

AZ ELEKTROMOS POTENCIÁL

*Egyik elektron azt mondja a másiknak:
Most, hogy együtt vagyunk, elértük legmagasabb potenciálunkat.*

26.1 Bevezetés

Az energia fogalma annyira fontos a fizikában, hogy célszerű megvizsgálunk az elektromos erők és töltések közötti kölcsönhatások energiaviszonyait. A mechanikai problémák tárgyalásánál az energiamegmaradás és a munkatétel kínált új lehetőségeket a problémák megoldására: Ahelyett, hogy erőkkel (tehát vektormennyiségekkel) számolnánk, skaláris mennyiségeket: mechanikai energiákat használhatunk. Skalár mennyiségekkel rendszerint sokkal egyszerűbb számolni, mint vektorokkal. A gravitációs és elektromos erők között közeli analógia van: mindkettő a távolság négyzetével fordítottan arányos konzervatív erő, és mindegyik konzervatív erőterhez hozzátartozik egy *potenciális energia függvény*, amely a kölcsönhatások elemzésekor fontos szerepet játszik.

26.2 Az elektromos potenciál

Tekintsünk egy \mathbf{E} térerősségű elektromos erőterbe helyezett q elemi töltést. Ahhoz, hogy az $\mathbf{F} = q_0\mathbf{E}$ elektromos erő elemi $d\mathbf{l}$ távolságra mozdítsa el a töltést

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = q_0\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (26-1)$$

munkavégzés szükséges. Definíció szerint, a konzervatív erő által végzett munka ellentétes előjellel egyenlő az elektromos potenciális energia, dU , megváltozásával, vagyis

$$dU = -q_0\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (26-2)$$

Az a pontból a véges távolságban lévő b pontba történő elmozdításkor tehát az

$$\text{ELEKTROMOS POTENCIÁLIS ENERGIA, } U: \quad U_b - U_a = -\int_a^b q_0\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (26-3)$$

Az energia SI egysége 1 joule (J). Vegyük tekintetbe, hogy a (26-3) egyenlet jobb oldala szintén energia egységekben van megadva, minthogy $q_0E dl$ egysége szintén $1(C)(N/C)(m) = Nm = J$. Hasonlóan, mint ahogyan a gravitációs potenciális energia tárgyalásakor tettük, bármely alkalmas pontot választhat-

26-1. TÁBLÁZAT
Elektromos potenciálkülönbségek
típusos értékei

30 mV	Időpályán végzett futó impulzusok
1,2 V	Ceruzacellák feszültsége
12 V	Autóakkumulátorok feszültsége
220 V	Háztartási elektromos hálózati feszültsége
600 V	Angolias feszültség-impulzusok
26-1. tábla	Országos elektromos hálózati feszültsége
220 kV	Villámok közötti potenciálkülönbségek
2×10^6 V	Villámok közötti potenciálkülönbségek
$10^8 - 10^9$ V	Villámok közötti potenciálkülönbségek

26-1 TÁBLÁZAT

Elektromos potenciálkülönbségek
tipikus értékei

Idegpályán végigfutó impulzusok	50 mV
Ceruzaelem feszültsége	1,5 V
Autoakkumulátor feszültsége	12 V
Háztartási elektromos hálózat feszültsége	220 V
Angolna feszültség-impulzusa	600 V
Országos elektromos hálózat feszültsége	
városokon belül	11 kV
városok között	220 kV
országok között	5×10^5 V
Villámlás során, felhő és föld között	$10^8 - 10^9$ V

juk a potenciális energia zéruspontjával, és minden más pont potenciális energiáját ehhez a ponthoz viszonyítva adhatjuk meg.

Erőterek és töltések energiaviszonyainak leírására még alkalmasabb rokon fogalom: a V *elektromos potenciál*. Vegyük észre, hogy az elektromos erőtér által végzett munka, $\int q_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ arányos q_0 nagyságával. Hogy a töltés nagyságától való függést megszüntessük, és így olyan mennyiséghez jussunk, amely csak az erőtérre jellemző, a V *elektromos potenciált* az alábbi két egyenlettel definiáljuk:

$$dV = \lim_{q_0 \rightarrow 0} \frac{dU}{q_0} = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (26-4)$$

Az a és b pontok közötti véges távolságon a V potenciál változását, a feszültséget az alábbi egyenlettel számíthatjuk:

$$\text{ELEKTROMOS POTENCIÁL } V \quad V_b - V_a = - \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (26-5)$$

Az elektromos potenciál (vagy ahogyan gyakran használják, a potenciál) SI egysége az 1 joule/coulomb = 1 J/C = 1 Volt (V).¹ A $\Delta V = - \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$

egyenletben szereplő negatív előjel miatt az elektromos erővonalak mindig a *csökkenő* potenciál irányába mutatnak. Fizikai fontossága csak a ΔV potenciálkülönbségnek (feszültségnek) van és így a potenciálskála zéruspontjával bármely alkalmas pont potenciálját választhatjuk. Olyan erőterek esetében, amelyek véges kiterjedésű töltés-eloszlásokból erednek, a potenciálskála zéruspontjával a töltésektől² nagyon messze (azaz a végtelenben) lévő pont potenciálját célszerű választani: ha $r \rightarrow \infty, V \equiv 0$.

Az elektromos erőterek vizsgálatában, a skaláris potenciál sokkal kényelmesebben használható, mint az elektromos potenciális energia. (Mechanikai rendszereknél éppen fordított a helyzet: a potenciális energia hasznosabb fogalom, mint a potenciál.) A két mennyiség a q tényezőben különbözik egymástól:

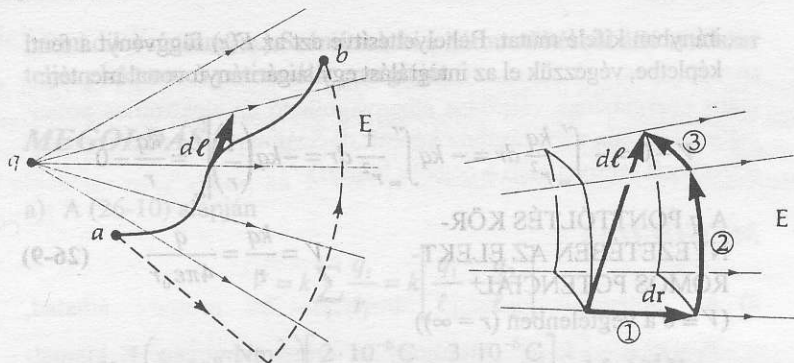
$$V \text{ és } U \text{ KAPCSOLATA} \quad dV = \frac{dU}{q} \quad (26-6)$$

Amikor kiszámítjuk a $-\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ integrált, gondoljunk arra, hogy az elektromos erőtér konzervatív, azaz az integrál értéke *független a két pont közötti konkrét úttól*. Emiatt olyan integrációs utat választhatunk, amely mentén a számítás egyszerű. Például, tekintsük egy pontszerű töltés E térerősségű sugárirányú erőterét (26-1a ábra) és az a és b pontok közötti vonal mentén való integrálást. A 26-1b ábrán egy $d\mathbf{l}$ vonalszakaszt láthatunk, amely az \mathbf{E} térerősséggel valamilyen szöget zár be. A $d\mathbf{l}$ vektornak a radiális, a tér irányával megegyező $d\mathbf{r}$ komponense a tér irányába mutat (⊙ irányú), míg a két másik komponense³ a ⊙ és ⊙ irányban derékszöget zár be az ⊙ iránnyal. Minthogy \mathbf{E} -nek csak sugárirányú komponense van, az $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ skalárszorzatban az \mathbf{r} -re merőleges komponenseket tartalmazó tagok zérusok.

¹ Ezt az egységet Alessandro Volta gróf (1745–1827) olasz fizikus emlékére nevezték el. Volta alkotta meg az első galvánelemet, ami az első gyakorlatban alkalmazható eszköz volt egyenáramok keltésére. Korábban a fizikusok az elektromosság jelenségeit csak szikrákon vagy villámokon tanulmányozhatták.

² Amikor egy későbbi fejezetben az elektromos áramköröket tárgyaljuk, az áramkör bizonyos pontját zérus potenciálúnak tekintjük, és ezt a pontot gyakran „földeljük”, tehát olyan fémvezetékhez csatlakoztatjuk, ami a földdel jó elektromos kontaktusban van. Műszerek, háztartási berendezések esetében a háromeres csatlakozó kábel egyik ere biztosítja a berendezés fémházának földelését.

³ Gömbi polárkoordináta-rendszerben ezek lennének a $\hat{\theta}$ illetve $\hat{\phi}$ irányok.



- a) Minthogy az \mathbf{E} térerősségű erőter konzervatív erőter,
 $a \Delta V = - \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ potenciálkülönbség azonos, akár a folytonos, akár a szaggatott vonal mentén végezzük el az integrálást.
- b) A $d\mathbf{l}$ vektornak három, egymásra kölcsönösen merőleges komponense van: ①, ② és ③

Ezért a számítás akkor a legegyszerűbb, ha a 26-1a ábrán szaggatott vonallal jelölt út mentén integrálunk. Az $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ integrál az \mathbf{E} térerősségre merőleges szakaszon zérus (mert $\cos 90^\circ = 0$); így csak a sugárirányú szakasz marad, amelyre

$$\mathbf{E} \text{ térerősségű sugárirányú erőterekre } \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \Rightarrow \int E_r dr \quad \left[\begin{array}{l} \text{ahol } E_r \text{ pozitív, ha } \mathbf{E} \\ \text{sugárirányban kifelé mutat} \end{array} \right] \quad (26-7)$$

A továbbiakban mindig azokat az utakat keressük meg, amelyek mentén könnyű az integrálást elvégezni: vagy az erővonalak mentén, vagy azokra merőlegesen. Olyan erőterek esetében, amelyeknek az erővonalai például az x tengellyel párhuzamosak, integrálással a következőt kapjuk:

$$\text{Párhuzamos erővonalú } \mathbf{E} \text{ térerősségű terekre } \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \Rightarrow \int E_x dx \quad (26-8)$$

Ezekből az összefüggésekből látszik, hogy az elektromos térerősség dimenziója megadható, mint potenciálkülönbség/távolság. Egysége Volt/méter, melyet gyakrabban használnak, mint a 24. fejezetben bevezetett (de ezzel ekvivalens) newton/coulomb egységet.

26-1 PÉLDA

- a) Számítsuk ki a V elektromos potenciált egy q pontszerű töltés környezetében, ha $r \rightarrow \infty$ távolságban $V \equiv 0$. b) Számítsuk ki egymástól r távolságra lévő két pontszerű töltésből (q_1 és q_2) álló rendszer U elektromos potenciális energiáját.

MEGOLDÁS

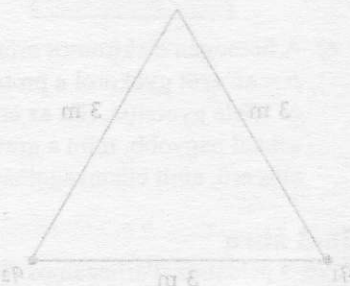
- a) A (26-5) egyenlet szerint

$$V_b - V_a = - \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

A $V \equiv 0$ potenciálú a pont a végtelenben van, a b pont pedig a pontszerű töltéstől valamilyen távolságban helyezkedik el. A pontszerű töltés elektromos térerőssége $E = kq/r^2$ nagyságú és sugár-

26-1 ábra

Potenciálkülönbség számítása q pontszerű töltés elektromos erőterében



26-2 ábra
A 26-2 példához

26-1 TÁBLÁZAT

Elektromos potenciálkülönbségek
tipikus értékei

Időegysígyan végig- futó impulzusok	50 mV
Célcselem feszültsége	1,5 V
Autoakkumulátor feszültsége	12 V
Házirányú elektromos hálózat feszültsége	220 V
Angolias feszültség-impulzusa	600 V
Országos elektromos hálózati feszültsége	230 V
Villámcsapás potenciálkülönbsége az ég- szint és a föld között	$10^8 - 10^9$ V

irányban kifelé mutat. Behelyettesítve ezt az $E(r)$ függvényt a fenti képletbe, végezzük el az integrálást egy sugárirányú vonal mentén:

$$V - 0 = - \int_{\infty}^r \frac{kq}{r^2} dr = -kq \int_{\infty}^r \frac{1}{r^2} dr = -kq \left(\frac{1}{r} \right)_{\infty}^r = \frac{kq}{r} - 0$$

A q PONTTÖLTÉS KÖR-
NYEZETÉBEN AZ ELEKT-
ROMOS POTENCIÁL

$$V = \frac{kq}{r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (26-9)$$

($V \equiv 0$ a végtelenben ($r = \infty$))

A V potenciál pozitív töltés környezetében pozitív, és $1/r$ függvény szerint tart zérushoz a végtelenben. A szuperpozíció elvét felhasználva, ezt az eredményt általánosíthatjuk több töltés esetére is:

AZ ELEKTROMOS POTEN-
CIÁL TÖBB PONTSZERŰ
TÖLTÉS KÖRNYEZETÉBEN
LÉVŐ PONTBAN

$$V = k \sum_i \frac{q_i}{r_i} \quad (26-10)$$

Mint hogy a potenciál skaláris mennyiség, a képlet szerint egyszerű algebrai összegezést kell elvégezni. Így, a V potenciált egyszerűbb kiszámítani, mint az E térerősséget.

