



Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Villamosmérnöki és Informatikai Kar
Egészségügyi mérnök Szak
Írányítástechnika és Informatika Tanszék

Benyó Balázs – Juhász Ferencné – Szilágyi Béla

Folyamatszabályozás

12. Összefoglalás

12. Füzet

Folyamatszabályozás

2013

MATLAB

[http:// iit.bme.hu/egeszsegugyi-mernok/folyamatszabalyozas/](http://iit.bme.hu/egeszsegugyi-mernok/folyamatszabalyozas/)

A tananyag összefoglalása

Móttó helyett

Bevezetésként álljon itt Dr. Tuschák Róbert és Fodor György munkáikból egy ide illő, a lényegét kiválóan és tömören megragadó két idézet:

„Az **irányítás** egy folyamatba való beavatkozás adott cél elérése érdekében. Szűkebb értelemben rendszerint technológiai, tágabb értelemben bármilyen **fizikai, kémiai, biológiai, gazdasági folyamatról** van szó. A folyamat változását a folyamat **mozgásának** tekintjük, amely külső és belső hatások következtében áll elő. Mind a jellemzőket, amelyekben a mozgás megnyilvánul, mind pedig a külső hatásokat **jelek** testesítik meg. A jeleknek van fizikai megjelenési formája – áram, feszültség, hőmérséklet, elmozdulás, stb. – ez a **jelhordozó**, és van **információ tartalma**, amely a jel által képviselt hatásról tudósít (pl. mutatja, hogy egy hálózat valamelyik ágában hogyan változik az áram, vagy hogy milyen tápfeszültség változás éri kívülről a hálózatot). Az irányítás általános módja az, hogy egy e célra létesített külső irányító berendezés mért vagy más úton szerzett adatok alapján megváltoztatja a folyamat közvetlenül befolyásolható jellemzőit, és ezen keresztül eléri más jellemzőknek a kívánt mozgását is. Az irányított folyamat és az irányító berendezések együttese az **irányítási rendszer**. A **rendszer technika** a folyamatok anyagi minőségétől elvonatkoztatva a rendszerek közös jellegzetességeivel foglalkozik, és azokból von le következtetéseket (pl. az irányító berendezés struktúrájára vonatkozóan). ... Az irányítási rendszer technika a jelekkel végzett műveletek tudománya. Irányításelméletnek is szokás nevezni, amely az irányítás technikának egyik fontos, de nem kizárólagos része. Kifogástalanul működő rendszer létrehozásához ezen kívül nem nélkülözhető a folyamatnak, a felhasznált eszközök működésének, a mérés technikának, a szoftver technikának, stb. az ismerete. Figyelembe kell venni a környezeti, biztonsági, technológiai és gazdasági szempontokat is.” (Dr. Tuschák Róbert: **Szabályozástechnika**. Műegyetemi Kiadó. 1994)

