évezredekig tartó geológiai változások számára.

Ahhoz, hogy bármilyen rendszer számára alkalmazható legyen az impulzus kifejezés, definiáljuk az impulzust infinitezimálisan keskenyre. A folytonos Dirac-delta egy normalizált változata egy ilyen impulzusnak. Matematikailag a következők jellemzik:

1. Infinitezimálisan keskeny.
2. Az impulzus a 0 időpillanatban következik be.
3. Területe 1, azaz $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$.

Mivel a Dirac-delta infinitezimálisan keskeny és a területe 1, ezért az amplitúdójának végtelennek kell lennie. De mivel az amplitúdó alapján véve a jel alakjához tartozik, ezért ez végűlis nem számít.

A Dirac-delta csak egy matematikai konstrukció, nem pedig valós jel. A valóságban a Dirac-deltaként viselkedő jeleknek mindig véges időtartamuk és amplitúdójuk van. Hogy jobban megértsük a való világban tapasztalható impulzusokat, nézzünk az éjszakai égen egy bolygóra és egy csillagra, mint pl. a Mars és a Szíriusz. Pusztá szemmel nézve mindkettő ugyanolyan fényesnek és méretűnek tűnik. A Mars kb. 6000 km átmérőű és 60 millió km-re van tőlünk, míg a Szíriusz kb. 300-szor nagyobb és több, mint 1 milliószor távolabb található. A számok alapján a Marsot több, mint 3000-szer nagyobbbnak kéne látnunk, mint a Szíriuszt. Mégis hogy lehetséges ez? Ezek az objektumok ugyanolyannak néznek ki, mert elég kicsik ahhoz, hogy impulzusok legyenek az emberi szem számára. Az érzékelt alakzat a szem impulzusválasza, nem pedig a tényleges csillag vagy bolygó képe. Teleszkópba nézve ez azonnal látható is: a Mars egy tompa korong, míg a Szíriusz még mindig egy fényes pulzus.

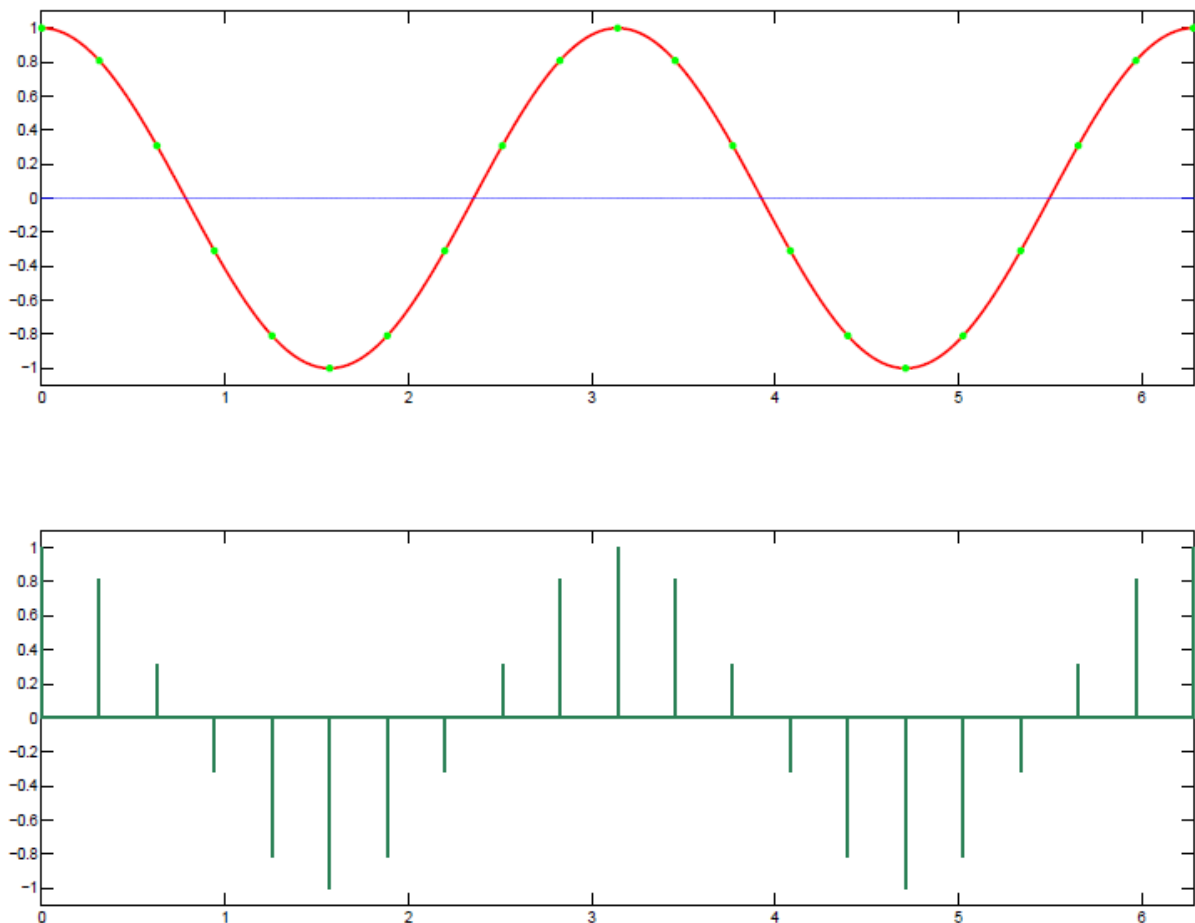
Pontosan ez az oka annak, hogy a csillagokat miért látjuk pislogni/csillogni, míg a bolygókat nem: egy csillag képe elég kicsi ahhoz, hogy rövid időre a légkörben lévő részecskék eltakarják, míg a bolygóké kevésbé.