- b) Az egymástól r távolságra lévő két pontszerű töltés potenciális energiájának kiszámításához felhasználjuk azt, hogy egy q töltést a végtelenből (ahol $V = 0$) qV munkavégzés befektetésével vihetünk a V potenciálú helyre. Ennélfogva a q_2 töltést a végtelenből a q_1 töltéstől r távolságra lévő V potenciálú pontba U munkavégzés árán vihetjük:

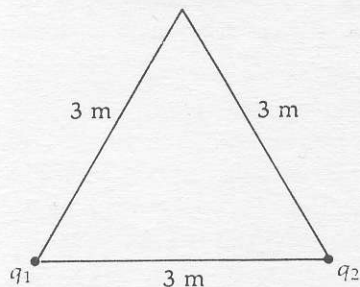
KÉT, EGYMÁSTÓL r
TÁVOLSÁGRA LÉVŐ
TÖLTÉS U ELEKTRO-
MOS POTENCIÁLIS
ENERGIÁJA

$$U = k \frac{q_1 q_2}{r} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (26-11)$$

Ezt a képletet pontszerű töltésekből álló töltésrendszerek esetére úgy általánosíthatjuk, hogy a rendszert töltésenként építjük fel: a rendszer teljes U potenciális energiája egyes töltéspárok potenciális energiájának összege. Például, három töltésből álló rendszer teljes potenciális energiája

$$U = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}} + k \frac{q_2 q_3}{r_{23}} + k \frac{q_1 q_3}{r_{13}} \quad (26-12)$$

Ponttöltésekből álló rendszer teljes U elektromos potenciális energiája azzal a munkával egyenlő, ami ahhoz szükséges, hogy az egyes töltéseket a végtelenből a rendszerben elfoglalt helyükre vigye.



26-2 ábra

A 26-2 példához.

26-2 PÉLDA

Két pontszerű töltés, ($q_1 = 2 \mu\text{C}$ és $q_2 = 3 \mu\text{C}$) 3 méter oldalhosszúságú egyenlő oldalú háromszög két csúcsán helyezkedik el (26-2 ábra). a) Számítsuk ki a V potenciált a háromszög harmadik csúcsában ($V \equiv 0$ a végtelenben). b) Mekkora munkavégzés szükséges ahhoz, hogy a végtelenből $q_3 = 4 \mu\text{C}$ töltést vigyünk a háromszög

harmadik csúcsára? c.) Számítsuk ki a három töltésből álló rendszer teljes elektromos potenciális energiáját.

MEGOLDÁS

a) A (26-10) alapján

$$V = k \sum_i \frac{q_i}{r_i} = k \left[\frac{q_1}{\ell_1} + \frac{q_2}{\ell_2} \right]$$

$$V = \left(9 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2} \right) \left[\frac{2 \cdot 10^{-6} \text{C}}{3 \text{m}} + \frac{3 \cdot 10^{-6} \text{C}}{3 \text{m}} \right] = 1,5 \cdot 10^4 \text{V}$$

b) A munka, ami ahhoz szükséges, hogy a q_3 töltést a végtelenből a V potenciálú helyre vigyük:

$$W = q_3 V = (4 \cdot 10^{-6} \text{C})(1,5 \cdot 10^4 \text{V}) = 6,0 \cdot 10^{-2} \text{J}$$

c) A három töltésből álló rendszer U teljes potenciális energiája az alábbi módon számítható:

$$U = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}} + k \frac{q_2 q_3}{r_{23}} + k \frac{q_1 q_3}{r_{13}}$$

$$U = \left(9 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2} \right) \left[\frac{(2 \cdot 10^{-6} \text{C})(3 \cdot 10^{-6} \text{C})}{3 \text{m}} + \frac{(3 \cdot 10^{-6} \text{C})(4 \cdot 10^{-6} \text{C})}{3 \text{m}} + \frac{(2 \cdot 10^{-6} \text{C})(4 \cdot 10^{-6} \text{C})}{3 \text{m}} \right]$$

$$U = \left(\frac{9 \cdot 10^9}{3} \right) (6 + 12 + 8) \cdot 10^{-12} = 7,8 \cdot 10^{-2} \text{J}$$

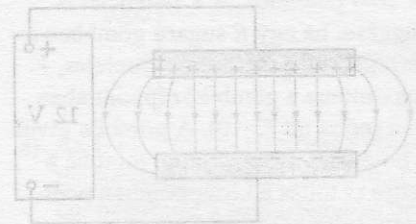
Az elem és az akkumulátor olyan feszültségforrás, melynek elektromos potenciálkülönbségét a belsejében lezajló kémiai reakció hozza létre. Vegyünk egy 12 voltos autóakkumulátort. Egy pozitív és egy negatív pólusa van. A „12 V” azt jelenti, hogy ekkora a pólusok közötti potenciálkülönbség (a pozitív pólus potenciálja a nagyobb). Ha a pólusokat egymással párhuzamos, egymástól d távolságra lévő fémlamezekhez csatlakoztatjuk, az akkumulátorból mindaddig töltések áramlanak a lemezekre, amíg a lemezek közötti potenciálkülönbség is 12 V nem lesz. Ezek a töltések a lemezek belső felületén helyezkednek el és így a lemezek között elektromos erőter alakul ki (26-3 ábra). Ha a lemezek közötti d távolság kicsiny a lemezek méreteihez képest, az erőter a lemezek közepe táján homogén. (Első közelítésben elhanyagoljuk a lemezek széle táján az erőter inhomogenitását.) A következő példában ezt az elrendezést vizsgáljuk, hogy jobban megértsük E és V kapcsolatát.

26-3 PÉLDA

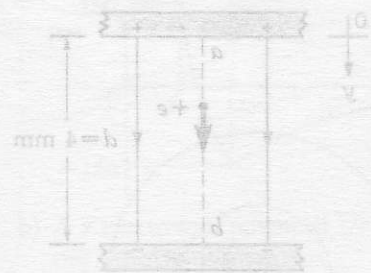
A 26-3c ábrán egy 12 V-os akkumulátor két, egymástól 4 mm-re lévő nagy, párhuzamos fémlamezhez csatlakozik. a) Számítsuk ki a lemezek közötti elektromos térerősséget. b) A felső lemeznél elengedünk egy addig nyugalomban lévő protont, amelyik a tér hatására a szaggatott vonal mentén gyorsul a negatív lemez felé. Számít-



a) A két párhuzamos fémlamezhez csatlakoztatott akkumulátor, az egyik lemeztől töltéseket visszátérítve a másikra, mindaddig, amíg a lemezek közötti potenciálkülönbség el nem éri az akkumulátor pólusai közötti feszültséget.

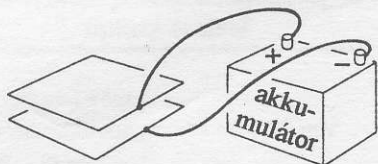


b) A fenti ábráról számítsuk ki a lemezek közötti elektromos erőter erőterét, amely a lemezek közepe táján homogénnek tekinthető, a szélek környezetében inhomogén. Ha a lemezek sokkal nagyobbak, mint a közöttük lévő távolság, a szélektől lévő inhomogenitást figyelembe nem véve a lemezek közötti erőter erőterét.

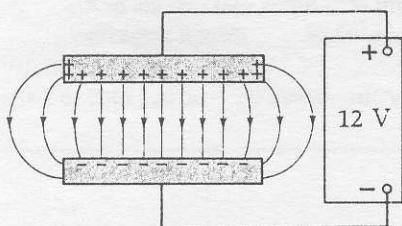


c) A homogén elektromos erőter $F = eE$ erővel gyorsítja a protont, és letétele gyorsítja. Ez az erő sokkal nagyobb, mint a gravitáció, ami elhanyagolható.

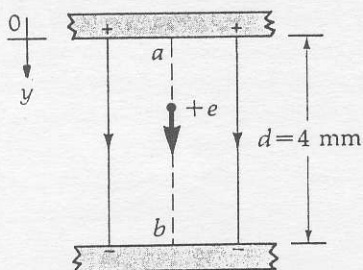
26-3 ábra
A 26-3 példában, párhuzamos fémlamezekhez csatlakoztatott akkumulátor elektromos erőterét hoz létre a lemezek között.



- a) A két párhuzamos fémlemezhez csatlakoztatott akkumulátor, az egyik lemeztől töltéseket visz át a másikra, mindaddig, amíg a lemezek közötti potenciálkülönbség el nem éri az akkumulátor pólusai közötti feszültséget.



- b) A fenti áramkör sémája. A legtöbb töltés a lemezek belső felületén helyezkedik el, és olyan elektromos erőteret hoz létre, amely a lemezek közepe táján homogénnek tekinthető, a szélek környezetében inhomogén. Ha a lemezek sokkal nagyobbak, mint a közöttük lévő távolság, a széleknél lévő inhomogenitást figyelmen kívül hagyhatjuk.



- c) A homogén elektromos erőter $F = eE$ erőt gyakorol a protonra, és lefelé gyorsítja. (Ez az erő sokkal nagyobb, mint a gravitációs erő, amit elhanyagolhatunk.)

26-3 ábra

A 26-3 példához. Párhuzamos fémlemezekhez csatlakoztatott akkumulátor elektromos erőteret hoz létre a lemezek között.

suk ki a proton elektromos potenciális energiájának változását a mozgás során. c) Mutassuk meg, hogy a proton gravitációs potenciális energiájának változása elhanyagolható az elektromos potenciális energiája változásához képest. d) Számítsuk ki a proton végsebességét (amivel eléri a negatív lemezt).

MEGOLDÁS

- a) A potenciálkülönbség, amelyen a proton áthalad,
- $$V_b - V_a = - \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}. \text{ Minthogy az erőter homogén, } \mathbf{E} \text{ kiemelhető az integráljel elé, és így a}$$

$$V_b - V_a = -E \int_a^b dx = -Ed$$

egyenlethez jutunk.

Az \mathbf{E} térerősség nagyságára adódik, hogy:

$$|E| = \frac{|V_b - V_a|}{d} = \frac{12\text{V}}{4 \cdot 10^{-3}\text{m}} = 3000 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

- b) A proton potenciális energiájának ΔU változása a (26-4) szerint:

$$\Delta U = q\Delta V = (1,67 \cdot 10^{-19}\text{C})(-12\text{V}) = -1,92 \cdot 10^{-18}\text{J}$$

- c) A proton gravitációs potenciális energiájának megváltozása, mialatt 4 mm-rel lejjebb kerül:

$$\Delta U_g = mgh = (1,67 \cdot 10^{-27}\text{kg})(9,8\text{m/s}^2)(-4 \cdot 10^{-3}\text{m})$$

$$\Delta U_g = -6,55 \cdot 10^{-29}\text{J}$$

Ez kb. 30 milfiárdszor kisebb változás, mint ami az elektromos potenciális energiában történt. Amikor töltött elemi részecskék elektromos térben történő mozgását vizsgáljuk, majdnem mindig elhanyagolhatjuk a gravitáció hatását.

- d) A munkatétel szerint, az elektromos tér által végzett $q\Delta V$ munka megegyezik a kinetikus energia változásával:

$$q\Delta V = \Delta K$$

$$e\Delta V = 1/2(mv^2) - 0$$

$$v = \sqrt{\frac{2e(\Delta V)}{m}} = \sqrt{\frac{2(1,60 \cdot 10^{-19}\text{C})(12\text{V})}{1,67 \cdot 10^{-27}\text{kg}}}$$

$$v = 4,8 \cdot 10^4 \text{ m/s}$$

Másik módszer: Newton második törvénye szerint $\Sigma F = ma$, tehát a proton gyorsulása $a = F/m = eE/m$. Ezt az értéket a mozgásegyenletbe helyettesítve:

$$v^2 = v_0^2 + 2ay$$

$$v^2 = 0 + 2 \left(\frac{eE}{m} \right) d$$

Ezt az egyenletet megoldva:

$$v = \sqrt{\frac{2eEd}{m}} = \sqrt{\frac{2e(\Delta V)}{m}} = 4,80 \cdot 10^4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Elektronvolt

Az, hogy az elektron töltése (mint paraméter) gyakran fordul elő az atom- és magfizikában, új energiaegység bevezetéséhez vezetett. 1 elektronvolt (eV) az az energia, amelyet egy, az elektronival megegyező töltéssel (e) rendelkező objektum nyer akkor, ha 1 Volt potenciálkülönbségen keresztülhaladva gyorsul.

$$\Delta W = e\Delta V$$

$$1eV = (1,602 \cdot 10^{-19} C)(1 J / C)$$

ELEKTRONVOLT

(energiaegység)

$$1 eV = 1,602 \cdot 10^{-19} J \quad (26-13)$$

Az előző (26-3) példát oldjuk meg úgy is, hogy a proton helyett alfa-részecske (hélium atommag) gyorsul a negatív lemez felé. Minthogy az alfa-részecske töltése +2e, 12 V potenciálkülönbségen keresztül való gyorsulás után energiája (2e)(12 V) = 24 eV lenne, pontosan duplája az egy pozitív töltésű protonénak. SI egységre való átszámításkor az alábbi átszámítási tényezőt használjuk:

$$24 eV \left(\frac{1,602 \cdot 10^{-19} J}{1 eV} \right) = 3,84 \cdot 10^{-18} J \quad (26-14)$$

Átszámítási tényező

Az *elektronvolt* olyan energiaegység, amit gyakran használunk, nem elektromos eredetű energiák nagyságának jellemzésére is. Például, szokás úgy megadni a levegő molekuláinak energiáját, hogy szobahőmérsékleten kb. 1/40 eV átlagos energiája van egy molekulának.