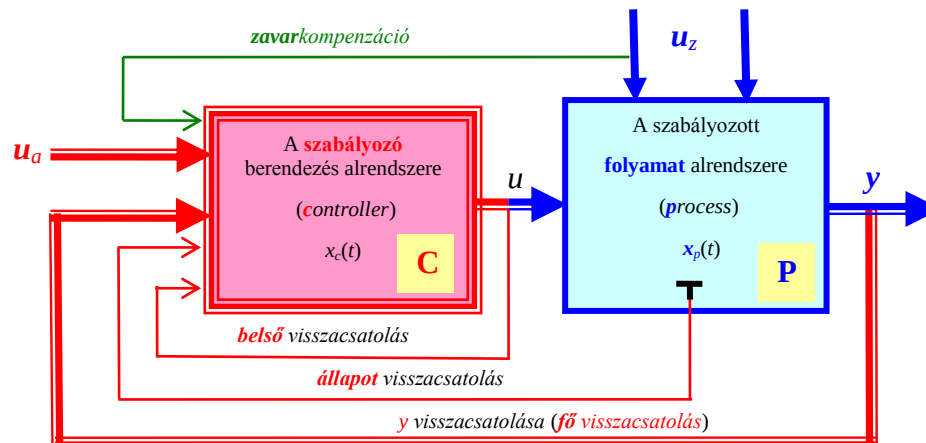
„A valóságos fizikai, kémiai, műszaki, gazdasági folyamatokat **modellek** segítségével írjuk le. A modellalkotás során **leegyszerűsítjük** a jelenségeket, miáltal lehetővé tesszük a folyamatokban résztvevő mennyiségek értelmezését és a kapcsolataik leírását. Az egyszerűsítés szükségszerűen oda vezet, hogy **a modell nem írja le kifogástalanul** a folyamatokat. Nagyon nehéz és nem egyértelműen megoldható feladat olyan modellt alkotni, amely a vizsgált folyamatot elfogadható mértékig helyesen és ugyanakkor a rendelkezésre álló eszközökkel kezelhető módon írja le. ... Mivel nem foglalkozunk a folyamatok valódi tartalmával, ezért a tárgyalt fogalmak és módszerek meglehetősen általánosak. ... Az általánosságnak viszont az az ára, hogy a tárgyalt folyamatok és a bennük szereplő változók **elvontak**. Amikor a továbbiakban arról beszélünk, hogy egy u gerjesztőjel hatására (esetleg sok közbülső jel közvetítésével) milyen y válasz jön létre, akkor az Olvasó érdeklődése és ízlése szerint gondolhat egy erő hatására fellépő más erőre, elmozdulásra vagy elektromos feszültségre, elektromos áram hatására létrejövő elektromos feszültségre vagy hőmérsékletre, pénzbefektetéshez tartozó árukészletre és így tovább.” (Fodor György: **Jelek és rendszerek**. Műegyetemi Kiadó. 2006)

A „Folyamatszabályozás” című füzetsorozatban folytatólagosan tárgyaltuk a téma alapfogalmait. Az „Összefoglalás” részben a legfontosabb *elvekre* és szabályozási *struktúrák* tulajdonságaira ismételtén, a lényegét kiragadva és néhány kiegészítést téve visszatérünk, remélve, hogy ezzel, és az előzőekre való hivatkozással a közölt ismeretanyagot elmélyítjük.

Megjegyzés

Az irányítási rendszer részei (alrendszerei) az **irányított folyamat** (process, **P**), és az irányítást végző **irányító berendezés** (controller, **C**). E két rész szoros együttműködéséből áll az **irányítási rendszer**, amelynek tulajdonságait egy absztrahált *hatásvázlat* felhasználásával tárgyalhatjuk. A hatásvázlat elemei az $i(t)$ bemenő (input)–, és $o(t)$ kimenő (output) jelekkel rendelkező **MIMO** (**multi input, multi output**, több bemenetű, több kimenetű) *jelátvivő tagok*, amelyek *dinamikus* tulajdonságokkal rendelkező objektumokat, és ezek *ok-okozati* relációit szimbolizálják a bemenőjeleik (gerjesztések, kényszerfüggvények), és kimenőjeleik (válaszok) között. A folyamat bemenőjelei az $u(t)$ **irányító jelek**, az $u_a(t)$ **zavaró jelek**, kimenőjelei az $y(t)$ **irányított jellemzők**. A zavaró jelek *nemkívánatos* befolyást gyakorolnak az irányított jellemzőkre, és ezt a nemkívánatos hatást az irányító alrendszer az u irányító jelek *szándékolt* módosításával igyekszik elhárítani. Az irányító berendezést absztraháló tag elsődleges bemenőjelei az irányított jellemzők kívánt értékét (az $y_A(t)$ **alapértékeket**) megjelenítő $u_a(t)$ **alapjelek**, és az irányított jellemzők **y** *tényleges értékei*, kimenőjelei az **u** **irányító jelek**. Az u előállítása az irányított jellemzők kívánt–, és *tényleges értékének különbségén* (a $h(t)=y_A(t)-y(t)$ *hibán*) alapszik, a folyamatba

történő, időben folyamatos beavatkozás irányát és mértékét alapvetően a $h(t)$ hibajel szabja meg. Az irányítás megvalósításának ezt a formáját **szabályozásnak** nevezzük. Ha a rendszer egyetlen y szabályozott jellemzőt és egyetlen u_a alapjelet (és y_A alapértéket) tartalmaz, *egyváltozós*-, egyébként *többváltozós* szabályozásról beszélünk. Igényesebb követelményeket kielégítő szabályozások esetében az u irányító jel előállításának *szabályozási algoritmusába* bemenő jelekként bevonható a folyamat x_p állapotváltozója (*állapot visszacsatolás*), az u_z zavaró jelek egy része (*zavarkompenzáció*), sőt, maga az u irányító jel is (*belső visszacsatolás*). A szabályozási rendszer jelátviteli viszonyait absztraháló hatásvázlatot az 1. ábra mutatja.



