**ANALÍZIS 1.** | **I. PÓTZÁRTHELYI** | **2015. november 2.**
Mérnök informatikus szak | $\alpha$-variáns | Munkaidő: 50 perc

---

**1. feladat (4+8 pont)**
Adja meg az alábbi egyenletek megoldásait algebrai alakban:

$$a)\ z^2 - 3iz + 4 = 0, \qquad\qquad -iz^3 = 64.$$

---

a) $z_{1,2} \overset{\mathbf{2p}}{=} \dfrac{3i + \sqrt{-9-16}}{2} \overset{\mathbf{2p}}{=} \left(\dfrac{3}{2} \pm \dfrac{5}{2}\right) i$

b) $-i$-vel átosztva $z^3 \overset{\mathbf{1p}}{=} 64i \overset{\mathbf{1p}}{=} 64\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$ , vagyis
$z_1 \overset{\mathbf{1p}}{=} 4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) \overset{\mathbf{1p}}{=} 2\sqrt{3} + 2i$, $z_2 \overset{\mathbf{1p}}{=} 4\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) \overset{\mathbf{1p}}{=} -2\sqrt{3} + 2i$,
$z_3 \overset{\mathbf{1p}}{=} 4\left(\cos\frac{9\pi}{6} + i\sin\frac{9\pi}{6}\right) \overset{\mathbf{1p}}{=} -4i$.

---

---

**2. feladat (7 pont)**
A definíció alapján bizonyítsa be, hogy

$$\frac{2n^2 + 5n}{n^2 + 2} \to 2.$$

---

Legyen $\varepsilon > 0$, olyan $N(\varepsilon)$ küszöbindexet keresünk, hogy $n \geq N(\varepsilon)$ esetén $\left|\dfrac{5n^2+2}{n^2+5n} - 5\right| < \varepsilon$ teljesüljön (**2p**). Ehhez elég, ha

$$\left|\frac{2n^2+5n}{n^2+2} - 2\right| = \left|\frac{2n^2+5n-2n^2-4}{n^2+2}\right| = \frac{5n-4}{n^2+2} \leq \frac{5n}{n^2} = \frac{5}{n} < \varepsilon, \qquad (\mathbf{3p})$$

vagyis $N(\varepsilon) = \left[\frac{5}{\varepsilon}\right] + 1$ jó lesz (sőt, $N(\varepsilon) = \frac{5}{\varepsilon}$ is, ha nem követeljük meg, hogy a küszöbindex egész legyen) (**2p**).

---

---

**3. feladat (5+5 pont)**
Határozza meg a következő sorozatok határértékét:

$$a_n = \sqrt{n^3 - n^2 + 2} - \sqrt{n^3 + 2n^2 - 3n}, \qquad\qquad b_n = \cos(n^4 - 1)\frac{2^{3n-1} + 6^n}{n^9 + 3^{2n+1}}.$$

$$a_n = \sqrt{n^3 - n^2 + 2} - \sqrt{n^3 + 2n^2 - 3n} \overset{\mathbf{1p}}{=} \frac{n^3 - n^2 + 2 - (n^3 + 2n^2 - 3n)}{\sqrt{n^3 - n^2 + 2} + \sqrt{n^3 + 2n^2 - 3n}} \overset{\mathbf{1p}}{=}$$

$$= \frac{-3n^2 + 3n + 2}{\sqrt{n^3 - n^2 + 2} + \sqrt{n^3 + 2n^2 - 3n}} \overset{\mathbf{1p}}{=} \frac{n^2}{\sqrt{n^3}} \frac{-3 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}}{\sqrt{1 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^3}} + \sqrt{1 + \frac{2}{n} - \frac{3}{n^2}}}$$

vagyis $a_n \to -\infty$ (**2p**)

$$\frac{2^{3n-1} + 6^n}{n^9 + 3^{2n+1}} \overset{\mathbf{2p}}{=} \frac{8^n}{9^n} \cdot \frac{\frac{1}{2} + \left(\frac{6}{8}\right)^n}{\frac{n^9}{9^n} + 3} \overset{\mathbf{1p}}{\to} 0,$$

és $\cos(n^4 - 1)$ korlátos (**1p**), vagyis $b_n \to 0$ (**1p**).

---

---

**4. feladat (11 pont)**

Legyen $a_1 = 5$, és $a_{n+1} = \dfrac{24}{10 - a_n}$

a) Igazolja, hogy a $4 \leq a_n \leq 6$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén.

b) Igazolja, hogy a sorozat monoton.

c) Konvergens-e az $(a_n)$ sorozat, és ha igen, mi a határértéke?

---

Ha a sorozat konvergens, $A$ határtéke kielégíti az $A = \dfrac{24}{10 - A}$, vagyis az $A^2 - 10A + 24 = 0$ egyenletet. Ennek megoldásai $A = 4$ és $A = 6$. (**2p**)

a) Teljes indukcióval igazoljuk.

   i) $4 \leq a_1 = 5 \leq 6$. (**1p**)

   ii) $4 \leq a_n \leq 6 \Longrightarrow 6 \geq 10 - a_n \leq 4 \Longrightarrow 4 \leq \dfrac{24}{10 - a_n} = a_{n+1} \leq 6$. (**2p**)

b) $a_2 = \frac{24}{10-5} = \frac{24}{5} \leq 5 = a_1$. Sejtés: a sorozat monoton fogyó.Teljes indukcióval igazoljuk.

   i) $5 = a_1 \geq a_2 = \dfrac{24}{5}$. (**1p**)

ii) $a_n \geq a_{n+1} \implies 10 - a_n \leq 10 - a_{n+1} \implies \frac{1}{10-a_n} \leq \frac{1}{10-a_{n+1}} \implies a_{n+1} = \frac{24}{10-a_n} \leq \frac{24}{10-a_{n+1}} = a_{n+2}$. (**2p**)

c) Mivel a sorozat monoton fogyó, és alulról korlátos, így konvergens, (**2p**) és határértéke a legnagyobb alsó korlátja, ami csak $A = 4$ lehet. (**1p**)

---

---

**5. feladat (5+5 pont)**
Határozza meg az alábbi sorozatok torlódási pontjainak halmazát, limesz szuperiorját és limesz inferiorját.

$$a_n = \sqrt[n]{7^n + (-5)^n + n^2}, \qquad b_n = \sqrt[n]{7^n + (-7)^n + n^2}.$$

Konvergensek-e a sorozatok?

---

$$7 \leftarrow 7\sqrt[n]{\frac{1}{2}} = \sqrt[n]{7^n - \frac{7^n}{2}} \overset{n\geq 3}{\leq} a_n \leq \sqrt[n]{3} \cdot 7^n = 7\sqrt[n]{3} \to 7, \qquad (\mathbf{3p})$$

vagyis $(a_n)$ konvergens $\lim a_n = 7 = \limsup a_n = \liminf a_n$, és $S = \{7\}$. (**2p**) Páros $n$ esetén $7 \leftarrow 7\sqrt[n]{2} = \sqrt[n]{2 \cdot 7^n} \leq b_n \leq \sqrt[n]{3 \cdot 7^n} = 7\sqrt[n]{3} \to 7$ (**2p**), páratlan $n$ esetén pedig $b_n = \sqrt[n]{n^2} = (\sqrt[n]{n})^2 \to 1$ (**1p**), vagyis $S = \{1, 7\}$, $\limsup b_n = 7 \neq 1 = \liminf b_n$, vagyis a sorozat divergens(**2p**).