26-4 PÉLDA

Számítsuk ki a *V* potenciált egy homogén pozitív ρ töltéssűrűségű *R* sugarú gömbön belül és kívül, felhasználva a 25-5 példa megoldásánál az *E* térerősségre kapott képletet. Fejezzük ki az eredményt, a gömb teljes töltése, *Q* függvényében, ahol $Q = \rho \frac{4}{3} \pi R^3$.

(Legyen $V \equiv 0$ a végtelenben.)

MEGOLDÁS

A 25-5 példában az *E* térerősségre az alábbi kifejezéseket vezettük le:

A gömb belsejében ($r < R$)

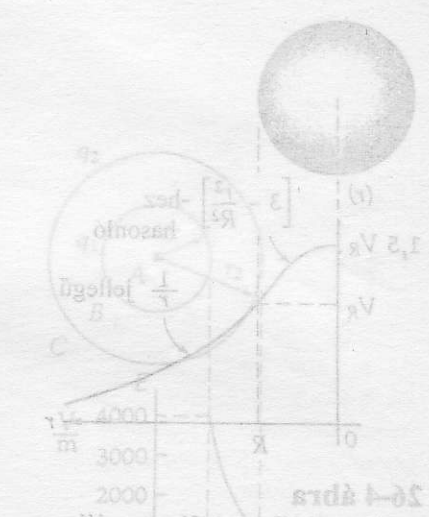
A gömbön kívül ($r > R$)

$$E_{bent} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r = \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \right) r \quad E_{kint} = \left(\frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \right) \frac{1}{r^2} = \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{1}{r^2}$$

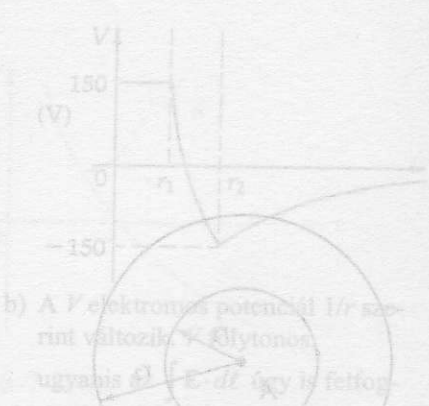
A GÖMBÖN KÍVÜL: ($r > R$) A potenciál értékét a végtelenben zérusnak választottuk. Így végtelen és *r* között integrálunk. Erre a radiális térre a következő egyenletet írhatjuk fel:

$$V_b - V_a = - \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$$

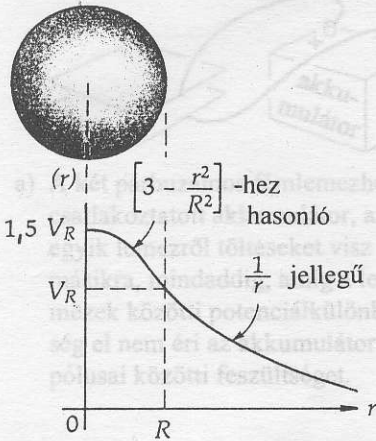
$$V_{kint} - 0 = - \int_{\infty}^r \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{1}{r^2} dr = \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \right) \left(\frac{1}{r} \right)_{\infty}^r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$



26-4 ábra
A 26-4 példához a *V* potenciál *r* függése, ha egy *R* sugarú gömbben a térbeli töltéssűrűség egyenletes, ρ . A *V* potenciál a gömbön kívül ($r > R$) a $V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$ képletet követi, ahol Q a gömb teljes töltése. A *V* potenciál a gömbön belül ($r < R$) a $V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \left(\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2R^2} \right)$ képletet követi.



26-5 ábra
A 26-5 példához a *E* térerősség *r* függése, ha egy *R* sugarú gömbben a térbeli töltéssűrűség egyenletes, ρ . A *E* térerősség a gömbön belül ($r < R$) a $E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r$ képletet követi, ahol ρ a töltéssűrűség. A *E* térerősség a gömbön kívül ($r > R$) a $E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ képletet követi, ahol Q a gömb teljes töltése.



26-4 ábra

A 26-4 példához. A V potenciál r -függése, ha egy R sugarú gömbben a térfogati töltéssűrűség egyenletes, V maximuma a gömb középpontjában van (noha ott $E = 0$). A gömbön kívül a potenciál ugyanakkora, mint ha a teljes Q töltés a középpontban pontszerű töltésként lenne jelen.

A gömbön kívül a potenciál akkora, mintha Q pontszerű töltés lenne a gömb középpontjában.

A GÖMB BELSEJÉBEN ($r < R$): A fenti eredmény szerint, a gömb felszínén ($r = R$) a potenciál $V = Q/4\pi\epsilon_0 R$. A gömb belsejében, az r helyen a potenciált integrálással kaphatjuk meg:

$$V_b - V_a = - \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$$

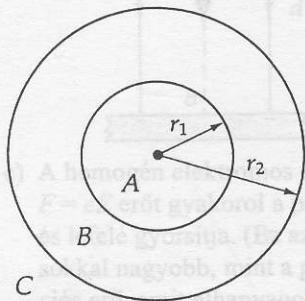
$$V_{bent} - V_r = - \int_R^r \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \right) r dr = - \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \right) \left(\frac{r^2}{2} \right) \Big|_R^r$$

$$V_{bent} = - \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \right) \left(\frac{r^2}{2} \right) \Big|_R^r + V_r$$

$$V_{bent} = - \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R^3} (r^2 - R^2) + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R} \left[3 - \frac{r^2}{R^2} \right]$$

Ezt a $V(r)$ potenciálfüggést a 26-4 ábrán szemléltetjük.

Megjegyzés: Vegyük észre, hogy az $r = R$ helyen a két görbe simán megy át egymásba. Ha $r > R$, V $1/r$ szerint változik; ha $r < R$, $V(r)$ parabola alakú, azaz $V(r) = \text{konstans} - r^2$. Noha az elektromos térerősség a középpontban zérus, a V potenciálnak éppen ott van maximuma. Ez ésszerűen hangzik, figyelembe véve hogy a potenciál változása azzal a munkával arányos, amit akkor végeznénk, ha a q_0 tetszőleges pozitív töltést a végtelenből (ahol $V \equiv 0$) hoznánk a gömb felszínére. Ekkor ugyanis mindig pozitív munkát végeznénk a taszító Coulomb erő ellenében. Még a gömb belsejében is taszítóerő ellenében kell munkát végeznünk (noha ennek nagysága a középpont felé egyenletesen közelít zérushoz), tehát, ahogy a q_0 töltést a középponthoz közelítjük, további pozitív munkát kell végezni, vagyis V értéke pozitív irányban tovább nő. Érdemes összehasonlítani ezt az eredményt a 16-14 ábrán illusztrált analóg eset eredményével (az m tömegpont gravitációs potenciális energiája homogén tömegeloszlású Föld közelében).



26-5 ábra

A 26-5 példához. Két különböző töltésű vékony koncentrikusan elhelyezkedő vezető gömbhéj. A belső gömbhéjén $+10$ nC, a külsőn -15 nC töltés van.

26-5 példa

Tekintsünk két koncentrikus vékony, vezető gömbhéjat (26-5 ábra). Legyen a belső gömb sugara $r_1 = 15$ cm, töltése $+10$ nC (nC a nanocoulomb rövidítése, $1 \text{ nC} = 10^{-9} \text{ C}$). A külső gömb sugara $r_2 = 30$ cm, töltése -15 nC. Feltételezve hogy $V \equiv 0$ ha $r \rightarrow \infty$, számítsuk ki a) az E elektromos térerősséget; és b) a V elektromos potenciált az alábbi tartományokban:

A tartomány: a belső gömbhéjén belül ($r < r_1$)

B tartomány: a két gömbhéj között ($r_1 < r < r_2$)

C tartomány: a külső gömbhéjén kívül ($r > r_2$)

MEGOLDÁS

A rendszer geometriai szimmetriája miatt a töltések a gömbökön egyenletesen oszlanak el. A szimmetria miatt célszerű először

Gauss törvényének alkalmazásával a térerősséget, majd a V és E közötti összefüggést kifejező (26-5) formula segítségével a potenciált kiszámítani. Az egyes tartományokban ezeket a mennyiségeket külön-külön határozzuk meg. A térerősséggel kezdjük.

a) Az E elektromos térerősség kiszámítása:

A. tartomány: a belső gömbhéjon belül: Felhasználva a rendszer szimmetriáját, Gauss-felület gyanánt koncentrikus gömböket választunk, majd alkalmazzuk a Gauss törvényt:

$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = q / \epsilon_0$. Akármekkora is E nagysága a Gauss felület valamely pontján, szimmetriaokokból ugyanakkorának kell lennie a felület többi pontján is. Minthogy a Gauss-felület belsejében nincs töltés, arra következtethetünk, hogy a térerősség a felület minden pontján zérus. Továbbá, minthogy ilyen Gauss-felületet tetszőleges sugárral szerkeszthetünk (feltéve, hogy $0 < r < r_1$), az E térerősség a belső gömbhéj belsejében mindenütt zérus.

$$E_A = 0 \quad (\text{a belső gömbhéj belsejében})$$

B. tartomány: a két gömbhéj között. Szimmetriaokokból ismét célszerű olyan Gauss-felületet választanunk amely r sugarú ($r_1 < r < r_2$) koncentrikus gömb. Ismerjük fel, hogy a probléma nagyon hasonlít a 25-7 példában leírthoz, melynek eredménye

$$E_B = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{q}{r^2} \quad (\text{sugárirányban kifelé mutat, ha } r_1 < r < r_2)$$

Figyelembe véve, hogy $1/4\pi\epsilon_0 = 9 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{C}^2$, kiszámíthatjuk a térerősséget az r_1 sugarú belső gömbhéj külső felszínének közvetlen környezetében.

$$E_{r_1} = \left(9 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2} \right) \frac{10 \cdot 10^{-9} \text{C}}{(0,15 \text{ m})^2} = 4000 \frac{\text{N}}{\text{C}} \quad (\text{a belső gömbhéj külső felszínének közvetlen közelében})$$

Ez a térerősség $1/r^2$ szerint csökken, egészen a külső gömbhéj belső felszínéig, ahol a nagysága

$$E_{r_2} = \left(9 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2} \right) \frac{10 \cdot 10^{-9} \text{C}}{(0,30 \text{ m})^2} = 1000 \frac{\text{N}}{\text{C}} \quad (\text{a külső gömbhéj belső felszínének közvetlen közelében})$$

C. tartomány: a külső gömbhéjon kívül. Gauss felület gyanánt ismét r sugarú ($r > r_2$) koncentrikus gömböt választunk, és a Gauss törvényt ($\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = q / \epsilon_0$) alkalmazzuk, figyelembe véve, hogy a felületen belül lévő eredő töltés q . Az eredő töltés $q = q_1 + q_2$, vagyis $(10 \text{ nC}) + (-15 \text{ nC}) = (-5 \text{ nC})$. A térerősség tehát

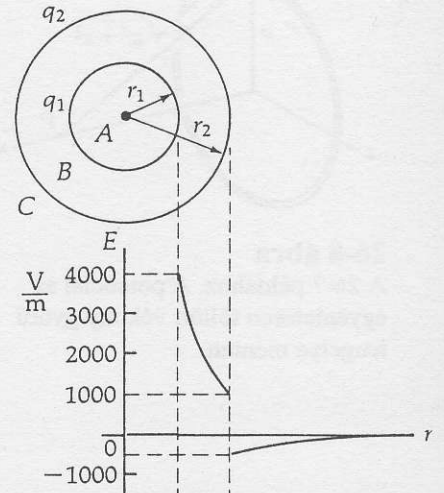
$$E_C = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{q}{r^2} \quad (\text{sugárirányban befelé mutat, ha } r > r_2, \text{ mert } q \text{ negatív})$$

A térerősség nagysága a külső gömbhéj külső felülete közvetlen környezetében ($r = r_2$)

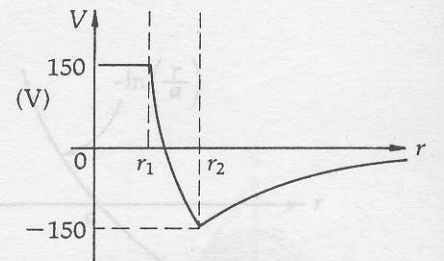
$$E_{r_2} = \left(9 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2} \right) \frac{-5 \cdot 10^{-9} \text{C}}{(0,30 \text{ m})^2} = -500 \frac{\text{N}}{\text{C}} \quad (\text{a külső gömbhéj külső felszínének közvetlen közelében})$$

A negatív előjel jelzi, hogy a térerősség befelé mutat (a $-r$ irányban). Nagysága $1/r^2$ -tel változik, és zérushoz tart, ahogy $r \rightarrow \infty$.