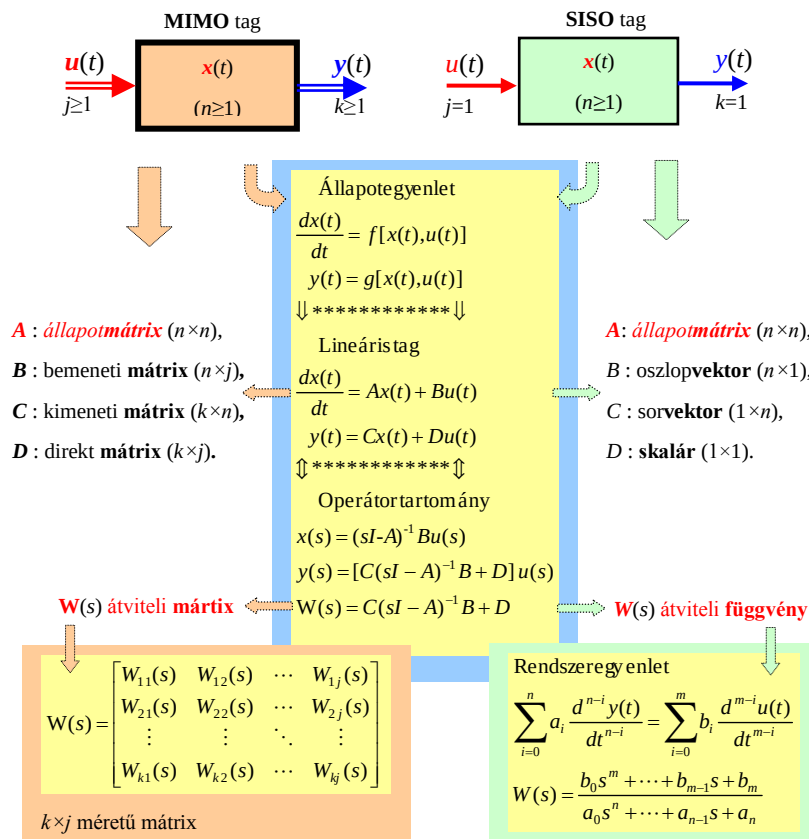
1. ábra A szabályozás hatásvázlata

A szabályozási rendszer *dinamikus alrendszerei* tehát a szabályozott folyamat (*process*, **P**), és a szabályozó berendezés (*controller*, **C**). Mindkét alrendszert egy-egy téglalappal jelölt ábra jelképezi, a téglalapokba befelé felé mutató, nyíllal ellátott vonalak a **bemenőjeleket**, a téglalapokból kifelé mutató és szintén nyíllal ellátott vonalak a **kimenőjeleket** jelentik. A bemenő–kimenő jelekkel ellátott téglalapok a **jelátvivő tagok**, és azt a függvénykapcsolatot szimbolizálják, amelyek megmutatják, hogy a bemenőjelek, mint okok (*független* változók) miként befolyásolják a kimenőjeleket, az okozatokat (a *függő* változókat). A szabályozott folyamatot absztraháló tag kimenőjele az y szabályozott jellemző (ami egyébként a szabályozó egyik bemenőjelét is alkotja), a szabályozó berendezést jelképező tagé az u irányítójel (ami egyben a folyamat egyik bemenőjele is). Az ok→okozati relációk a két alrendszer vonatkozásában:

$$\begin{aligned} \langle u(t), u_z(t), x_p(t) \rangle &\Rightarrow y(t) \\ \langle u_a(t), y(t), u(t), u_z(t), x_c(t), x_p(t) \rangle &\Rightarrow u(t) \end{aligned}$$