A matematikában a Dirac-impulzus szigorú értelemben nem függvény, hanem ún. disztribúció, melynek tulajdonságait a disztribúcióelmélet tárgyalja.

A komplex exponenciális függvény Fourier-transzformált párja egy Dirac-impulzus.

A mintavételezés modellezése

Ahhoz, hogy analóg jeleket digitális eszközökkel feldolgozhassunk, először véges bitszámon ábrázolt számsorozatokká kell átalakítanunk őket. Az időben való diszkrétizálás a mintavételezés. Mintavételezéskor az időben folytonos jelnek mintasorozatot feleltetünk meg. Leggyakoribb módja, hogy a mintasorozat a jel egyenletes időközökben felvett értékeit tartalmazza.



A számsorozatnak önmagában 0 a Fourier-transzformáltja, mert csak diszkrét helyeken különbözik nullától. A vizsgálat céljából Dirac-impulzusokat rendelünk a mintákhoz, úgy, hogy az impulzussorozat integrálja ne különbözzön jelentősen az eredeti jel integráljától.

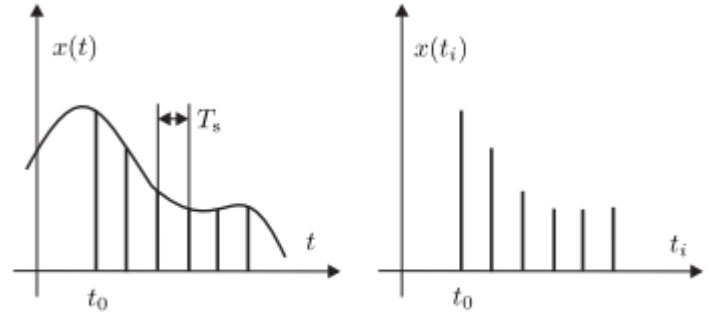
Csak azért vezetjük be a Dirac-deltákat, hogy aztán Fourier-transzformálni tudjunk.

A mintavételezés matematikai modellezése

Mintavételezéskor az időben folytonos jelnek mintasorozatot feleltetünk meg. Ennek leggyakoribb módja az, hogy a mintasorozat a jel egyenletes időközökben felvett értékeit tartalmazza (2.2. ábra). Az ábrán jól megfigyelhetjük, hogy az ismét egyenletes távolságokban felrajzolt mintavételi értékek sorozata az eredeti görbéhez hasonló benyomást kelt. Az az érzésünk támad, hogy megfelelő interpolációval az eredeti görbe szinte hibátlanul helyreállítható. Annál inkább ez a helyzet, minél sűrűbb a mintavételezés az eredeti jel változási sebességéhez képest. Feltehetjük a kérdést, hogy adott jelet végül is hogyan kell mintavételezni, ha a kis hibájú ill. hibátlan helyreállítást biztosítani szeretnénk. A jel változási sebessége a jel spektrumával van szoros kapcsolatban. Ezért először Fourier-transzformálható (tranziens) jelekre fogunk szorítkozni és a mintavételezésnek a Fourier-transzformáltra gyakorolt hatását vizsgáljuk. Ebben a tárgyban a Fourier-transzformáció következő alakját használjuk:

$$X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt$$

A legnagyobb nehézséget az jelenti, hogy a számsorozatnak önmagában zérus a Fourier-transzformáltja, hiszen csak diszkrét helyeken különbözik nullától. Ezért az egyes értékekhez a vizsgálat céljából Dirac-impulzusokat rendelünk úgy, hogy a Dirac-impulzus-sorozat integrálja ne különbözzön lényegesen az eredeti jel integráljától:



2.2. ábra. A mintavételezés szokásos módja

$$x_m(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(t_i) \delta\left(\frac{t-t_i}{T_s}\right) = x(t) \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta\left(\frac{t-iT_s}{T_s}\right), \quad t_i = iT_s$$

ahol $x_m(t)$ a mintavett jelet reprezentáló Dirac-impulzus-sorozat, $x(t)$ a mintavételezendő folytonos jel, a t_i időpontok a mintavételezés helyei, és T_s a mintavételi távolság. Így

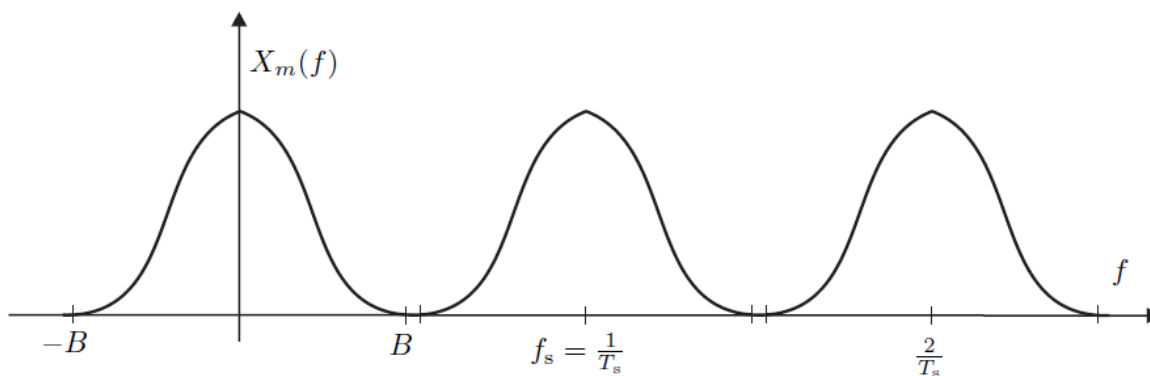
$$\int_{-\infty}^{\infty} x_m(t) dt = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left(x(t_i) \int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(\frac{t-iT_s}{T_s}\right) dt \right) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(t_i) T_s \approx \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt$$