Figyeljük meg, hogy a térerősség a távolságnak nem folytonos függvénye. Amint az egyre nagyobbak választott Gauss-felületet túllépi a következő gömbhéjat, és magába zárja



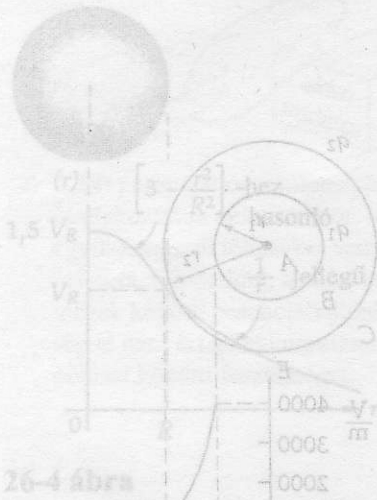
a) Az E elektromos térerősség pozitív, ha sugárirányban kifelé mutat; negatívak a sugárirányban befelé mutató térerősségek. Az ábrán a görbült szakaszok $1/r^2$ függvények. A térerősség nem folytonos függvény, ugyanis amikor a Gauss-felület folyamatos növelése közben az a gömbhéjakat átlépi és magába zárja a gömbhéjak töltését, akkor E hirtelen új értéket vesz fel.



b) A V elektromos potenciál $1/r$ szerint változik. V folytonos, ugyanis az $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ úgy is felfogható, mint az $E(r)$ függvénygörbe alatti terület. A szakadós függvény integrálásakor a diszkontinuitásnál az összeg nem ugrászerűen változik.

26-6 ábra

A 26-5 példához. Két különböző töltésű, koncentrikus, vezető gömbhéj.



26-4 ábra

A 26-4 példához. A V elektromos potenciál r függése, ha a referenciapont az r = ∞-nél van (ahol az E = 0). A gömbön kívül az E elektromos térerősség pozitív, az r növekedésével csökken. A gömbön belül az E = 0. A gömbhéj között az E elektromos térerősség pozitív, az r növekedésével csökken. A gömbhéj között az E elektromos térerősség pozitív, az r növekedésével csökken. A gömbhéj között az E elektromos térerősség pozitív, az r növekedésével csökken.



(b) A V elektromos potenciál r függése, ha a referenciapont az r = ∞-nél van (ahol az E = 0). A gömbön kívül az E elektromos térerősség pozitív, az r növekedésével csökken. A gömbön belül az E = 0. A gömbhéj között az E elektromos térerősség pozitív, az r növekedésével csökken. A gömbhéj között az E elektromos térerősség pozitív, az r növekedésével csökken.

a gömbhéj töltését, akkor E hirtelen megváltozik, tehát nem folytonos (legalábbis ebben az idealizált esetben, amikor feltételeztük, hogy a pontszerű töltésekből álló rétegnek zérus a vastagsága). A diszkontinuitásokat mindkét oldalról megközelítve megtudhatjuk, hogy mekkora ott a térerősségugrás. A 26-6 ábrán vázoltuk a térerősséget és a potenciált r függvényében.

b) A V elektromos potenciál kiszámítása.

Mivel az E térerősséget mindenütt ismerjük, a

$$V_2 - V_1 = - \int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

összefüggést fogjuk alkalmazni a potenciál változásának kiszámítására. A zérus referencia pont $V \equiv 0$ ha $r = \infty$. Így $r = \infty$ értéktől kezdve haladunk befelé a gömb középpontjáiig kiszámítva a potenciál változását.

C. tartomány: a külső gömbhéjon kívül. A töltéseloszlás gömbszimetriája miatt mind a térerősség, mind a potenciál olyan, mintha a q eredő töltés ($q = q_1 + q_2$) a középpontban lenne koncentráva. Befelé integrálva ∞-től r-ig (azaz a gömbökön kívül) azt kapjuk, hogy

$$V_r - 0 = - \int_{\infty}^r \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{q}{r} \quad (\text{C tartományban } r \geq r_2)$$

Minthogy az eredő töltés $q = -5 \text{ nC}$, a potenciál számértéke $r = r_2$ -nél:

$$V_{r_2} = \left(9 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2} \right) \frac{-5 \cdot 10^{-9} \text{C}}{(0,30 \text{ m})} = -150 \text{ V} \quad (\text{ha } r = r_2)$$

B. tartomány: a két gömbhéj között. A potenciál változása r_2 és r között (ha $r_1 \leq r \leq r_2$):

$$V_r - V_{r_2} = - \int_{r_2}^r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

E nagyságát, a Gauss törvény szerint, kizárólag a belső gömbön lévő q_1 töltés szabja meg. A térerősséget r_2 -től r-ig integrálva azt kapjuk, hogy

$$V_r - V_{r_2} = - \int_{r_2}^r \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \left(\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \right) \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r_2} \right]$$

Minthogy $V_{r_2} = -150 \text{ V}$, a potenciált a B tartományban az alábbi képlet adja meg:

$$V_B = (-150 \text{ V}) + \left(\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \right) \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r_2} \right] \quad (\text{B tartományban } r_1 \leq r \leq r_2)$$

A potenciál számértéke a belső gömbhéjnál:

$$V_{r_1} = (-150 \text{ V}) + \left(9 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2} \right) (10 \cdot 10^{-9} \text{C}) \left[\frac{1}{0,15 \text{ m}} - \frac{1}{0,30 \text{ m}} \right]$$

$$V_{r_1} = -150 \text{ V} + 300 \text{ V} = 150 \text{ V}$$

Noha az E térerősség nem folytonos a gömbhéjakon (ahol a töltések vannak), a V potenciál mindenütt folytonos függvény. Ez az állítás kézenfekvő, ha figyelembe vesszük, hogy az $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ integrálást úgy is értelmezhetjük, mint az $E(r)$ függ-

vény görbe alatti területének összegzéssel történt kiszámítását (26-6a ábra). A szakadós függvény integrálásakor a diszkontinuitásnál csak az összeg növekedésének *üteme* változik ugrás-szerűen, s nem maga az összeg.

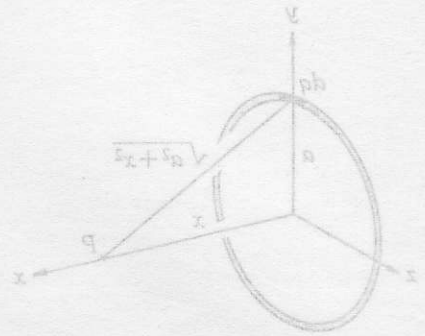
A. tartomány: a belső gömbhéjon belül. Ismét ugyanazzal az általános képlettel indulunk el:

$$V_2 - V_1 = - \int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

Azonban ebben a tartományban \mathbf{E} mindenütt zérus, tehát befelé haladva a potenciál nem változik. Vagyis, a potenciál mindenütt, ahol $r \leq r_1$, azonos, és numerikus értéke

$$V_A = 150 \text{ V} \quad (\text{A tartományban } 0 \leq r \leq r_2)$$

A 26-6b ábrán a $V(r)$ elektromos potenciál látható r függvényében ábrázolva mindhárom tartományban. Figyeljük meg, hogy noha a belső gömb belsejében az \mathbf{E} térerősség mindenütt zérus, a V potenciál értéke véges pozitív és állandó.



26-6 ábra
A 26-7 példához. A potenciál az egyenletesen töltött vékony gyűrű tengelye mentén.

26-6 PÉLDA

Tekintsünk egy végtelen hosszúságú egyenes mentén elhelyezkedő töltést, melynek (töltés/hosszúság egységben megadott) töltéssűrűsége λ . Számítsuk ki az ettől a vonaltöltéstől származó V potenciált.

MEGOLDÁS

A potenciáeloszlást az 25-1 példában kiszámított \mathbf{E} térerősségeloszlás felhasználásával adjuk meg:

λ egyenes vonalmenti töltéssűrűség esetén

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \quad \begin{matrix} \text{(sugárirányban} \\ \text{kifelé mutat)} \end{matrix} \quad (26-15)$$

A potenciálkülönbségeket az alábbi módon számítjuk:

$$V_2 - V_1 = - \int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$$

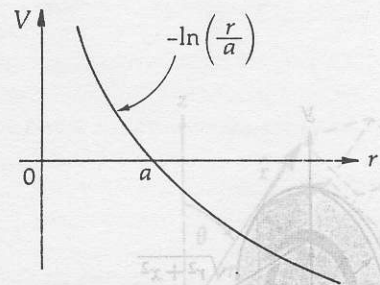
Az \mathbf{E} térerősség fenti kifejezését behelyettesítve azt kapjuk, hogy

$$V_2 - V_1 = - \int_{r_1}^{r_2} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} dr = - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} (\ln r_2 - \ln r_1) \quad (26-16)$$

Itt most váratlan, előre nem látott problémával kerülünk szembe: a potenciál nem lehet zérus sem a végtelenben, sem az $r = 0$ helyen, ugyanis ha a logaritmus argumentumában végtelen, vagy 0 állna, a függvényérték + vagy - végtelen lenne. Így hát referenciapontot olyan, $r = a$ véges távolságban lévő pontot választunk, ahol $V \equiv 0$, ha $r = a$. Ilyen választás esetén a V potenciál a vonaltöltéstől r távolságban:

$$V = - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} (\ln r - \ln a) = - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{r}{a} \right) \quad \begin{matrix} \text{(ahol } V \equiv 0 \\ \text{ha } r = a) \end{matrix} \quad (26-17)$$

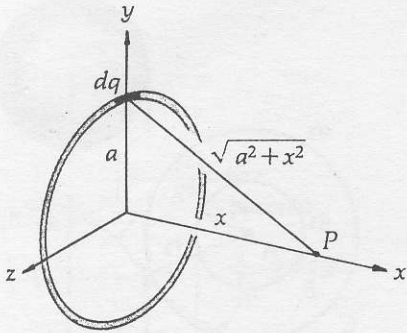
Ezt az eredményt a 26-7 ábrán szemléltetjük.



26-7 ábra

A 26-6 példához. Végtelen hosszú egyenes mentén egyenletesen elhelyezkedő vonalmenti töltés V elektromos potenciálja. $V \equiv 0$, ha $r = a$.

Gömbi koordináták. Az r és θ változók értéke növekszik.



26-8 ábra

A 26-7 példához. A potenciál az egyenletesen töltött vékony gyűrű tengelye mentén.

26-7 PÉLDA

Az yz síkban lévő, vékony, a sugarú gyűrű mentén $+Q$ töltés oszlik el egyenletesen. Számítsuk ki a potenciált a gyűrű tengelye mentén, a középponttól x távolságra lévő P pontban (26-8 ábra). Legyen $V \equiv 0$ az $x = \infty$ helyen.

MEGOLDÁS

Ahelyett, hogy a $\Delta V = - \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ vektorintegrált határoznánk meg, gyakorta sokkal célszerűbb a $dV = kdq/r$ összefüggés alapján a skalárintegrált kiszámítani. Ezzel a példával ezt a megoldási módszert illusztráljuk. A fennálló szimmetria miatt a gyűrű mentén minden egyes $dq = \lambda ds$ töltéselem azonos $\sqrt{a^2 + x^2}$ távolságra van a P ponttól. Felhasználva a (26-10) összefüggés integrálalakját, azt kapjuk, hogy

$$V = k \int \frac{dq}{r} = k \oint \frac{\lambda ds}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{k}{\sqrt{a^2 + x^2}} \oint \lambda ds = \frac{kQ}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

A teljes gyűrűre

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{a^2 + x^2}}$$

26-8 PÉLDA

Számítsuk ki a V elektromos potenciált egy a sugarú korong tengelye mentén, amelynek egyik körlapján a (töltés/felület egységben megadott) egyenletes felületmenti töltéssűrűség σ .

MEGOLDÁS

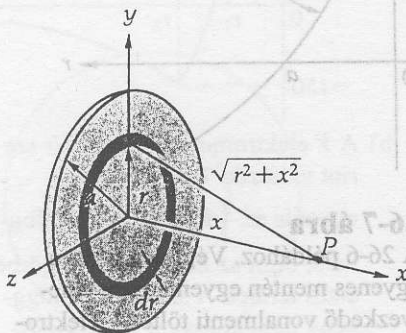
A 26-9 ábrán illusztráltak szerint, legyen x a körlap középpontja és a tengelyen lévő P pont közötti távolság. Osszuk a körlapot r sugarú és dr szélességű töltött körgyűrűk sorozatára; használjuk fel az előző példa eredményét a körgyűrű töltése által létrehozott dV potenciál kiszámítására; összegezzük ezeket a potenciálokat, hogy a teljes körlap töltése által létrehozott potenciált megkapjuk. Egy r sugarú, dr szélességű gyűrű területe $dA = 2\pi r dr$ és ezen $dq = \sigma dA = \sigma 2\pi r dr$ töltés van. Így, a P pontban ez a gyűrű dV potenciált hoz létre, melynek nagysága:

$$dV = \frac{k dq}{\sqrt{r^2 + x^2}} = \frac{k\sigma 2\pi r dr}{\sqrt{r^2 + x^2}}$$

Most az összes gyűrű potenciálját összegeznünk kell $r = 0$ és $r = a$ határok között. Felhasználva a G-II. függelék 19. képletét, azt kapjuk, hogy

$$V = \int_0^a \frac{k\sigma 2\pi r dr}{\sqrt{r^2 + x^2}} = k\sigma 2\pi \int_0^a \frac{r dr}{\sqrt{r^2 + x^2}} = k\sigma 2\pi \left[\sqrt{r^2 + x^2} \right]_0^a$$

$$V = k\sigma 2\pi \left[\sqrt{a^2 + x^2} - x \right]$$



26-9 ábra

A 26-8 példához. Egyenletes töltésselosztású körlap.