Azok a függvénykapcsolatok, amelyek megmutatják, hogy a folyamat y és a szabályozó u kimenőjeleit (amelyek egyébként a folytonos t időnek is a függvényei) milyen módon befolyásolják az u , u_z , illetve az u_a , y , u , u_z közvetlen bemenőjelek illetve a szabályozó és a folyamat x_c és x_p *belső* állapotváltozói (amelyek szintén függvényei időnek), bonyolult, általában differenciálegyenleteket tartalmazó összefüggések is lehetnek¹. A kimenőjelek és a bemenőjelek közötti függvénykapcsolatok jellegzetes tulajdonsága, hogy bennük a jelek időfüggvényeinek túlmenően azok különféle rendszámú *idő szerinti differenciálhányadosai* is szerepet játszanak. A teljes irányítási rendszer leírásához az alrendszerek, leírásán keresztül vezet az út. Miután időben lejátszódó hatásterjedési jelenségekről van szó, a dinamikus rendszerekben lejátszódó események leírásának módszere a **differenciálegyenlettel** történő matematikai *modellelés*. Ennek általános formája az **állapotegyenletek** alakjában megjeleníthető, az u bemenő-, és az y kimenő jelek közötti függvénykapcsolatot az x állapotváltozók közvetítésével leíró matematikai képlet. A több bemenetű, több kimenetű **MIMO** (*multi input, multi output*) tag és az egy bemenetű, egy kimenetű **SISO** (*single input, single output*) tag leírására a 2. ábra jelöléseit és az ott megadott egyenletekben felírható matematikai modelljeit használjuk.

¹ Például az, hogy egy erőmű (irányított folyamatot alkotó) atomreaktor–gőzturbina–villamos generátor blokkrendszerében a reaktor *neutronfluxusa* miként befolyásolja az erőátviteli hálózatra kiadott *villamos teljesítményt*, vagy az inzulinrezisztencia miatt injekció formájában beadott *inzulin mennyiség* miként hat a *vércukorszint* aktuális értékére, bonyolult függvénykapcsolatokkal adhatók meg (és ez utóbbi napjainknak egyik fontos kutatási tématerülete is).



2. ábra MIMO és SISO tagok különféle matematikai modelljei

Az általános MIMO tag matematikai modellje a j számú u bemenőjelet, a k számú y kimenőjelet, az n számú x állapotváltozót tartalmazó és az időtartományban értelmezett *nemlineáris állapotegyenlet*. Ez n számú *elsőrendű* közönséges differenciálegyenlet és k számú nemlineáris algebrai egyenlet képletszerű megadását jelenti. Ebből (egy munkaponti linearizálás végrehajtásának eredményeként) származtatjuk a lineáris tag *lineáris állapotegyenletét*, és ennek az s Laplace operátor tartományban értelmezhető **W(s) átviteli mátrixát**. A SISO tag n -edrendű differenciálegyenlete (a rendszeregyenlet) és **W(s) átviteli függvénye** szintén a nemlineáris állapotegyenletből eredeztethető. A szabályozási rendszerek analízise, és szintézise előismereteket igényel. Miután dinamikus rendszerek matematikai modelljeinek vizsgálatáról van szó, ezért alapvetően matematikai ismeretekre van szükség. Ezen belül is elsősorban a függvényanalízisre, a komplex függvénytanra, a mátrixalgebrára, a Laplace, a Fourier és a Z transzformációk eljárásaira, de főleg a **differenciálegyenletekkel** és a **differenciaegyenletekkel** kapcsolatos témakörökre.