A mintavételezés jelelméleti szempontból Dirac-impulzus-sorozattal történő szorzással modellezhető. Ezt a modellt matematikai mintavételezésnek nevezzük. A mintavételezett jel spektruma tehát az eredeti jel spektrumának $1/T_s$ távolságban vett

ismétlődéseiből áll. A folytonos jelhez tartozó $X(f)$ spektrum (és így a folytonos időfüggvény) visszaállíthatóságának feltétele a következő: biztosítani kell azt, hogy az ismétlődő spektrumok ne lapolódjanak át, amit úgy lehet elérni, hogy $f_s = 1/T_s$ értékét eléggé nagyra választjuk. Ezáltal az első mintavételi tétel kimondható: ha egy jel frekvenciakorlátozott, akkor $f_s = 1/T_s \geq 2B$ esetén a folytonos időfüggvény hibátlanul visszaállítható (nem veszítünk információt a mintavétellel).

Matematikai mintavételezés: szorzás Dirac-impulzussorozattal.

A Dirac-impulzus-sorozat Fourier-sorba fejthető, és így már könnyen Fourier-transzformálható, hiszen minden egyes komplex exponenciálisnak egy-egy Dirac-impulzus felel meg a frekvenciatartományban. Azaz periodikus Dirac-delta sorozat Fourier-transzformáltja egy periodikus Dirac-delta sorozat.



2.4. ábra. A mintavételezés hatása a Fourier-transzformáltra

A mintavételezett jel spektruma tehát az eredeti jel spektrumának $1/T_s$ távolságban vett ismétlődéseiből áll.

Ennek alapján a folytonos jelhez tartozó $X(f)$ spektrum (és így a folytonos időfüggvény) visszaállíthatóságának feltétele a következő: biztosítani kell azt, hogy az ismétlődő spektrumok ne lapolódjanak át, amit úgy lehet elérni, hogy $f_s = 1/T_s$ értékét eléggé nagyra választjuk. Ilyenkor ugyanis $X_m(f)$ -nek a $(-1/(2T_s), 1/(2T_s))$ intervallumba eső része pontosan megegyezik $X(f)$ -fel, azaz ideális aluláteresztő szűrővel $X(f)$ kivágható $X_m(f)$ -ből, és inverz Fourier-transzformációval $x(t)$ is kiszámítható. Kimondható tehát az **I. mintavételi tétel** (időtartománybeli mintavételi tétel):

1. Tétel. Ha egy jel Fourier-transzformáltja sávkorlátozott, azaz

$$X(f) = 0, \text{ ha } |f| \geq B,$$

akkor

$$f_s = \frac{1}{T_s} \geq 2B, \text{ azaz } T_s \leq \frac{1}{2B}$$

esetén a folytonos időfüggvény hibátlanul visszaállítható (azaz a mintavételezéssel nem veszítünk információt).

A tételt első megfogalmazóiról elnevezve Shannon-féle tételnek ill. Nyquist-tételnek is hívják, az $f_s/2$ frekvenciát Nyquist-frekvenciának is nevezik.

Megjegyzés: Annak, hogy a spektrum már $f = B$ -nél sem lehet zérustól különböző, elvi jelentősége van. Az természetesen nem baj, ha $X(f)$ itt véges értékű, hiszen egyetlen pontban felvett véges függvényérték nem befolyásolná az inverz Fourier-transzformált alakját. Ha azonban itt Dirac-impulzus jelenik meg, ami $f_1 = B$ frekvenciájú szinuszjelnél (mely tágabb értelemben Fourier-transzformálható) meg is történik, akkor az $f_s = 2B$ frekvenciával mintavételezve súlyos hibát követnénk el (2.5. ábra).

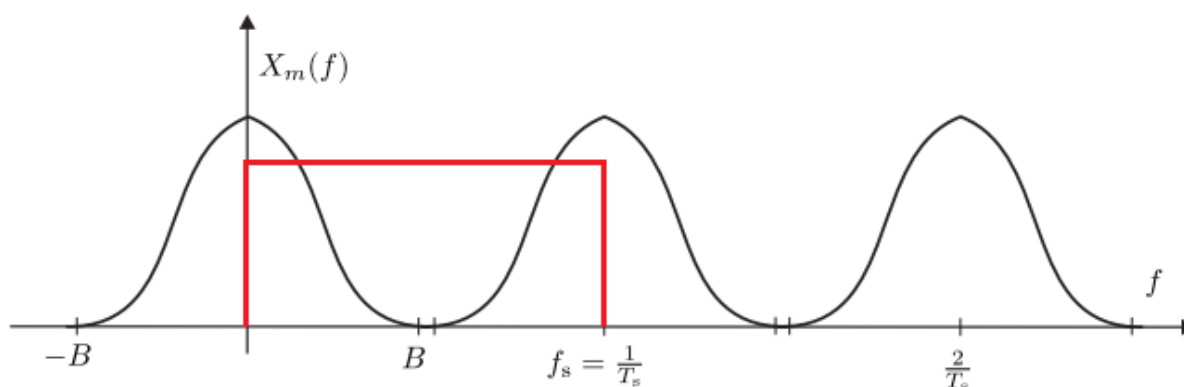
Szinuszjelre tehát a fentieknek megfelelő mintavételi előírás: $f_s > 2f_1$