26.3 A V potenciál gradiense

Még akkor is, ha az elektromos erőtér nem homogén – vagyis ha a térerősség mindhárom koordináta szerint változik – kapcsolatot találhatunk V és \mathbf{E} között. Ha a térerősségnek csak egy komponense van, E_x , akkor

$$dV = - E_x \cdot dx \quad (26-18)$$

ahonnan
$$E_x = - \frac{dV}{dx} \quad (26-19)$$

Azonban, ha V és \mathbf{E} három változó: x , y és z függvénye, három deriváltat kell kiszámítanunk: az x szerinti deriváltat (amelynek kiszámítása során az y és z változókat nem változtatjuk); az y szerinti deriváltat (amelynek kiszámítása során az x és z változókat nem változtatjuk); és végezetül a z szerinti deriváltat (amelynek kiszámítása során az x és y változókat nem változtatjuk). Ennek az eljárásnak rövid matematikai jelölése: az x szerinti parciális deriváltat jelentő a $\partial V/\partial x$ szimbólum. Ez azt jelenti, hogy „Számítsuk ki V x szerinti deriváltját, mialatt az összes többi változót állandó értéken tartjuk”. Így a (26-19) egyenletet három dimenziós esetben az alábbi módon kell alkalmazni:

$$E_x = - \frac{\partial V}{\partial x} \quad E_y = - \frac{\partial V}{\partial y} \quad E_z = - \frac{\partial V}{\partial z} \quad (26-20)$$

Az eljárást a következő példával illusztráljuk. Tekintsünk egy olyan potenciáletteret, ahol $V = ax^2y$; $a =$ konstans. A parciális deriváltak a következők:

$$E_x = - \frac{\partial V}{\partial x} = -2axy \quad E_y = - \frac{\partial V}{\partial y} = -ax^2 \quad E_z = - \frac{\partial V}{\partial z} = 0$$

A teljes \mathbf{E} térerősség:

$$\mathbf{E} = E_x \hat{x} + E_y \hat{y} + E_z \hat{z} = -2axy \hat{x} - ax^2 \hat{y}$$

Az általános jelölésmódot alkalmazva \mathbf{E} és V kapcsolatát az alábbi egyenlet fejezi ki:

$$\mathbf{E} = - \left(\frac{\partial V}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{z} \right) \quad (26-21)$$

A zárójelben lévő kifejezést V **gradiensének** nevezzük. A gradiens olyan vektor, amely abba az irányba mutat, amerre a potenciál változása a legnagyobb, azaz az ekvipotenciális felületre merőleges és az \mathbf{E} térerősség irányába esik. Az **elektromos térerősség tehát a potenciáltér negatív gradiense**. A gradienst ∇ szimbólummal (nabla vagy grad) jelöljük.

V GRADIENSE
(derékszögű koordináta-rendszerben)

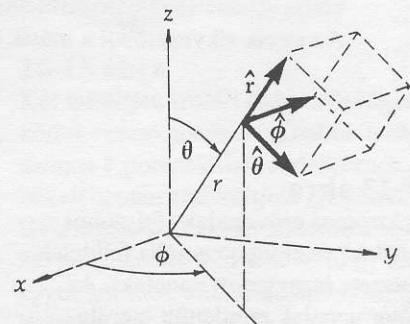
$$\nabla V = - \left(\frac{\partial V}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{z} \right) \quad (26-22)$$

Gömbi koordináta-rendszerben (26-10 ábra) három, egymásra kölcsönösen merőleges \hat{r} , $\hat{\theta}$ és $\hat{\phi}$ egységvektorokat definiálunk. Bizonyítás nélkül közelítjük a gömbi koordináta-rendszerben alkalmazandó gradiens-kifejezést:

V GRADIENSE
(gömbi koordináta-rendszerben)

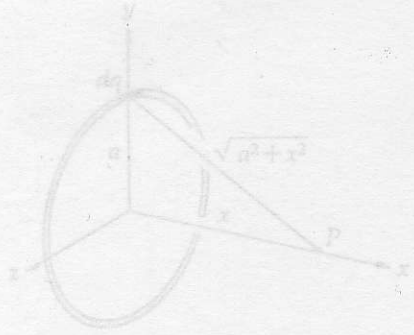
$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \hat{\phi} \quad (26-23)$$

Ezt a jelölésmódot alkalmazva, a képlet általános alakja:



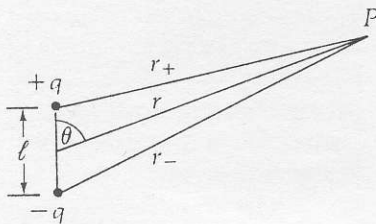
26-10 ábra

Gömbi koordináták. Az egységvektorok \hat{r} , $\hat{\theta}$ és $\hat{\phi}$ egymásra páronként merőlegesek. Ezek mindegyike olyan irányba mutat, amelyek mentén a r , θ és ϕ változók értéke növekszik.



26-8 ábra

A 26-7 példához. A potenciál az egyenletesen töltött vékony gyűrű tengelye mentén.



26-11 ábra

A 26-9 példához.

V ÉS E KÖZÖTTI KAPCSOLAT

$$\mathbf{E} = -\nabla V \quad (26-24)$$

Vegyük észre, hogy milyen kényelmes a vektorok használata: rövid, tömör, és bármely koordináta-rendszerben alkalmazható⁴.

26-9 PÉLDA

- a) Mekkora a V potenciál egy dipólustól nagy távolságban (a dipólust alkotó két töltés távolságánál sokkal nagyobb távolságban)? b) A (26-4) összefüggést felhasználva határozzuk meg az \mathbf{E} elektromos térerősséget a dipólustól nagy távolságban.

MEGOLDÁS

- a) A dipólus potenciálja az öt alkotó két töltés potenciáljának összege. Pontszerű töltés potenciálja $V = kq/r$. Mindkét töltést figyelembe véve, a potenciál a P pontban:

$$V = kq \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right) = kq \frac{r_- - r_+}{r_+ r_-} \quad (26-25)$$

ahol az r_+ és r_- távolságokat a 26-11 ábrán vázolt módon definiáljuk. Ha $r \gg l$, a következő közelítéseket alkalmazzuk: $r_+ r_- \approx r^2$ és $(r_- - r_+) \approx l \cos \theta$. Ezeket a (26-25) egyenletbe behelyettesítve, továbbá figyelembe véve, hogy a dipólusmomentum: $p = ql$, azt kapjuk, hogy

$$V = kq \frac{l \cos \theta}{r^2} = k \frac{p \cos \theta}{r^2} = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{p \cos \theta}{r^2} \quad (26-26)$$

- b) Avégett, hogy kiszámítsuk az \mathbf{E} elektromos térerősség r , θ és ϕ irányú komponenseit, az alábbi parciális deriváltakat kell kiszámítsuk:

$$\frac{\partial V}{\partial r} = - \left(\frac{2p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \right) \quad \frac{\partial V}{\partial \theta} = - \left(\frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right) \quad \text{és} \quad \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0$$

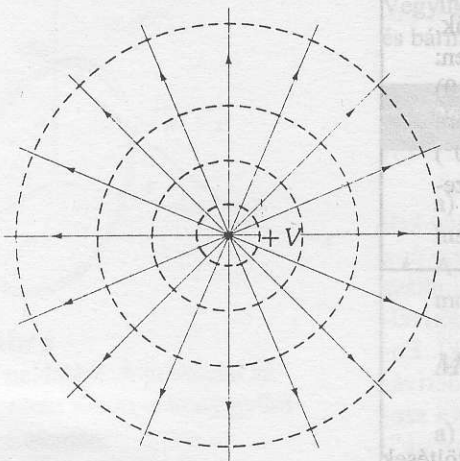
Ezeket a kifejezéseket a (26-24) egyenletbe helyettesítve a gömbi koordinátáktól való függésre azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{E} = - \left[\frac{\partial V}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \hat{\boldsymbol{\phi}} \right] \quad (26-27)$$

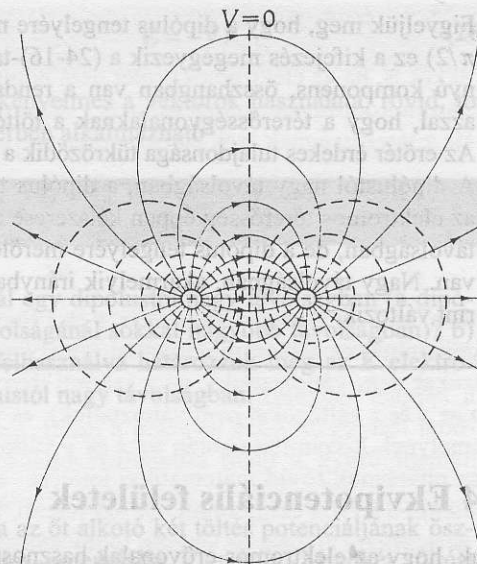
$$\mathbf{E} = - \left(\frac{2p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \right) \hat{\mathbf{r}} + \left(\frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \right) \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (\text{távol a dipólustól})$$

⁴ A ∇ operátor nagyon hasznos segédeszköz, amelyet a fizikában sokszor használunk. Tulajdonképpen a „meredekség” fogalmának általánosítása három dimenzióra. Nagyon érdekes a szintvonalas térképekkel való analógia: a gravitációs potenciál gradiense egy felületen mindig „felfelé”, abba az irányba mutat, amerre a potenciál változása a legnagyobb. Egy elszabadult kódarab abban az irányban gördül le, amerre a felület a legmeredekebb, vagyis $\mathbf{g} = -\nabla U$ irányában. Hasonlóképpen, az elektromos potenciál gradiense

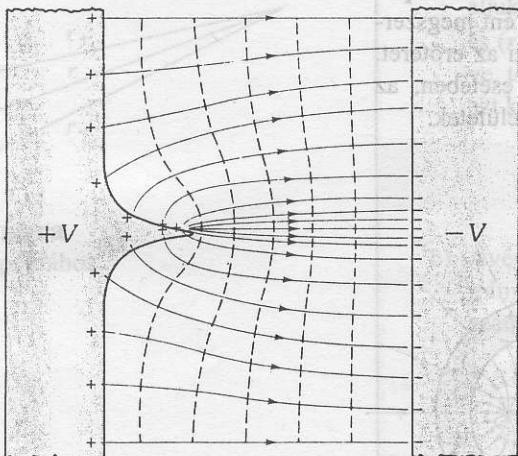
„felfelé” mutat, míg az \mathbf{E} elektromos térerősség „lefelé” – azaz abba az irányba, amerre egy szabad pozitív töltés elmozdulna. További analóg eset az, amikor egy tartomány pontjaiban a hőmérséklet különböző. A tartomány bármely pontján a (skalár) hőmérséklet gradiense olyan vektor, ami a hőárammal éppen ellentétes irányba mutat.



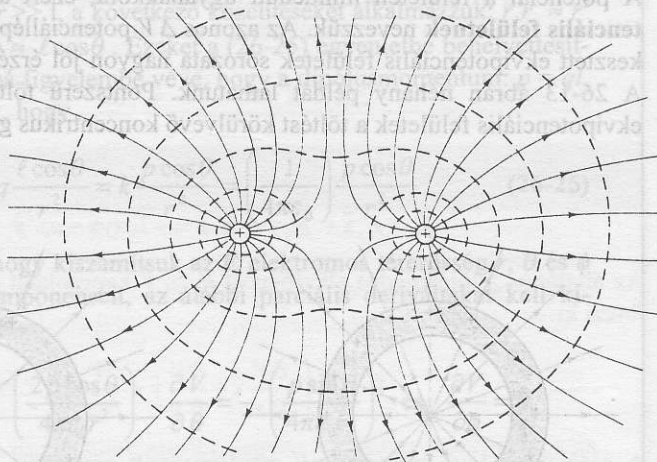
- a) Az ábra síkjára merőleges vezetőn lévő pozitív vonalmenti töltés potenciálja. A vezetőről kiinduló erővonalak a végtelenben lévő negatív töltéseken végződnek.



- b) Az ábra síkjára merőlegesen haladó két vezetőn lévő azonos nagyságú, de ellentétes előjelű vonalmenti töltés potenciálja. A bal oldali vezetőről kiinduló erővonalak a jobb oldali vezetőn végződnek.



- c) Az ábra síkjára merőleges két vezető sík potenciálja ellentétes előjelű felületmenti töltés esetén. Az egyik síkvezetőből a másik felé mutató él áll ki.



