Valószínűségszámítás vizsga
Műszaki informatikus BSc
2015. június 10.

1. Véletlenszerűen kiválasztunk 10 pontot az egységnégyzeten. Jelölje X a közülük az origóhoz legközelebbi pont távolságát. $\mathbf{P}\left(X < \frac{1}{2}\right) =?$
   Megoldás: Jelölje az i-edik kiválasztott pont origótól vett távolságát Z_i. $X = \min\limits_{i=1,...,10} Z_i$.
   $F_{Z_i}(t) = \mathbf{P}(Z_i < t) = \frac{t^2\pi}{4}$, ha $0 < t < 1$. $\mathbf{P}\left(X < \frac{1}{2}\right) = 1 - \mathbf{P}\left(Z_1 \geq \frac{1}{2}, ..., Z_{10} \geq \frac{1}{2}\right) = 1 - \left(1 - F_{Z_i}\left(\frac{1}{2}\right)\right)^{10} = 1 - \left(1 - \frac{\pi}{16}\right)^{10} = 0.887\,62$

2. Legyen $X \in U(0,1)$ és $Y = X^3 - 1$. Számolja ki Y eloszlásfüggvényét és várható értékét!
   .*Megoldás*: $F_Y(t) = \mathbf{P}(Y < t) = \mathbf{P}\left(X < \sqrt[3]{t+1}\right) = F_X\left(\sqrt[3]{t+1}\right) = \sqrt[3]{t+1}, t \in (-1, 0)$.
   $F_Y(t) = 0$, ha $t \leq -1$ és $F_Y(t) = 1$, ha $t \geq 0$.
   $\mathbf{E}Y = \mathbf{E}X^3 - 1 = \int\limits_0^1 t^3 \,\mathrm{d}\, t - 1 = -\frac{3}{4}$.

3. Legyenek $X, Y \in N(0,1)$ függetlenek, $Z = 2X - 3Y$. Számolja ki $\mathbf{E}(Z \mid X)$ és $\mathbf{E}(Z \mid Y)$ korrelációs együtthatóját!
   Megoldás: Mivel $\mathbf{E}(Z \mid X) = \mathbf{E}(2X - 3Y \mid X) = 2X$ és $\mathbf{E}(Z \mid Y) = \mathbf{E}(2X - 3Y \mid Y) = -3Y$, így a keresett korrelációs együttható $\mathrm{R}(2X, -3Y) = 0$, mivel X és Y függetlenek.

4. Három dobókockával dobunk. Legyen X a dobott egyesek száma, Y a páratlan dobások száma. Ekkor adja meg X és Y eloszlását és a $\mathbf{P}(X = 1, Y = 2)$ eloszlásértéket. Függetlenek-e X és Y?
   Megoldás: $X \in B\left(3, \frac{1}{6}\right)$ és $Y \in B\left(3, \frac{1}{2}\right)$.
   $\mathbf{P}(X = 1, Y = 2) = \frac{3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3}{216} = \frac{36}{216} = \frac{1}{6}$.
   X és Y nem függetlenek, mert pl. $\mathbf{P}(X = 1, Y = 2) \neq \mathbf{P}(X = 1) \cdot \mathbf{P}(Y = 2) = \frac{75}{216} \cdot \frac{3}{8}$

5. Legyen $X \in N(8, 3)$. Fejezze ki a $\mathbf{P}(2 < X < 17)$ valószínűséget, a standard normális eloszlásfüggvény, Φ segítségével.
   Megoldás: A keresett valószínűség: $\mathbf{P}(2 < X < 17) = F_X(17) - F_X(2) = \Phi\left(\frac{17-8}{3}\right) - \Phi\left(\frac{2-8}{3}\right) = \Phi(3) - \Phi(-2) = \Phi(3) + \Phi(2) - 1$.

6. Ismertesse az egymintás u-próbát! Mik a feltételei az alkalmazhatóságának, mi a nullhipotézis, amiről döntünk? Mi a próbastatisztika?
   Megoldás: Adott egy normális eloszlású minta, aminek ismert a szórása (σ_0). Arról a nullhipotézisről döntünk, hogy a minta várható értéke egy adottt m_0 hipotetikus érték-e. A próbastatisztika

$$u_n = \frac{\bar{x}_n - m_0}{\sigma_0}\sqrt{n}$$

, ahol σ_0 az ismert szórás, n a mintaelemszám.