Megoldás

1. feladat 24 pont

(a) $\dfrac{(3+\imath)\cdot(2+\imath)}{(6+2\imath)\cdot(2-\imath)}$ =? (Az eredményt algebrai alakban adja meg!)

(b) $\dfrac{2\cdot(3+\imath)+(1-5\imath)}{(7-3\imath)}$ =? (Az eredményt algebrai alakban adja meg!)

(c) Adja meg a $z^8 = 8z^2$ egyenlet komplex megoldásait! Adja meg egy nem valós megoldás valós és képzetes részét!

Megoldás:

(a) $\dfrac{(3+\imath)\cdot(2+\imath)}{(6+2\imath)\cdot(2-\imath)} = \dfrac{\cancel{(3+\imath)}\cdot(2+\imath)}{2\cdot\cancel{(3+\imath)}\cdot(2-\imath)} = \dfrac{(2+\imath)^2}{2\cdot(2-\imath)\cdot(2+\imath)} = \dfrac{4+4\imath-1}{10} = \dfrac{3}{10} + \dfrac{2}{5}\imath$ $\boxed{\textbf{10p.}}$

(b) $\dfrac{2\cdot(3+\imath)+(1-5\imath)}{(7-3\imath)} = \dfrac{7-3\imath}{7-3\imath} = 1$ $\boxed{\textbf{4p.}}$

(c) $z^8 - 8z^2 = z^2(z^6-8)$ gyökei $z_k = \sqrt[6]{8} = \sqrt{2}(\cos(k\cdot 60°) + \imath\sin(k\cdot 60°))$, ahol $k = 0,1,2,3,4,5$ és $z_{6,7} = 0$.

Nem valósak valós és képzetes része (csak egy kell):

$\operatorname{Re} z_1 = \sqrt{2}\cos 60° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ és $\operatorname{Im} z_1 = \sqrt{2}\sin 60° = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$

$\operatorname{Re} z_2 = \sqrt{2}\cos 120° = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ és $\operatorname{Im} z_2 = \sqrt{2}\sin 120° = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$

$\operatorname{Re} z_4 = \sqrt{2}\cos 240° = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ és $\operatorname{Im} z_4 = \sqrt{2}\sin 240° = -\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

$\operatorname{Re} z_5 = \sqrt{2}\cos 300° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ és $\operatorname{Im} z_5 = \sqrt{2}\sin 300° = -\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ $\boxed{\textbf{10p.}}$

2. feladat **39 pont**

Határozza meg az

- $a_n = \left(\dfrac{n^2+3n}{n^2+3}\right)^{n^2}$;
- $b_n = \dfrac{n+\sqrt{n}+\sqrt[n]{n}}{3n+\sin(3n)}$;
- $c_n = \sqrt[n]{2^n + 3^{(-1)^n \cdot n}}$;

sorozatok határértékét, ha léteznek!

Megoldás:

- $a_n = \dfrac{\left(1+\dfrac{3}{n}\right)^{n^2}}{\left(1+\dfrac{3}{n^2}\right)^{n^2}} \geq \dfrac{\left(\left(1+\dfrac{3}{n}\right)^{n}\right)^{n}}{\mathrm{e}^3} \geq \dfrac{4^n}{\mathrm{e}^3} \to \infty$, így a speciális rendőrelv miatt $a_n \to \infty$ $\boxed{\textbf{15p.}}$

- $b_n = \dfrac{1+\overbrace{\dfrac{1}{\sqrt{n}}}^{\to 0}+\overbrace{\dfrac{\sqrt[n]{n}}{n}}^{\to 0}}{3+\underbrace{\sin(3n)}_{\text{korl}}\cdot\underbrace{\dfrac{1}{n}}_{\to 0}} = \dfrac{1}{3}$ $\boxed{\textbf{11p.}}$

- Ha n páros, akkor $3 = \sqrt[n]{3^n} \leq c_n = \sqrt[n]{2^n+3^n} \leq \sqrt[n]{3^n+3^n} = \sqrt[n]{2}\cdot 3 \to 3$, így $c_n \to 3$

  Ha n páratlan, akkor $2 = \sqrt[n]{2^n} \leq c_n = \sqrt[n]{2^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n} \leq \sqrt[n]{2^n+2^n} = \sqrt[n]{2}\cdot 2 \to 2$, így $c_n \to 2$

  c_n-nek van 2 torlódási pontja, így nincs határértéke. $\boxed{\textbf{13p.}}$

3. feladat **13 pont**

Legyen $d_1 = 2$ és $d_{n+1} = 7 - \frac{6}{d_n}$ minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén.