- d) Az ábra síkjára merőlegesen haladó két vezetőn lévő azonos nagyságú pozitív vonalmenti töltés potenciálja. Éppen úgy, mint az *a* esetben, az erővonalakat úgy képzeljük el, hogy a végtelenben lévő negatív töltéseken végződnek.

26-13 ábra

Elektromos erővonalak (folytonos vonalak) és ekvipotenciális felületek metszete (szaggatott vonalak). Az erőter vonalak mindenütt merőlegesek az ekvipotenciális felületekre: ezt a tulajdonságot ortogonalitásnak nevezzük.

lenniük. (Ha nem így lenne, akkor E -nek lenne egy, a felülettel párhuzamos komponense, aminek következtében a töltés mozgásához munkavégzésre lenne szükség.) Továbbá, minthogy az erővonalaknak töltéseken kell végződnie, ahol egy erővonal a vezető felületét éri, ott töltésnek kell lennie. Ezen tulajdonságok alapján néhány érdekes állítást tehetünk. Például, ha egy pontszerű töltést szimmetrikusan körbeveszünk egy üreges, vezető gömbhéjjal, akkor az elektromos erőter a gömbhéjon kívül változatlan marad. Továbbá, ha a gömbhéjat már elhelyeztük a pontszerű töltés körül, ez utóbbit belül bárhogy mozgathatjuk, a gömbhéjon kívül az elektromos erőter nem változik (26-12 ábra).

Ezek alapján arra következtethetünk, hogy egy vezető belsejében lévő, töltést nem tartalmazó zárt üregben a térerősség zérus, függetlenül attól, hogy a vezető felületén vannak-e töltések vagy sem. A 26-5 példában már megmutattuk, hogy ez az állítás igaz az üreges vezető gömb esetére. Most tekintsünk egy szabálytalan alakú üreges vezetőt, olyat, mint amit a 26-14 ábrán ábrázolunk. Szerkesszünk Gauss-felületet az üreg belsejében, és alkalmazzuk Gauss törvényét: $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = q' / \epsilon_0$. Minthogy a Gauss-felületen belül nincs töltés, $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = 0$. Vegyük azonban tekintetbe, hogy ebben az esetben az állítás igazolására szimmetria-érveket nem használhatunk fel. (Elképzelhető lenne ugyanis, hogy vannak olyan erővonalak, amelyek metszik a felületet, egyesek belépnek, mások kilépnek, ám az integrál zérus.) Tételezzük fel, hogy egy erővonal belép, (majd kilép) a 26-14 ábrán vázolt, Gauss-felülettel határolt térrészbe. Ekkor egy elektron az A pontnál kiléphetne a vezetőből, az A és B pontok között az erőtér munkát végezhetne rajta, majd ezt követően az elektron ismét beléphetne a vezetőbe B -nél. Az elektront ezután a vezetőben munkavégzés nélkül visszavezethetnénk az A ponthoz (minthogy a vezető ekvipotenciális felület). Ezt a ciklust megismételve az elektron energiája tovább nőne; a rendszer energiája korlátlanul megnövelhető lenne, vagyis elsőfajú perpetuum mobile-t (örökmozgót) készíthetnénk. Ez azonban a termodinamika első főtétele értelmében nem lehetséges. Így kimondhatjuk, hogy egy vezető belsejében lévő, töltést nem tartalmazó zárt üregben a térerősség mindig zérus. Másképpen megfogalmazva, zárt vezető tökéletes elektrosztatikus árnyékoló hatással bír.

Egy másik következtetés, amelyet az erővonalak és ekvipotenciális felületek tanulmányozásából levonhatunk, az, hogy a töltések a vezetők élein, csúcsain gyűlnek össze. Ezt illusztrálандó, tekintsünk két töltött vezető gömböt; legyen az egyik nagyobb a másikonál. Kössük össze őket vezető huzallal. Ekkor a töltések addig vándorolnak, amíg a két gömb potenciálja azonosá nem válik (26-15 ábra). Távolítsuk el ezután a huzalt. (Feltételezzük, hogy a két gömb egymástól elegendően távol van, és így az egyes gömbök töltése a másik gömb töltéseloszlását lényegesen nem befolyásolja.) Egy q töltésű, r sugarú izolált gömb felületén a V potenciál nagysága $V = kq/r$. Minthogy a két töltést időlegesen vezetővel kötöttük össze, potenciáljuk egyenlő:

$$\frac{kq_1}{r_1} = \frac{kq_2}{r_2} \quad (26-28)$$

A σ felületmenti töltéssűrűség az r sugarú gömb felszínén $\sigma = q/4\pi r^2$. Így a (26-28) egyenlet a következő alakra hozható:

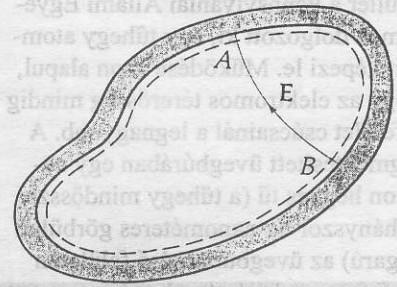
$$r_1 \sigma_1 = r_2 \sigma_2 \quad (26-29)$$

A 25-4 példában úgy találtuk, hogy a σ felületmenti töltéssűrűségű vezető felületének közvetlen környezetében a térerősség $E = \sigma / \epsilon_0$. Ezt a (26-29) összefüggésbe behelyettesítve azt találjuk, hogy

$$E_1 r_1 = E_2 r_2 \quad (26-30)$$

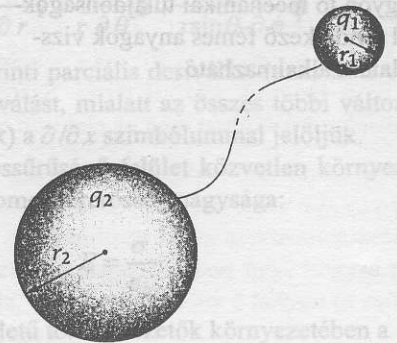
Ez az eredmény általánosítható szabálytalan alakú végtelen hosszú vezetőkre is: az ilyen vezetők felületének közvetlen környezetében ott a legnagyobb a térerősség, ahol a vezető keresztmetszetének a görbületi sugara a legkisebb.⁵ Ennélfogva, E is, σ is nagyon nagy lehet egy nagyfeszültségű berendezés csúcspontjain. Ez problémát okoz, ha a levegőben mindig jelenlevő, kozmi-

⁵ Bizonyos geometriájú vezetők ezen általános szabály alól kivételt képeznek. Bővebben lásd Richard H. Price és Ronald J. Crowley, „The Lightning-rod Fallacy” című cikkében (American Journal of Physics 53, 843 (1985))



26-14 ábra

Az ábrán feltüntetettel ellentétben, egy vezetőben lévő zárt üreg belsejében a térerősség zérus függetlenül attól, hogy a vezető töltött, vagy sem.



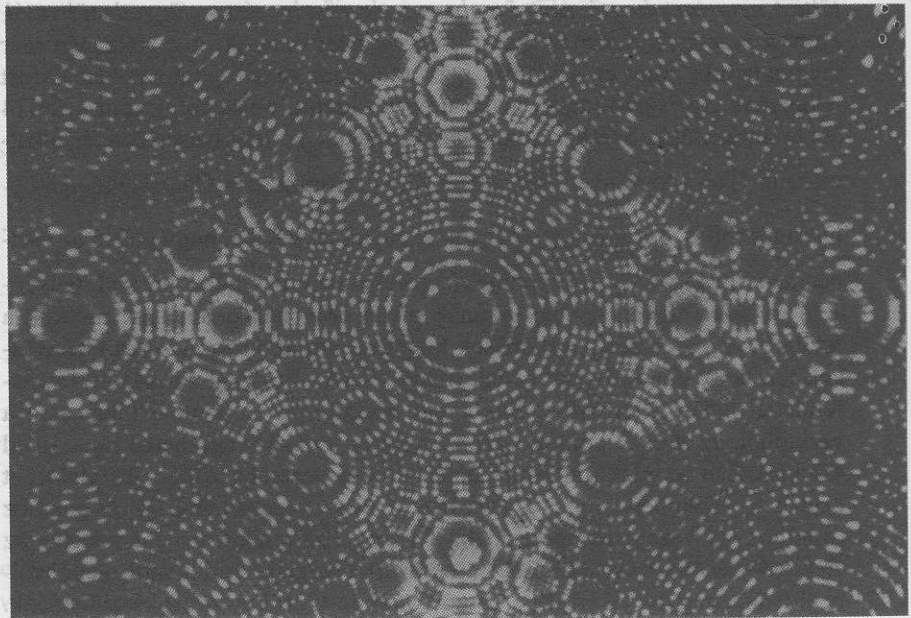
26-15 ábra

Két feltöltött, izolált és huzallal összekötött vezető gömb. A gömbök tehát azonos V potenciállal rendelkeznek. A huzalt ezután eltávolítjuk. (A gömbök távolságának az ábrán láthatónál sokkal nagyobbak kell lennie, hogy az egyes gömbök töltése ne befolyásolja lényegesen a másik gömb szimmetrikus töltéseloszlását.) Ezen eljárás során a töltések úgy oszlanak meg a két gömb között, hogy a kisebbik gömbön a σ felületi töltéssűrűség nagyobb, ennél fogva e felület közvetlen környezetében az elektromos térerősség is nagyobb.

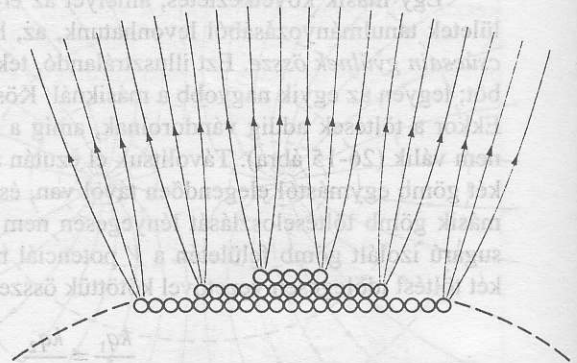
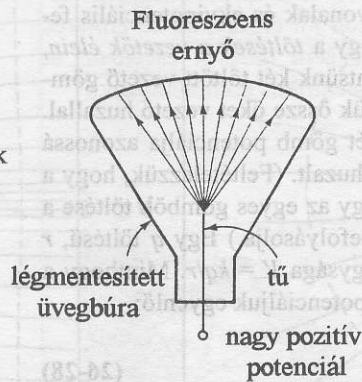
26-16 ábra

A térion-mikroszkóp, amelyet Erwin Müller a Pennsylvanai Állami Egyetemen dolgozott ki, egy tûhegy atomjait képezi le. Működése azon alapul, hogy az elektromos térerősség mindig a felület csúcsainál a legnagyobb. A légmentesített üvegbúrában egy nagyon hegyes tû (a tûhegy mindössze néhányszor tíz nanométeres görbületi sugarú) az üvegbúra belső felületén lévő fluoreszkáló réteghez képest nagy pozitív potenciálon van. A tûhegyen, az egyes kristálylapok élénél lévő atomok alkotta „sarkok” felett különösen erős elektromos térerősség alakul ki. A légüres térbe héliumot vezetnek, melynek atomjai a „sarkoknál” lévő atomok feletti különösen nagy térerősségű erőterbe jutnak. A tûnek elektromos áradó atomok pozitív töltésű hélium ionná válnak, és az erővonalak mentén a fluoreszkáló ernyő felé gyorsulnak, és ott becsapódva az ernyőn fényes foltot keltenek. Minden egyes folt tehát a tûhegy egy atomjának felel meg. Sajnos, a tû felülete környékén lévő nagy elektromos térerősség nagy mechanikai feszültségeket kelt a tûben, emiatt a módszer csak nagyon jó mechanikai tulajdonságokkal rendelkező fémek anyagok vizsgálatára alkalmazható.

Ezek alapján azt következtethetjük, hogy egy vezeti belső felületén lévő



a) Iridiumkristály-tûhegy térion-mikroszkópos képe. Minden egyes fényes folt egy atomnak felel meg.



b) A térion-mikroszkóp.

c) A tûhegy felszínén lévő atomok környezetében kialakuló elektromos erőter egyszerűsített vázlatja.

kus sugárzás által létrehozott töltött ionokat az ellenkező töltésű vezető magához vonzza. A csúcsokon, ahol az elektromos térerősség nagyon nagy, ezek az ionok akkora sebességre gyorsulnak fel, hogy a levegőt alkotó más molekulákkal ütközve, további ionokat keltenek, és így a (viszonylag) jó szigetelő levegőben elektromos kisülés indul meg. A jelenséget *koronakisülésnek* nevezzük és azzal jár, hogy a levegő a csúcsok környékén látható fényel világít az ionok és elektronok újraegyesülése következtében. Száraz levegőben az elektromos kisülés akkor következik be, ha a térerősség kb. 3×10^6 V/m értéknél nagyobb, bár kisebb nyomás esetén (néhány száz pascal nyomáson) a kisülés sokkal kisebb térerősség hatására is megindul. Mindaddig, amíg erre a nyomásfüggésre a mérnökök rá nem jöttek, addig az űrhajókban alkalmazott elektromos áramkörök tervezésénél problémát okozott az, hogy egyes a Földön, kipróbálás során kitűnően működő áramkörök, ívkiülés miatt meghibásodtak, amint az űrhajó a Föld atmoszféráján kívülre került. A nedvesség és a por szintén nagymértékben lecsökkenti a kisülés megindulásához szükséges térerősség nagyságát.