Interpolációs formula – az időfüggvény helyreállítása

Az I. mintavételi tétel levezetése megmutatja, hogy a Fourier-transzformálton keresztül hogyan lehet helyreállítani a folytonos időfüggvényt. Ha azonban már tudjuk azt, hogy a mintavételi tételt betartottuk, akkor a mintavételi értékekből a folytonos időfüggvény értékeit közvetlenül (Fourier-transzformáció nélkül) is kiszámíthatjuk. A megfelelő formulához például az alábbi módon juthatunk el. A mintavételezett jel spektrumából az eredeti jel spektruma egy négyszög-ablakkal való szorzás segítségével állítható elő:

$$X(f) = X_m(f) \text{rect}\left(\frac{f}{1/T_s}\right)$$

$$\text{rect} = \begin{cases} 1, & |x| < 0,5 \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$



Elvégezve az inverz Fourier transzformációt:

$$\begin{aligned}
 x(t) &= x_m(t) * \mathcal{F}^{-1} \left\{ \text{rect} \left(\frac{f}{1/T_s} \right) \right\} = \left(\sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(iT_s) \delta \left(\frac{t - iT_s}{T_s} \right) \right) * \text{sinc} \left(\pi \frac{t}{T_s} \right) \\
 &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(iT_s) \text{sinc} \left(\pi \frac{t - iT_s}{T_s} \right)
 \end{aligned}$$

Ezt a kifejezést interpolációs formulának nevezzük, mert a minták közötti jelértékeket a minták felhasználásával interpolálja.

Figyeljük meg, hogy $t \neq iT_s$ esetén $x(t)$ előállításában az összes (végtelen sok) $x(iT_s)$ értékre szükség van. Gyakorlatilag jó közelítést ad azonban az, ha mindkét irányban eléggé távoli $x(iT_s)$ értékeket is figyelembe tudunk venni, mert a sinc-függvény még messzebb már kicsi.

Mintavételezés a frekvenciatartományban

A számítógépes adatfeldolgozás során gyakran át kell térnünk az időtartományból a frekvenciatartományba. Ilyenkor a frekvenciatengely mentén is csak diszkrét pontokban tudjuk kiszámítani a Fourier-transzformáltat, ezért szükségünk van a (folytonos) Fourier-transzformált megfelelő mintavételezését biztosító tételre is.

Ha észrevevesszük, hogy a Fourier-transzformáció és inverze matematikailag azonos alakú operációk, akkor a megfelelő kifejezések szisztematikus cseréjével közvetlenül kimondható a **II. mintavételi tétel** (frekvenciatartománybeli mintavételi tétel):

2. Tétel. *Ha egy jel időkorlátozott, azaz csak egy T időtartamon belül különbözik 0-tól, akkor spektrumát (Fourier-transzformáltját)*

$$\Delta f \leq 1/T$$

távolságokban mintavételezve a spektrum hibátlanul helyreállítható (azaz a mintavételezéssel nem veszítünk információt).

Figyeljük meg, hogy bár $2B$ szerepét T vette át, a tétel megfogalmazásánál nem törődünk a T hosszúságú időtartam helyével, ugyanis az $1/\Delta f$ távolságokban történő ismétlések a T időtartam tetszőleges elhelyezkedése esetén sem lapolódnak át. Nem bajlódunk az intervallum szélén a Dirac-impulzus kizárásával sem, hiszen az időfüggvény nem tartalmazhat ilyen anomáliákat.

A közelítő mintavételi tétel

Az I. és II. mintavételi tételt ismerve úgy vélhetjük, hogy a két tételt idő- és sávkorlátozott jelre alkalmazva megoldottuk a mintavételezés problémáját. Sajnos a helyzet nem ennyire egyszerű, ugyanis bebizonyítható, hogy egy jel és Fourier-transzformáltja nem lehet egyszerre idő- ill. sávkorlátozott, tehát például az interpolációs formulában elvileg nem tekinthetünk el az $i \rightarrow \infty$ határátmenettől. Szerencsére azonban sok jel adott időtartamon ill.

frekvenciasávon kívül csak elhanyagolhatóan tér el nullától. Ilyen jeleket véges sok adattal jellemezhetünk. Ezt mondja ki a közelítő mintavételi tétel:

3. Tétel. *Ha egy jel egy T hosszúságú időtartamon kívül közelítőleg nulla, és spektruma is közelítőleg sávkorlátozott B sávkorlással, akkor*

$$N \geq 2BT$$

adattal kis hibával jellemezhető.

Például időtartományban:

$$N = \frac{T}{T_s} \geq \frac{T}{\frac{1}{2B}} = 2BT$$

Ez a tétel biztosítja azt, hogy a számítógépen véges sok adattal számolva is kielégítő pontosságú eredményt kaphassunk.

Megjegyzés: Az időtartományban $f_s = 2B$ esetén elegendő ennyi adat. Ha azonban $f_s > 2B$, akkor a T hosszúságú időintervallumból $N' = Tf_s > N$ adatot kell vennünk, de ezek az adatok némileg redundánsak. A $2BT$ kifejezés tehát az időfüggvényből nyerhető **független** adatok számát adja meg.

Téglányösszeges közelítés

A kvadratúra szabályok többsége az interpolált függvényből származtatható, melyet aztán könnyű integrálni. Az interpoláció matematikai közelítő módszer, amely egy függvény nem ismert értékeire az ismert értékek alapján ad közelítést

A legegyszerűbb módszer a téglalap-szabály. A téglalap-szabály alkalmazásakor az integrálandó függvényt téglalapokkal közelítjük. Az interpolációs függvény konstans, és keresztül megy a keresett függvény egy-egy pontjain $((a+b)/2, f((a+b)/2))$.