Mutassa meg, hogy d_n monoton növő, és korlátos. Adja meg d_n határértékét, ha létezik!

Megoldás:

(a) Teljes indukcióval megmutatjuk, hogy $1 \le d_n \le 6$ minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén.

Mivel $d_1 = 2$, ezért $n = 1$-re az állítás teljesül.

Ha valamilyen n-re teljesül, azaz $1 \le d_n \le 6$, akkor $\frac{1}{6} \le \frac{1}{d_n} \le 1$, így $1 \le \frac{6}{d_n} \le 6$, és ezért $1 \le 7 - \frac{6}{d_n} = d_{n+1} \le 6$.

Teljes indukcióval megmutatjuk, hogy d_n monoton növő, azaz $d_n \le d_{n+1}$ minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén.

Mivel $d_2 = 4$, ezért $n = 1$-re az állítás teljesül.

Ha valamilyen n-re teljesül, azaz $d_n \le d_{n+1}$, akkor mivel d_n pozitív, ezért $\frac{1}{d_n} \ge \frac{1}{d_{n+1}}$ és így $d_{n+1} = 7 - \frac{6}{d_n} \le 7 - \frac{6}{d_{n+1}} = d_{n+2}$, vagyis $n+1$-re is teljesül az egyenlőtlenség.

Mivel a sorozat korlátos és monoton, ezért konvergens, határértéke a rekurzió valamelyik fixpontja.

Az $A = 7 - \frac{6}{A}$ megoldásai $A = 1$ és $A = 6$. Mivel d_n monoton növő, a határérték felső korlát is, így nem lehet 1. Tehát $\lim d_n = 6$. $\boxed{\textbf{13p.}}$

4. feladat **24 pont**

Határozza meg az

$$f(x) = \frac{\sin(x^2 - 4)}{x^2 - 2x}$$

függvény alábbi határértékeit, ha léteznek!

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$;
- $\lim\limits_{x\to-2} f(x)$;
- $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$;
- $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$;

Megoldás:

- $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \underbrace{\sin(x^2-4)}_{\text{korl.}} \cdot \underbrace{\frac{1}{x^2-2x}}_{\to 0} = 0 \; \boxed{\textbf{5p.}}$$
- $$\lim_{x\to-2} f(x) = \frac{\sin(0)}{8} = 0 \; \boxed{\textbf{3p.}}$$
- $$\lim_{x\to 0\pm} f(x) = \lim_{x\to 0\pm} \frac{\sin(\overbrace{x^2-4}^{\to -4})}{\underbrace{x^2-2x}_{\to 0\mp}} = \mp\infty, \text{ így } \nexists \lim_{x\to 0} f(x). \; \boxed{\textbf{8p.}}$$
- $$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \underbrace{\frac{\sin(x^2-4)}{x^2-4}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}x}}_{\to \frac{4}{2}} = 2 \; \boxed{\textbf{8p.}}$$

5. IMSC **feladat** **8 pont**

Adja meg az

$$x_n = \sqrt[n^2]{(2n+1)! - (2n)!}$$

sorozat határértékét, ha létezik!

Megoldás:

$$1 \leq x_n = \sqrt[n^2]{2n \cdot (2n)!} = \leq \sqrt[n]{\sqrt[n]{2} \cdot \sqrt[n]{n}} \cdot \sqrt[n]{\sqrt[n]{(2n)^{2n}}} \leq$$

$$\leq \sqrt[n]{2 \cdot 2} \cdot \sqrt[n]{4n^2} = \sqrt[n]{4} \cdot \sqrt[n]{4} \cdot \left(\sqrt[n]{n}\right)^2 \to 1$$

A rendőrelv miatt $x_n \to 1$.