Zivatarok idején, a zivatarfelhők és a föld között nagy potenciálkülönbségek alakulnak ki. A magas épületekre szerelt tűhegyű villámhárítók szerepe nem az, hogy a villámokat „vonzzák”, hanem éppen ellenkezőleg: a földön összegyűlt töltések „folynak ki” a tű hegyén. Ezáltal a kialakult nagy potenciálkülönbségek fokozatosan lecsökkenhetnek (mellesleg, időnként, a „töltés kifolyás” következtében éppen a villámhárítóba csapnak a nagy villámok). A repülőgépeken szintén vannak speciális élek és csúcsok a többlettöltés csökkentésére. A tengeri viharok kitörése előtt előfordul, hogy az árbcok hegyeinél koronakisülés alakul ki. Ez a tengerészek védőszentjéről elnevezett *Szent Elmo tüze*.

Összefoglalás

Az U elektromos potenciális energia:

$$U_b - U_a = - \int_a^b \mathbf{q}_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

A V elektromos potenciál:

$$V_a - V_b = - \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

Fizikai szempontból csak a ΔV potenciálkülönbség (feszültség) lényeges. Minthogy az erőter konzervatív, ΔV értéke tetszőleges a és b közötti út esetében azonos. Véges méretű töltérendszerek esetében a potenciál zéruspontját a végtelen távoli ponthoz rendeljük.

Az 1 elektronvolt (eV) az az energia, amelyet egy, az elektron töltésével megegyező nagyságú töltésű részecske nyer akkor, ha 1 volt potenciálkülönbségű két pont között szabadon gyorsul.

$$1 \text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

Pontszerű töltések esetében ($V \equiv 0$ ha $r \rightarrow \infty$):

$$U = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{qq'}{r} \quad V = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{q}{r}$$

Szimmetrikus töltéeloszlás esetén a V és \mathbf{E} közötti kapcsolat miatt a télerősséget gyakran célszerűbb V meghatározása alapján kiszámítani, mint a Coulomb törvényből.

Kérdések

1. Mi a megkülönböztetés az elektromos potenciális energia különbsége és az elektromos potenciálkülönbség között?
2. A pozitív töltések a pozitív vagy a negatív potenciálú helyek felé mozognak? És az elektronok?
3. Tekintsük át a pontszerű töltésekből álló rendszerben az elektromos erők, erőterekre és potenciálokra vonatkozó törvényeket és összefüggéseket. A tömegpontokból álló rendszerek esetében a gravitációs erők, erőterek, potenciálok és télerősségek között analóg törvényeket és összefüggéseket találtunk. Vizsgáljuk meg, hogy

Integrálalakban

$$V_b - V_a = - \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

Differenciálalakban (egydimenziós esetben)

$$E_x = - \frac{dV}{dx}$$

A gradiensvektor abba az irányba mutat, amerre a skalár függvény változása a legnagyobb. Ezért az \mathbf{E} elektromos télerősség a V potenciál negatív gradiense. Háromdimenziós esetben a gradienst a ∇ („nabla” vagy „grad”) szimbólummal jelöljük.

Derékszögű koordinátarendszerben

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{z}$$

Gömbi koordinátarendszerben

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \hat{\phi}$$

Az x változó szerinti parciális deriválást (azaz az x változó szerinti deriválást, mialatt az összes többi változót állandónak tartjuk) a $\partial/\partial x$ szimbólummal jelöljük.

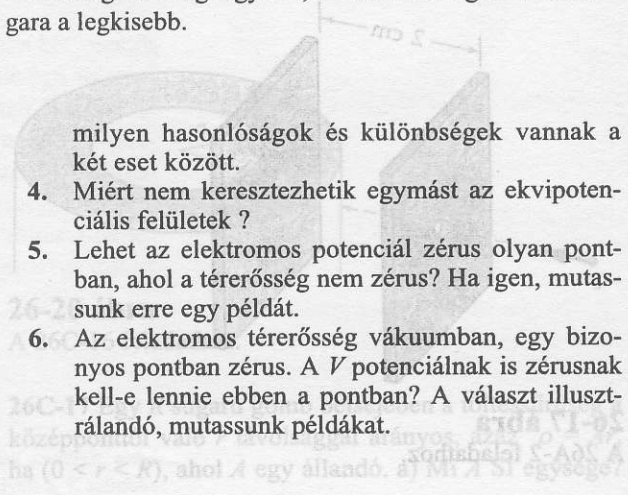
Egy σ töltéssűrűségű felület közvetlen környezetében az \mathbf{E} elektromos télerősség nagysága:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Szabálytalan felületű töltött vezetőik környezetében a télerősség ott a legnagyobb, ahol a felület görbületi sugara a legkisebb.

milyen hasonlóságok és különbségek vannak a két eset között.

4. Miért nem keresztezhetik egymást az ekvipotenciális felületek ?
5. Lehet az elektromos potenciál zérus olyan pontban, ahol a télerősség nem zérus? Ha igen, mutassunk erre egy példát.
6. Az elektromos télerősség vákuumban, egy bizonyos pontban zérus. A V potenciálnak is zérusnak kell-e lennie ebben a pontban? A választ illusztrálандó, mutassunk példákat.



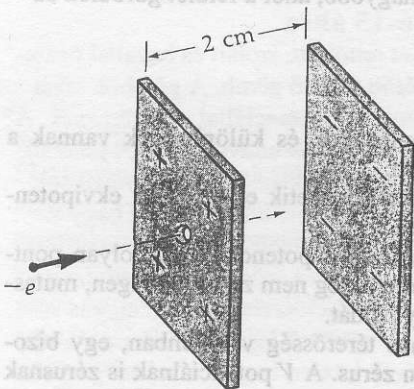
7. Lehet-e az elektromos térerősség zérus olyan pontban, ahol az elektromos potenciál nem zérus? Ha igen, mutassunk erre példát.
8. Miként azt a 16.4 fejezetben megmutattuk, egy egyenletes vastagságú gömbhéj üregében a gravitációs térerősség zérus. Hasonlóképpen, vezető, üreges gömbhéj belsejében az elektromos térerősség zérus. Továbbá, az elektromos térerősség zérus tetszőleges (nem csak gömb) alakú vezető belsejében lévő zárt üregben is. Vajon zérus-e a gravitációs térerősség tetszés szerinti üreges test (például egy üreges kocka) belsejében? Lehet-e olyan pont az ilyen üreg belsejében, ahol a gravitációs térerősség zérus? Vajon mindig, bármely, bármilyen alakú üreges test belsejében található ilyen pont?
9. Az izolált, feltöltött vezető felülete ekvipotenciális felület. Azt jelenti-e ez, hogy a felületi töltéssűrűség mindenütt azonos?
10. Tételezzük fel, hogy egy vezető felületén az elektromos térerősség mindenütt azonos. Mit jelent ez a felületmenti töltéssűrűség és a vezető geometriájának vonatkozásában?
11. A „Faraday-kalitka” olyan doboz, amelynek falai fém dróthálóból vannak. Érzékeny voltmérőt csatlakoztatunk a kalitkán belül lévő szonda és a fémháló közé. Hogyan detektálható ezzel a készülékkel a kalitkán belüli többlettöltés?
12. Miért nem lehet szakadása egy töltéseloszlást jellemző potenciálfüggvénynek?

Feladatok

26.2 Az elektromos potenciál

26A-1 Két, egymással párhuzamos fémlemez 12 voltos elem pólusaihoz csatlakoztatunk. a) Egy nyugalmi helyzetű elektront a negatív lemez mellett elengedünk. Mekkora sebessége lesz a pozitív lemezbe történő becsapódásakor? b) Számítsuk ki az elektron maximális kinetikus energiáját, és adjuk meg eV és joule egységekben is. c) Ha a lemezek távolsága 4 mm, mennyi ideig repül az elektron a lemezek között? d) Ha a lemezek távolsága ettől különböző lenne, változna-e az a) és b) kérdésekre adandó válasz?

26A-2 Két, egymástól 2 cm távolságra elhelyezett, egymással párhuzamos fémlemez között 90 V potenciálkülönbség van (26-17 ábra). A pozitív lemezen lévő kis lyukon keresztül 5×10^6 cm/s sebességű elektron hatol be a lemezek közötti térbe. Számítsuk ki, milyen távolságra közelítheti meg az elektron a negatív lemezt.



26-17 ábra

A 26A-2 feladathoz.

26A-3 A hidrogénatom Bohr-modellje szerint az elektron a proton körül a közöttük ható Coulomb erő hatására 52,9 pm sugarú körpályán kering. (A proton lényegében nyugalomban van, minthogy tömege sokkal nagyobb az elektronénál.) a) Newton második törvényének alkalmazásával számítsuk ki az elektron sebességét. b) Mutassuk ki, hogy az elektromos potenciális energia nagysága kétszerese az elektron kinetikus energiájának. c) Mekkora a rendszer teljes energiája elektronvolt egységekben kifejezve?

26A-4 A hidrogénatom Bohr-modellje szerint az elektron a (nyugvó) proton körül körpályán kering. A körpálya sugara $0,529 \cdot 10^{-10}$ m. Számítsuk ki abban a térészben, ahol az elektron mozog, a) az E térerősség nagyságát, és b) a V elektromos potenciált (legyen $V \equiv 0$ ha $r = \infty$). c) Összehasonlításként közöljük, hogy a levegőben akkor üt át szikra, ha a térerősség a 10^6 V/m értéknél nagyobb. Miért nem kellett ezt figyelembe venni a Bohr-modell megalkotásakor? d) Hasonlítsuk össze az elektron potenciálját egy autóakkumulátor feszültségével.

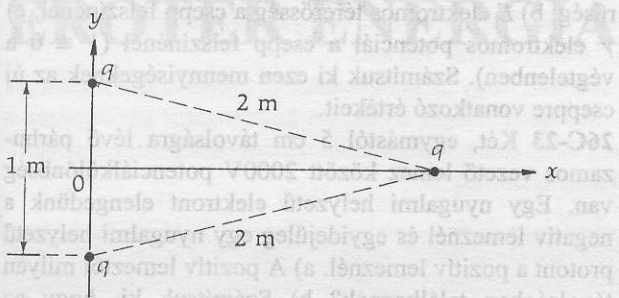
26B-5 Egy a oldalhosszúságú, egyenlőoldalú háromszög minden egyes csúcán $+q$ töltés van. Számítsuk ki a háromszög középpontja és az oldalak felezőpontja közötti ΔV feszültséget. A középpontban, vagy az oldalak közepén nagyobb a potenciál?

26B-6 Egy a oldalhosszúságú négyzet minden egyes csúcán q pozitív töltés van. Számítsuk ki a négyzet középpontja és az oldalak felezőpontja közötti potenciálkülönbséget. Vajon a középpontban, vagy az oldalak felezőpontjában nagyobb-e a potenciál?

26B-7 Mutassuk meg, hogy két pozitív töltésű koncentrikus vezető gömbhéj közül mindig a belső a nagyobb potenciálú, függetlenül az egyes gömbhéjakon lévő (pozitív) töltés nagyságától.

26B-8 A 26-18 ábrán látható egyenlőszárú háromszög mindhárom csúcán $q = 2\mu\text{C}$ töltés van. a) Számítsuk ki ezen töltéselrendezés elektromos potenciális energiáját. (Útmutatás: A töltéseket egyesével, a végtelenből indul-

va, vigyük a háromszög csúcsaihoz. A potenciális energia változása az első töltés elhelyezésekor zérus.) b) Mekkora az E elektromos térerősség az O origóban, amikor mindhárom töltés a helyére került?



26-18 ábra
A 26B-8 feladathoz

26.3 V gradiense

26.4 Ekvipotenciális felületek

26B-9 A tér egy tartományában a volt egységekben kifejezett V potenciált a $V = (3 \text{ V/m}^2)x^2 + (0,2 \text{ V/m})y$ függvény adja meg, ahol x és y méterekben megadott távolságok. Számítsuk ki az $x = 10 \text{ cm}$, $y = 15 \text{ cm}$ koordinátájú helyen lévő elektronra ható erő nagyságát és irányát.

26B-10 Töltött vezető gömb felszínén az elektromos potenciál 200 V ; a gömb középpontjától számított 10 cm távolságban 150 V . Számítsuk ki a) a gömb sugarát és b) a gömb töltését.

26B-11 Két izolált vezető gömbön egyenlő Q_0 töltés van. Az egyik gömb sugara R , a másiké $3R$. A két gömböt összeérintjük, majd elválasztjuk egymástól. Számítsuk ki, hogy ezután mekkora az egyes gömbök töltése.

26B-12 Két egyforma kicsiny fémgömb töltése q_1 , illetve q_2 . Egymást 1 m távolságból $9 \times 10^{-3} \text{ N}$ erővel vonzzák. A gömböket összeérintjük, majd újból egymástól 1 m távolságra helyezük el. Ekkor úgy találjuk, hogy $2 \times 10^{-3} \text{ N}$ erővel taszítják egymást. Számítsuk ki a q_1 és q_2 töltéseket.