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

A közelítés pontosságát növelhetjük azzal, hogy az intervallumot $[a, b]$ feldaraboljuk n darab alintervallumra; minden alintervallumra kiszámoljuk a közelítést, és összedjuk az eredményeket. Ezt összetett-szabálynak, kiterjesztett-szabálynak, vagy iterációs-szabálynak is hívják. (Szélsőértékben a folytonos integrált kapjuk.)

Induljunk ki a véges Fourier-transzformáltból és közelítsük az integrált téglányösszeggel:

$$X(f) = \int_0^T x(t) e^{-j2\pi f t} dt \approx \sum_{i=0}^{N-1} x(iT_s) e^{-j2\pi k \Delta f i T_s T_s}$$

A fenti kifejezést számítógéppel kiértékelve a Fourier-transzformáltat is diszkrét pontokban számítjuk ki. Legyenek ezek a pontok egy Δf frekvencialépés egész számú többszöröseinél:

$$X(k\Delta f) = \sum_{i=0}^{N-1} x(iT_s) e^{-j2\pi k \Delta f i T_s T_s}$$

A kérdés most már csak az, hogy Δf mekkora legyen, és k milyen értékeket vegyen fel ahhoz, hogy ne veszítsünk információt. A frekvenciatartománybeli mintavételi tétel értelmében $\Delta f \leq 1/T$. Mivel a feleslegesen sűrű mintavétel feleslegesen redundáns adatokat eredményez ezért célszerűnek látszik a választos, hogy $\Delta f = 1/T$. Az időtartománybeli mintavételezés miatt a spektrum $1/T_s$ távolságokkal periodikus. Ez azt jelenti, hogy $N_F = \frac{1/T_s}{\Delta f} = \frac{T}{T_s} = N$ pontban kell kiszámítanunk a Fourier-transzformáltat, ami logikusnak tűnik, hiszen N -pontos regisztrátumból N pontot kiszámítva a független adatok száma nem változik. (A DFT-nél megengedünk komplex bemenő adatokat is. Valós bemenő adatok esetén elvben elegendő lenne $N/2$ komplex pont is, ugyanis a komplex eredmény valós és képzetes része is független adatot jelent, és valós jel Fourier-transzformáltjára igaz, hogy $X(k\Delta f) = \overline{X(-k\Delta f)}$, ezért az N pont fele tartalmaz csak független információt.)

Vegyük észre azt is, hogy a fentiekkel rögzítettük a kitevőben szereplő $T_s \Delta f$ szorzat értékét is $T_s \Delta f = T_s \frac{1}{T} = \frac{1}{N}$. Azt kell még eldöntenünk, hogy k milyen értékeket vegyen fel (a periodicitás miatt szabad kezünk van). Szimmetria-okokból k -t is ugyanazokon az értékeket futtatjuk végig mint i -t ($0 \leq i \leq N-1$):

$$X_k = \sum_{i=0}^{N-1} x_i e^{-j2\pi \frac{ki}{N} T_s} \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

A fenti kifejezésben immár az egyetlen, a fizikai idővel kapcsolatban lévő tényező a T_s szorzó. Ezt a jelfeldolgozásban általában egységnyinek szokták tekinteni (aminek következményeképpen a felhasznált frekvenciatartomány 0 és 1 között helyezkedik el), és ezzel előttünk áll az immár időfüggetlen diszkrét Fourier-transzformáció (DFT):

$$X_k = \sum_{i=0}^{N-1} x_i e^{-j2\pi \frac{ki}{N}} \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

Végül, ha T_s egységnyi, akkor $\Delta f = 1/N$, és így az inverz DFT:

$$x_i = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{j2\pi \frac{ki}{N}}$$

DFT eredménye sztochasztikus jel esetén

A mintavételi tételek előző alakjai Fourier-transzformálható (tranziens, esetleg periodikus) jelekre vonatkoznak. Gyakran kell azonban sztochasztikus jeleket is feldolgoznunk. Az ezekre vonatkozó tétel bizonyítása körülményesebb, ezért itt csak kimondjuk:

Mintavételi tétel sztochasztikus jelekre

4. Tétel. Ha egy sztochasztikus folyamat teljesítménysűrűség-spektruma sávkorlátozott, azaz

$$S(f) = 0 \quad \text{ha} \quad |f| \geq B,$$

akkor

$$T_s \leq \frac{1}{2B}$$

közönként mintavételezve lényegében nem veszítünk információt, azaz az interpolációs formula négyzetes értelemben konvergál a folytonos időfüggvény értékeire:

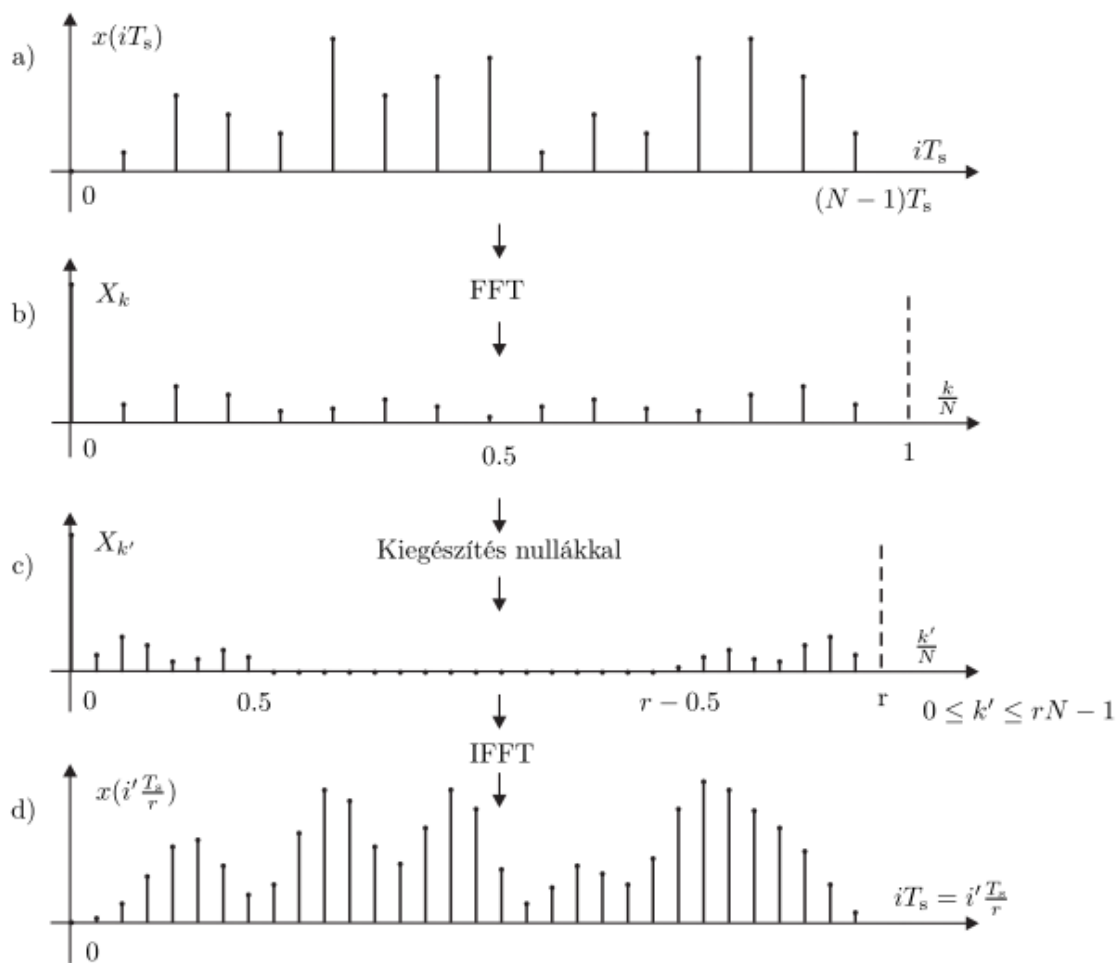
$$\lim_{M \rightarrow \infty} E \left\{ \left(x(t) - \sum_{i=-M}^M x(iT_s) \operatorname{sinc} \left(\pi \frac{t - iT_s}{T_s} \right) \right)^2 \right\} = 0$$

Megemlíjtük még, hogy a fenti feltétel az I. mintavételi tétel miatt a korrelációfüggvény ilyen mintákból való helyreállíthatóságát is közvetlenül biztosítja, hiszen ennél $X(f)$ szerepét $S(f)$ veszi át. A mintákból diszkrét pontokban kiszámítható korrelációértékekből tehát a folytonos korrelációfüggvény is megkapható.

Interpoláció FFT-vel

A mintavételi tétel betartása mellett, ha megnézzük az amplitúdó spektrum karakterisztikát, akkor a 0,5 frekvencia környékére szimmetrikusan nullákat beszúrva az időtartománybeli jel interpolált változatát fogjuk megkapni.

Először képezzük az N pontos FFT-t, majd kiegészítjük a jelet M db nullával a $0,5f_s$ környékén, ezután NM pontos IFFT-t számolunk. N pont esetén a frekvenciafelbontás $\Delta f_N = \frac{f_s}{N}$; akkor az interpolált jel frekvenciafelbontása $\Delta f_{NM} = \frac{f_s}{NM}$.



2.6. ábra. Interpoláció FFT segítségével a) az eredeti időfüggvény, b) a diszkrét Fourier-transzformált c) a spektrumok „széttolása”, vagyis $(r-1)N$ db nulla behelyezése után kapott eredmény d) az interpoláció eredménye

Sávkorlátozott jelek mintavétele

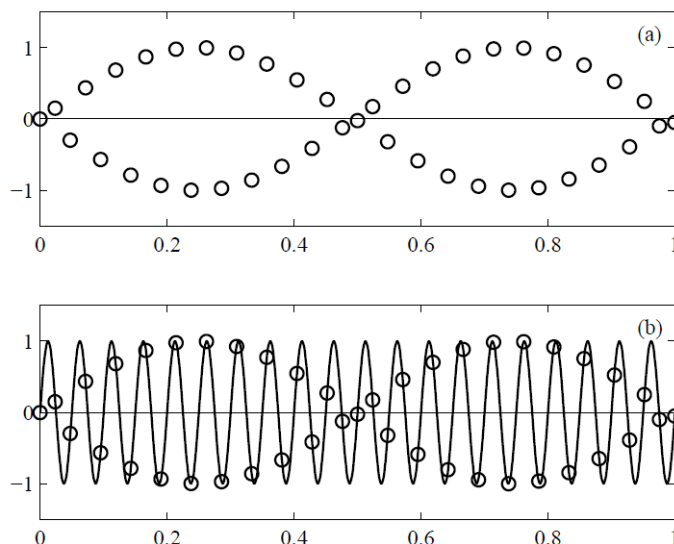
Az előzőekben ismertetett mintavételi tételek kimondásakor abból a hallgatólágos feltételezésből indultunk ki, hogy a jel spektruma „kitölti” a $(-B, B)$ frekvenciasávot, ezért itt semmiféle betranszformálódás nem engedhető meg. Ha azonban a jel spektruma nem ilyen, például csak egy ismert keskeny sávban különbözik nullától, akkor enyhébb feltételt is megfogalmazhatunk: elég azt biztosítani, hogy a számunkra fontos sávba ne transzformálódjon be teljesítmény.

