

A számítástudomány alapjai

I. Zárthelyi

2007. október 15.

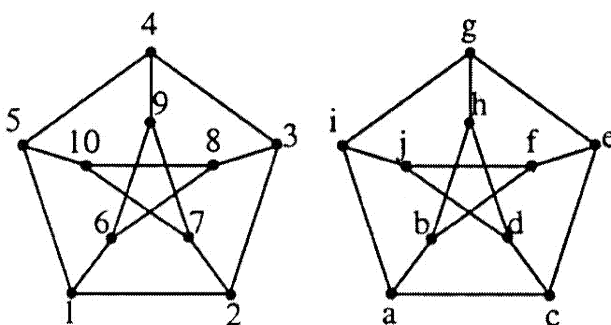
1. Bizonyítsa be, hogy tetszőleges 100 egész szám közül kiválasztható kettő úgy, hogy a különbségük osztható legyen 99-el!

2. Bizonyítsa be, hogy

$$\binom{2n}{n+1} + \binom{2n}{n} = \frac{1}{2} \binom{2n+2}{n+1}$$

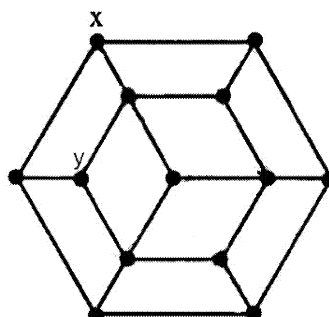
teljesül minden $n \geq 1$ egész számra!

3. Adjon olyan egy-egy értelmű megfeleltetést az alábbi két gráf pontjai között, ami éltartó és az 1-es ponthoz az a pontot, a 2-es ponthoz pedig a b pontot rendeli:

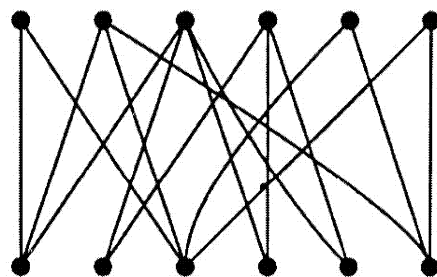
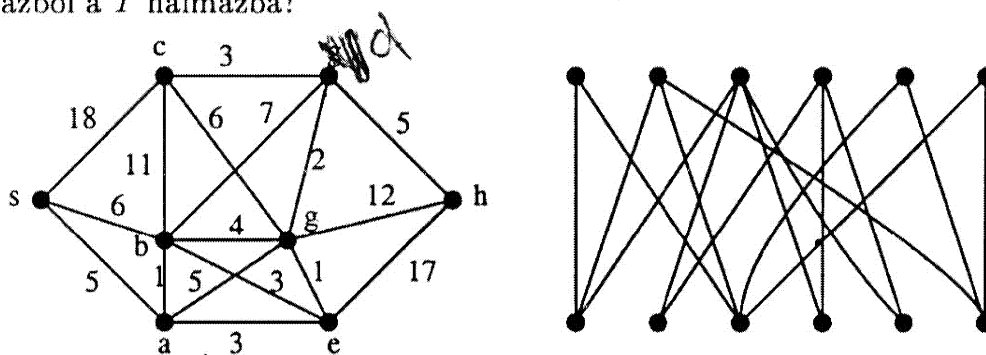


4. Bizonyítsuk be, hogy a következő gráfban nincs Hamilton kör!

b) Ha behúzzuk még az x és y közötti élet is a gráfba, akkor lesz Hamilton kör?



5. Határozza meg a legrövidebb út hosszát az s pontból az összes többi pontba Dijkstra algoritmusa segítségével az alábbi baloldali gráfban! Milyen sorrendben kerültek át a pontok az S halmazból a T halmazba?



6. Mekkora a maximális párosítás mérete a fenti jobboldali gráfban? Indokolja is meg állítását!

7. Egy 2007 pontú összefüggő, egyszerű gráf minden pontja 100-adfokú. Bizonyítsa be, hogy élhalmaza felbontható 2007 db éldiszjunkt 50 élű csillag egyesítésére!

8. Van-e olyan 1000 pontú gráf, melynek pontosan 13 feszítőfája van? (Feltehetjük, hogy a gráf pontjai meg vannak számozva, és két feszítőfát különbözőnek tekintünk, ha az egyikben össze van kötve valamely két pont, ami a másikban nincs.)