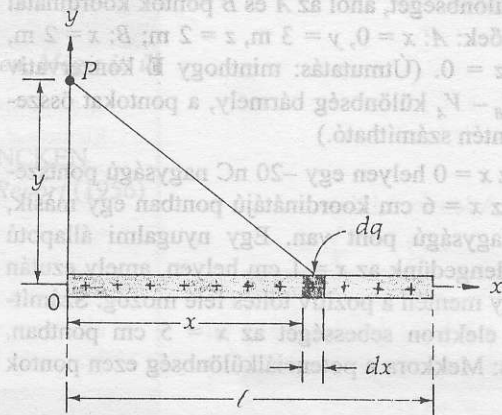
26B-13 Képzeljünk el két üreges, koncentrikus (egy-másba helyezett) fémgömböt. A belső gömb sugara 30 cm , töltése $-80 \mu\text{C}$. A külső gömb sugara 50 cm , töltése $40 \mu\text{C}$. Számítsuk ki a) az elektromos térerősséget és b) a potenciált mindhárom tartományban: a külső gömbön kívül, a gömbök között, és a belső gömb belsejében. c) Ábrázoljuk az $E(r)$ és a $V(r)$ függvényeket.

26B-14 Két $+q$ töltés az x tengely mentén, az $x = \pm a$ helyeken helyezkedik el. a) Vázzuk az xy síkban a térerősségeloszlást. b) Anélkül, hogy pontosan meghatároznánk, vázzuk a $V(x)$ potenciáloszlást az x tengely mentén (legyen $V = 0$ ha $x = \pm\infty$). c) A $V(x)$ függvény grafikonja felhasználásával magyarázzuk el, hogy hogyan lehet megszerkeszteni az x tengely mentén az

$E(x)$ térerősségeloszlást. Készítsük el vázlatosan az $E(x)$ térerősségeloszlás-ábrát is. d) Ismételjük meg a fentieket, de ellentétes előjelű, $+q$ és $-q$ töltésekkel.

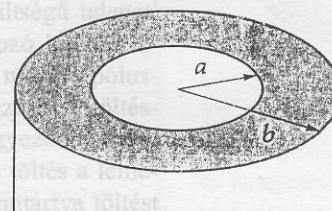
További feladatok

26C-15 Egy l hosszúságú, vékony szigetelő rúdon egyenletesen elosztva Q töltés van. Számítsuk ki a V elektromos potenciált a rúd végétől y távolságban, a 26-19 ábrán vázolt helyen lévő P pontban.



26-19 ábra
A 26C-15 feladathoz.

26C-16 A 26-20 ábrán vázoltak szerint, végtelen hosszúságú, a belső és b külső sugarú hengerpalástban (a cső belsejében) pozitív töltéseloszlás van. A ρ töltéseloszlás nem egyenletes, az r sugárral fordítottan arányos, vagyis az $a < r < b$ tartományban $\rho = k/r$, ahol k egy SI mértékegységgel kifejezett állandó. Számítsuk ki az elektromos térerősséget az a) $r \leq a$, b) $a \leq r \leq b$, c) $r \geq b$ tartományokban. d) Számítsuk ki az elektromos potenciált ugyanezekben a tartományokban úgy, hogy a potenciál zéruspontja, $V = 0$ az $r = d \gg b$ helyen (a csőtől nagy távolságra) legyen.



26-20 ábra
A 26C-16 feladathoz.

26C-17 Egy R sugarú gömb belsejében a töltéssűrűség a középponttól való r távolsággal arányos, azaz $\rho = Ar$, ha $(0 < r < R)$, ahol A egy állandó. a) Mi A SI egysége?

b) Mekkora a gömb teljes Q töltése A -val és R -rel kifejezve? (Útmutatás: követve a 26-4 példa megoldását, összegezzük a dr vastagságú gömbhéjak dq töltését.) c) Gauss törvényét felhasználva számítsuk ki a gömb belsőjében, a középponttól r távolságra az E térerősséget. d) Számítsuk ki a V potenciált r függvényében a gömbön belül is, kívül is (legyen $V=0$ a végtelenben).

26C-18 Végezzük el az előző feladatot $\rho = Ar^2$ töltéeloszlást feltételezve.

26C-19 Elektromos térerősséget az $E = 2000\hat{x} + 3000\hat{y}$ képlet ad meg, ahol a mennyiségek SI mértékegységben adottak. Számítsuk ki az A és B pontok közötti ($V_B - V_A$) potenciálkülönbséget, ahol az A és B pontok koordinátái a következők: $A: x = 0, y = 3 \text{ m}, z = 2 \text{ m}$; $B: x = 2 \text{ m}, y = 1 \text{ m}, z = 0$. (Útmutatás: minthogy E konzervatív erőter, a $V_B - V_A$ különbség bármely, a pontokat összekötő út mentén számítható.)

26C-20 Az $x = 0$ helyen egy -20 nC nagyságú pontszerű töltés, az $x = 6 \text{ cm}$ koordinátájú pontban egy másik, $+10 \text{ nC}$ nagyságú pont van. Egy nyugalmi állapotú elektront elengedünk az $x = 1 \text{ cm}$ helyen, amely ezután az x tengely mentén a pozitív töltés felé mozog. Számítsuk ki az elektron sebességét az $x = 5 \text{ cm}$ pontban. (Útmutatás: Mekkora a potenciálkülönbség ezen pontok között?)

26C-21 Az atommag cseppmodellje szerint egyes atommagok nagy energiájú oszcillációi az atommagot két, különböző nagyságú részre és további néhány neutronra törhetik szét. A magtöredékek a Coulomb-taszítás eredményeként kinetikus energiához jutnak. Számítsuk ki az urán atommagjából képződő két gömb alakú darab elektromos potenciális energiáját (MeV egységekben), melyek töltése $+38e$ illetve $+54e$, sugara pedig $5,5 \times 10^{-15} \text{ m}$, illetve $6,2 \times 10^{-15} \text{ m}$. Tételezzük fel, hogy az egyes részek töltése egyenletesen oszlik el a gömbökben, és a két gömb kezdetben egymást érinti. (Az

eredmény közelítőleg megegyezik az uránhasadás során észlelt kinetikus energiával.)

26C-22 Két egyforma, $-q$ töltésű esőcsepp összeütkezve egy nagyobb cseppet alkot. Az ütközés előtt a cseppek jellemzői a következők: a) σ felületmenti töltéssűrűség; b) E elektromos térerősség a csepp felszínénél; c) V elektromos potenciál a csepp felszínénél ($V \equiv 0$ a végtelenben). Számítsuk ki ezen mennyiségeknek az új cseppre vonatkozó értékeit.

26C-23 Két, egymástól 5 cm távolságra lévő párhuzamos vezető lemez között 2000 V potenciálkülönbség van. Egy nyugalmi helyzetű elektront elengedünk a negatív lemeznél és egyidejűleg egy nyugalmi helyzetű protont a pozitív lemeznél. a) A pozitív lemeztől milyen távolságban találkoznak? b) Számítsuk ki, hogy az egyes részecskék mekkora sebességgel csapódnak a szemközti lemezbe. c) Számítsuk ki, hogy mekkora a mozgási energiájuk (eV és J egységekben) a lemezbe történő becsapódáskor.

26C-24 Egy a sugarú vékony korong egyik oldalán egyenletes felületmenti töltéssűrűség van. A korongba $a/2$ sugarú lyukat fúrunk. a) Felhasználva a szuperpozíció elvét és a 26-8 példa eredményét, számítsuk ki a V elektromos potenciált a korong tengelye mentén, x távolságra a töltések síkjától (legyen $V \equiv 0$ a végtelenben). b) Mekkora a lyuk középpontjában a potenciál? c) Mekkora a térerősség a lyuk középpontjában?

26C-25 Tekintsünk egy elektromos kvadrupólust, azaz három töltés alábbi konfigurációját: legyen $-2q$ töltés az origóban, $+q$ töltés $y = +\ell/2$ helyen, és még egy $+q$ töltés $y = -\ell/2$ helyen. Számítsuk ki a potenciált a) az x tengely mentén, és b) az y tengely mentén. c) Mutassuk meg, hogy a kvadrupólustól nagy távolságban (azaz ha x is, y is sokkal nagyobb mint ℓ) a potenciál a távolság köbének reciprokával változik. (Útmutatás: alkalmazzuk a $1/\sqrt{1+a^2} \approx 1 - a^2/2$ közelítést.)



26C-17 Egy R sugarú gömb belsőjében a töltéssűrűség a középponttól való r távolsággal arányos, azaz $\rho = kr$ (ahol k egy állandó.) a) Mekkora az E térerősség?

AZ 24–45 FEJEZETEK PÁRATLAN SZÁMOZÁSÚ FELADATAINAK MEGOLDÁSAI

XXIV. Fejezet

- 24A-1 649 kg
 24A-3 $2,27 \times 10^{39}$
 24A-5 110 N 157° -ra a +x tengelytől
 24B-7 $2,51 \times 10^{-10}$
 24B-9 $x = 0,817$ m
 24B-11 9,55 elektront
 24A-13 $4,90 \times 10^{-3}$ C
 24B-15 $y = (qE_0/2mv_0^2)x^2$
 24A-17 $1,70 \times 10^{-10}$ m
 24B-19 $Q/4\pi\epsilon_0 d(d+L)$
 24B-21 A válasz adott.
 24C-23 A válasz adott.
 24C-25 A válasz adott.
 24C-27 $W = Q^2/8\pi\epsilon_0 R$
 24C-29 3,67 cm
 24C-31 $2\pi\sqrt{ml/2qE}$
 24C-33 $d = \frac{\pi}{2\omega} \left[v_1 + \frac{eE_0}{m\omega\sqrt{2}} \right] l = \frac{3\pi}{2\omega} \left[v_1 + \frac{eE_0\sqrt{2}}{m\omega} \right]$
 24C-35 a) $E_y = \lambda L/4\pi\epsilon_0 a\sqrt{L^2 + a^2}$
 b) $E_x = (\lambda/4\pi\epsilon_0) \left[(1/a) - (1/\sqrt{L^2 + a^2}) \right]$
 24C-37 A válasz adott.
 24C-39 A válasz adott.
 24C-41 $E = (Q/4\pi^2\epsilon_0 R_2) \sin(l/2R)$, a megmaradó körívteől kifelé irányítva

XXV. Fejezet

- 25A-1 a) zérus b) $3q/\epsilon_0$ c) $-2q/\epsilon_0$
 25A-3 $7,50 \times 10^{-2}$ N·m²/C
 25A-5 a) zérus b) σ/ϵ_0
 25B-7 a) px/ϵ_0 b) $pd/2\epsilon_0$
 25A-9 a) σ/ϵ_0 b) $\sigma/2\epsilon_0$
 25A-11 $-1,15 \times 10^{-9}$ C/m²

- 25B-13 b) $1,38 \times 10^7$ elektron/m³ hiány
 25C-15 a) C/m² b) $Q = k2\pi L(b-a)$
 c) $E = (k/\epsilon_0)(1-a/r)$
 25C-17 A válasz adott.
 25C-19 $E(\pi R^2)$

XXVI. Fejezet

- 26A-1 a) $2,05 \times 10^6$ m/s
 b) 12 eV, $1,92 \times 10^{-18}$ J c) 3,89 ns
 26A-3 a) $2,19 \times 10^6$ m/s c) $-13,6$ eV
 26B-5 $0,0415$ kq/a; a középpontban
 26B-7 A válasz adott.
 26B-9 $1,01 \times 10^{-19}$ N, $18,4^\circ$ az x tengelyhez képest
 26B-11 $Q_0/2, 3Q_0/2$
 26B-13 A gömb belsejében $E = 0$, $V = -(140/3\pi\epsilon_0) \mu V$
 a gömbök közt
 $E = (80/4\pi\epsilon_0 r^2) \mu N/C$ befelé,
 $V = -(1/4\pi\epsilon_0)(80/r - 40/0,5) \mu V$
 a gömbökön kívül $E = (40/4\pi\epsilon_0 r^2) \mu N/C$,
 befelé,
 $V = -(40/4\pi\epsilon_0 r) \mu V$
 26C-15 $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 l} \ln \frac{l + \sqrt{l^2 + y^2}}{y}$
 26C-17 a) C/m⁴ b) $Q = A\pi R^4$
 c) $E = Ar^2/4\epsilon_0$ d) $r \geq R$ esetén $V = AR^4/4\epsilon_0 r$
 $r \leq R$ esetén $V = (A/12\epsilon_0)(4R^3 - r^3)$
 26C-19 2000 V
 26C-21 A válasz adott.
 26C-23 a) $2,72 \times 10^{-5}$ m
 b) $2,65 \times 10^7$ m/s és $6,19 \times 10^5$ m/s
 c) 2000 eV, $3,20 \times 10^{-16}$ J
 26C-25 a) $(q/2\pi\epsilon_0) \left\{ [x^2 + (l/2)^2]^{-1/2} - 1/x \right\}$
 b) $(q/4\pi\epsilon_0) \left\{ (y+l/2)^{-1} + (y-l/2)^{-1} - 2/y \right\}$