Kalkulus kilencedik feladatsor

Komplex számok

1. Határozza meg a $\dfrac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$ komplex szám algebrai alakját, ha $z_1 = 3 - 2i$ és $z_2 = 2 + i$!

   Ha $z_1 = 3 - 2i$ és $z_2 = 2 + i$, akkor

$$\frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2} = \frac{3+2i}{2-i} = \frac{(3+2i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{6+3i+4i-2}{5} = \frac{4}{5} + \frac{7}{5}i$$

2. Hozza algebrai alakra az alábbi kifejezéseket!

   a, $3\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

   b, $\dfrac{2+i}{i(1-4i)}$

   Megoldások: a) $3\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right) = 3\left(-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\dfrac{3}{2} + \dfrac{3\sqrt{3}}{2}i,$

   b) $\dfrac{2+i}{i(1-4i)} = \dfrac{2+i}{4+i} = \dfrac{(2+i)(4-i)}{(4+i)(4-i)} = \dfrac{8+4i-2i+1}{17} = \dfrac{9}{17} + \dfrac{2}{17}i.$

3. Írjuk fel a következő számok trigonometrikus alakját!

   a, $\sqrt{6} - 2i\sqrt{2}$

   b, -4i

   c, 8

   Megoldások: a) $\sqrt{6} - \sqrt{2}i = \sqrt{6+2}\left(\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{8}} - \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}}i\right) = \sqrt{8}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i\right) = \sqrt{8}\left(\cos\dfrac{11\pi}{6} + i\sin\dfrac{11\pi}{6}\right)$

   b) $-4i = 4\left(\cos\dfrac{3\pi}{2} + i\sin\dfrac{3\pi}{2}\right)$, *c)* $8 = 8(\cos 0 + i\sin 0)$.

4. Végezzük el a következő gyökvonásokat!

   a, $\sqrt[3]{1}$

   b, $\sqrt[4]{-16}$

   c, $\sqrt[3]{1+i\sqrt{3}}$

   Megoldások: a) $1 = \cos 0 + i\sin 0$*, tehát a 3 harmadik gyök*

$$\cos 0 + i\sin 0 = 1, \qquad \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

b) $-16 = 16(\cos\pi + i\sin\pi)$ *és* $\sqrt[4]{16} = 2$, *tehát a 4 negyedik gyök:*

$$2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} + \sqrt{2}i, \qquad 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i,$$

$$2\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i, \quad 2\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right) = \sqrt{2} - \sqrt{2}i.$$

c) $1 + i\sqrt{3} = \sqrt{1+3}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$, *tehát a harmadik gyökök:*

$$\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9}\right), \quad \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{9} + i\sin\frac{7\pi}{9}\right), \quad \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{13\pi}{9} + i\sin\frac{13\pi}{9}\right).$$

5. Végezzük el a következő hatványozásokat!

   a, $(1 + i\sqrt{3})^3$
   b, $(1 + i)^8$
   c, $(1 - i)^4$

   Megoldások: a) $(1 + i\sqrt{3})^3 = \left(2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right)^3 = 8(\cos\pi + i\sin\pi) = -8.$
   b) $1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, *így* $(1+i)^8 = (\sqrt{2})^8\left(\cos\frac{8\pi}{4} + i\sin\frac{8\pi}{4}\right) = 16.$
   c) $1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$, *így* $(1-i)^4 = (\sqrt{2})^4(\cos 7\pi + i\sin 7\pi) = -4.$

6. Oldjuk meg a komplex számok halmazán a $z^2 + 6z + 10 = 0$ másodfokú egyenletet!
   A megoldáshoz helyettesítsünk be a másodfokú egyenlet megoldóképletébe: $\frac{-6 \pm \sqrt{36-40}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{-4}}{2} = -3 \pm \sqrt{-1} = -3 \pm i.$

7. Oldjuk meg a komplex számok halmazán az alábbi egyenleteket!

   a, $z^3 = 1 + i$
   b, $|z| - z = 1 + 2i$
   c, $z^2 = \overline{z}$
   d, $2iz^3 = (1 + i)^8$
   e, $\frac{7i+3}{7-3i}z^4 + 8(\sqrt{3} + i) = 0$

   Megoldások: a) $z^3 = 1 + i$ *egyenlet megoldásai* $1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ *harmadik gyökei, vagyis*

$$\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right), \quad \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right), \quad \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12} + i\sin\frac{17\pi}{12}\right).$$

   b) $z = a + bi$ *algebrai alakból az* $\sqrt{a^2 + b^2} - a - bi = 1 + 2i$ *egyenletet kapjuk. A két oldal képzetes része megegyezik, vagyis* $b = -2$. *Emiatt a valós részekre* $\sqrt{a^2 + 4} - a = 1$ *adódik, vagyis* $a^2 + 4 = a^2 + 2a + 1$, *így* $a = \frac{3}{2}$, *vagyis a megoldás* $z = \frac{3}{2} - 2i$.
   c) $z = a + bi$ *algebrai alakból* $a^2 - b^2 + 2abi = a - bi$, *vagyis* $2ab = -b$, *tehát* $b = 0$ *vagy* $a =$

$-\frac{1}{2}$. *Ha* $b=0$, *akkor* $a^2=a$, *tehát* $a=0$ *vagy* $a=1$. *Ha* $a=-\frac{1}{2}$, *akkor a valós részekre az* $\frac{1}{4}-b^2=-\frac{1}{2}$ *adódik, így* $b=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. *Az egyenlet megoldásai:* $0, 1, -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

d) $(1+i)^8=16$, *tehát* $iz^3=8$, *így* $z^3=-8i=8\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$, *vagyis a megoldások a harmadik gyökök:*

$$2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=2i,$$
$$2\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)=\sqrt{3}+i,$$
$$2\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)=\sqrt{3}-i.$$

e) $\frac{7i+3}{7-3i}=\frac{i(7-3i)}{7-3i}=i$, *vagyis* $iz^4=-8(\sqrt{3}+i)$, *tehát*

$$z^4=8(\sqrt{3}i-1)=8\cdot 2\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2^4\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right),$$

így a megoldások:

$$2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}+i,\qquad 2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)=-1+\sqrt{3}i$$

$$2\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)=-\sqrt{3}-i,\quad 2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)=1-\sqrt{3}i$$