f_s alkalmas megválasztásával $f_s \ll 2B$ is megengedhető lehet. Gondosan ügyelnünk kell azonban f_s helyes megválasztására: kis tévedés is elég lehet ahhoz, hogy a jel spektruma jelentősen torzuljon az esetleges betranszformálódás miatt.

Alul- és túlmintavételezés

A mintavételi tételt nem szabad mereven alkalmazni. Előfordulhatnak olyan mérési feladatok, amikor nem kell minden lehetséges információt kinyernünk az adott hosszúságú jelből, például ritkább mintavételezéssel is elegendő számú mintánk van megfelelően kicsi varianciájú átlagérték képzéséhez. Mi több, a ritka mintavételezéssel nyert értékek egymástól statisztikailag függetlenek is, ami az eredmény statisztikai jellemzését egyszerűsíti.

Másrészről, ha az időfüggvény vizsgálatát kell elvégeznünk, például a vizuális kiértékelésnél, általában nem elegendő a mintavételi tétel egyszerű teljesítése (2.8. ábra). Annak ellenére, hogy az ábrán látható pontsorozat elvben minden információt tartalmaz, a periódusonként alig valamivel több, mint 2 mintából a szinusz szabad szemmel nem ismerhető fel. Utólagos interpoláció helyett ilyenkor célszerűbb a sűrűbb mintavételezés, $f_s \gg 2B$ frekvenciával. Tegyük még azt is hozzá, hogy ha csonkított regisztrátumunk van (például sztochasztikus jelből), akkor a csonka



2.8. ábra. A túlmintavételezés szükségességének illusztrációja

regisztrátum sávszélessége a levágás miatt jóval nagyobb a teljes (végtelen hosszúságú) jel sávszélességénél, és ezért a teljes jel kisebb sávszélessége alapján mintavételezve a helyreállítás hibája nagy lesz a regisztrátum széle környékén.

Megemlíjtük, hogy ide tartozik az ún. ekvivalens mintavételezés. Periodikus jeleknél a mintákat vehetjük eltérő periódusokból, kicsit eltolt fázishelyzetben: ha az időzítés pontos, ezekből a mintákból az oszcilloszkóp meg tudja jeleníteni a teljes periódust, annak ellenére, hogy a szigorúan vett mintavételi tételt nem tartjuk be.

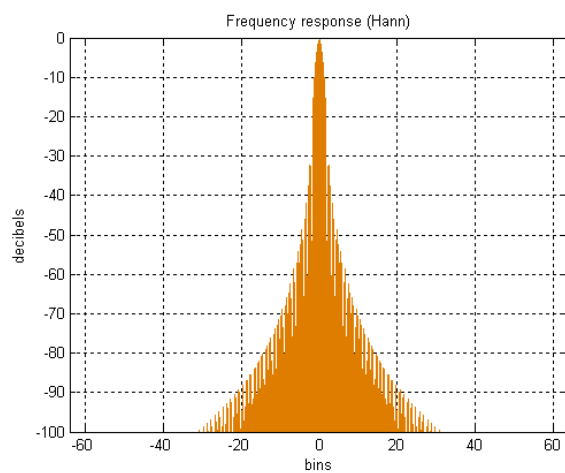
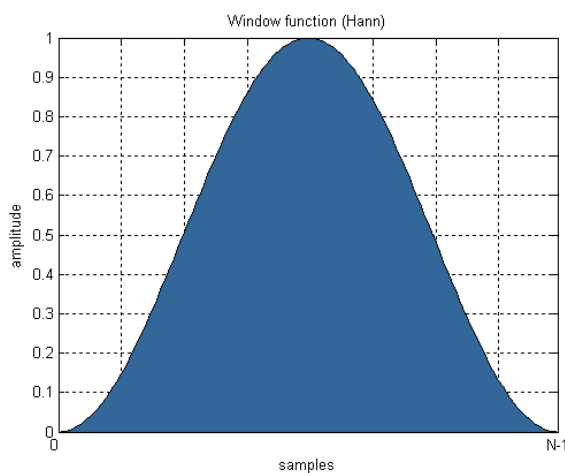
Ablak függvények

Hann (Hanning) ablak

$$w(n) = 0,5 \left(1 - \cos \left(\frac{2\pi n}{N-1} \right) \right)$$

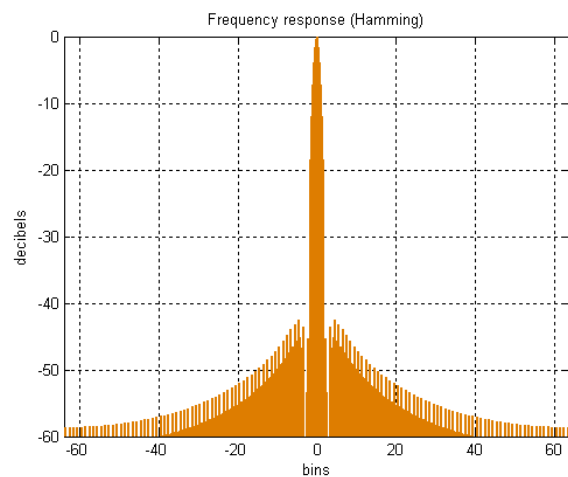
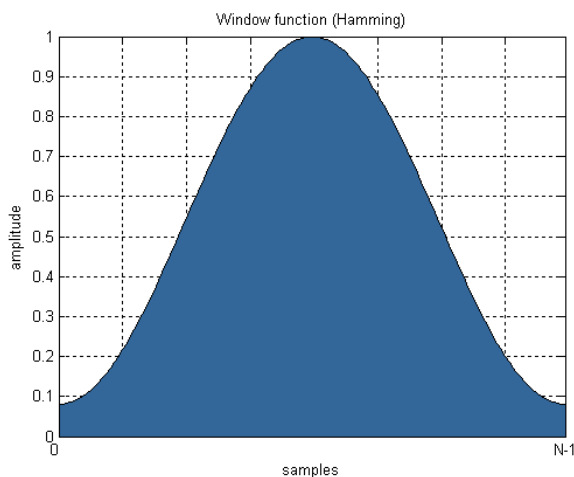
A Hann és a Hamming ablakok az ún. “emelt koszinuszos” ablakok családjába tartoznak.

A széleken odasimul az időtengelyhez, az oldalhullámok csökkenése -60 dB/dekád.



Hamming ablak

$$w(n) = 0,54 - 0,46 \cos \left(\frac{2\pi n}{N-1} \right)$$

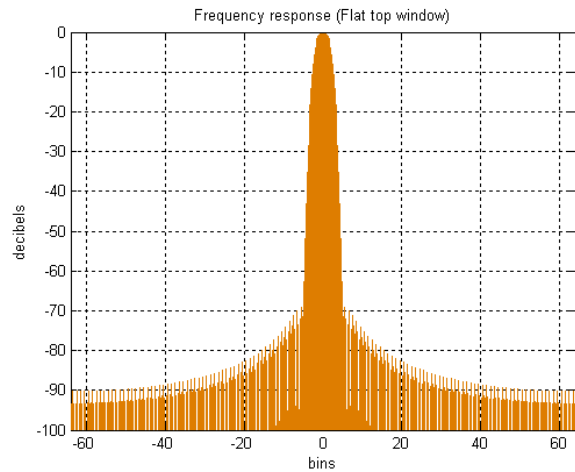
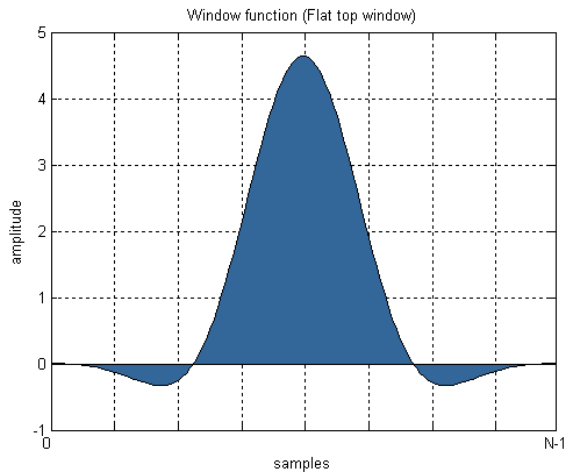


A csúcshoz legközelebbi oldalhullámot jól elnyomja, viszont az időfüggvény szélein ugrása van és ezért az oldalhullámok csak -20 dB/dekádval csökkennek asszimptotikusan.

Flat top (lapos tetejű) ablak

$$w(n) = a_0 - a_1 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) + a_2 \cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right) - a_3 \cos\left(\frac{6\pi n}{N-1}\right) + a_4 \cos\left(\frac{8\pi n}{N-1}\right)$$

ahol $a_0 = 1$; $a_1 = 1,93$; $a_2 = 1,29$; $a_3 = 0,388$; $a_4 = 0,032$



Előnye, hogy csökkenti a picket fence (léckerítés) hatást, azaz a spektrumból a maximum értéket leolvasva kis hibával meghatározható a szinusz nagysága.

FIR realizáció

A FIR szűrés alapvetően egy konvolúció végrehajtása. A különböző FIR tervező eljárások célja a konstans szorzók meghatározása, mely tulajdonképpen a szűrő impulzusválasza.

FIR szűrő tervezése az átviteli függvény mintavételezésével

1. A specifikáció megadása vektorban. A frekvencia mintavételezés továbbfejlesztése. Ismert a $H(f)$, ezt mintavételezzük N pontban, ahol N sokkal nagyobb, mint a szűrő fókuszuma.
2. IDFT-vel megkapjuk a prototípus szűrő impulzusválaszát. Ez valós és szimmetrikus 0-ra.
3. Zérus időpillanatra szimmetrikusan el is toljuk. A szűrő karakterisztikája már nem valós, de lineáris a fázismenete, mert csak az eltolás hoz képzetes tagot.
4. Gibbs-oszcilláció miatt a levágási pontoknál korrigálni kell (még nagy M -ek esetén is). $h_0(k) = h(k) \cdot w(k)$ ablakozás, pl.: Hanning. Ezután DFT $\{h_0(k)\}$, hogy valóban az előírt karakterisztikát valósítja-e meg.

Remez-algoritmus

Sokszor optimálisabb a hiba maximumát minimalizáló iteratív Remez algoritmus. Ez az IIR tervezésénél is használt Csebishev approximáció. Egyenletes ingadozású, lineáris fázisú FIR szűrő tervezhető vele.