A szabályozásban (*closed-loop control*, **feedback control**) a **negatív visszacsatolás** a meghatározó alapelv, aminek lényege, hogy a szabályozott jellemző $y_A(t)$ *előírt*² és $y(t)$ *tényleges* értékének a *különbsége* alapján valósul meg az $u(t)$ irányító jel közvetítésével a folyamatba történő *automatikus* (emberi közreműködés nélküli) és az időben **folyamatos beavatkozás**. Ennek célja, hogy az $y(t)$ szabályozott jellemző (*controlled variable*, *output signal*) a lehető legkisebb hibával kövesse az $y_A(t)$ alapértéket (*reference signal*, *set point*), *bármilyen* hatás miatt is változik meg a szabályozott jellemző *tényleges* $y(t)$ értéke³. Az $u(t)$ irányító jel megfelelő mértékű megváltoztatásával érhető el a $h(t) = y_A(t) - y(t)$ között keletkezett eltérésnek (*error signal*) a lehető *legrövidebb idő* alatti mérséklése, vagy

² Az $y_A(t)$ *előírt* értéket (az *alapértéket*) a szabályozási kör $u_A(t) = y_A(t) A_E$ alapjele jeleníti meg (A_E az érzékelés átviteli tényezője). Az $y_A(t)$ alapértéket **referencia** jelnek és az y szabályozott jellemző *kívánt* (előírt) *értékének* is nevezik.

³ Szabályozás esetében tehát létre kell jönnie a $h(t) = y_A(t) - y(t)$ szabályozási eltérésnek ahhoz, hogy az eltérés megszüntetése érdekében történő beavatkozás megvalósuljon.

megszüntetése. Ennek eszköze az $u(t)$ irányító jellel történő és egy *forszírozott* mértékű beavatkozás, majd ennek alkalmas módon történő „visszavétele”. A *visszacsatolás* elve a kozmikus mozgásokban és az élővilágban annak keletkezése pillanatától valószínűsíthetően jelen van. Felismerését már az időszámítás előtti kultúrákban az ember *ösztönösen* is hasznosította, *tudatos* alkalmazásának elterjedése az ipari forradalom korszakára (az 1700-as évekre) esik, és a számítógépek megjelenésével (az 1950-es évek), valamint ennek a szabályozási hatásláncban való közvetlen szerepeltetésével teljesedett ki (számítógépes folyamatirányítás). A kezdetekben a gyakorlat által felvetett problémák megoldásai vezettek el a szabályozástechnikai alkalmazásokhoz (pl. gőzgép fordulatszám-szabályozása centrifugális ingával annak céljából, hogy a terhelésnövekedés miatt bekövetkező fordulatszám csökkenés megszűnjön (Watt, 1750)). A rendszerelmélet kialakulásával napjainkban már az elméleti eredmények is segítik a megfelelő minőséget biztosító szabályozási rendszerek gyakorlati kialakítását (pl. adaptív-, robosztus-, predikciós szabályozások, folyamat identifikáció, stb.). Az *állapotvisszacsatolás* elvére épülő pólusáthelyező-, és egy célfüggvény minimalizálásával megfogalmazott *optimális* (LQR *Linear Quadratic Regulator*) szabályozások szintén a negatív visszacsatolás alkalmazásának alapelvein működnek. Az 1. ábrán vázolt szabályozási struktúrában egy általános követelményként megfogalmazható célkitűzés: **ismert folyamatmodell esetében olyan szabályozási algoritmus létrehozása, melynek alkalmazásával az $u(t)$ irányító jel úgy befolyásolja az $y(t)$ szabályozott jellemzőt, hogy az a lehető legkisebb hibával kövesse az $y_A(t)$ alapértéket (követési feladat), és a lehető legnagyobb mértékben és gyorsan hárítsa el az $u_z(t)$ zavarás szabályozott jellemzőre vonatkozó nemkívánatos hatását (zavarelhárítási feladat).**

Megjegyzés

A *negatív* visszacsatolású szabályozási hatáslánc (szabályozási kör) felszakításakor a hatáslánc i (input) bemenetére egy külső jelforrásból adott jel – a hatáslánc *különbségképző* tagjának következményeként – a felszakítás helyének o (output) kimenetére a bemenő jeltől *ellentétes előjellel* érkezik vissza. Ez a tulajdonság eredményezi azt, hogy annak az u_z zavarásnak a hatása, amely az y szabályozott jellemzőt csökkentené, olyan hatást vált ki a folyamat u bemenetén, ami ennek kiküszöbölésére irányul. *Pozitív* visszacsatolás esetében ettől eltérően a felnyitott hurkú hatásláncon áthaladó jel a felszakítás kimenetére a bemenőjellel *azonos* előjellel érkezik, ezért az ilyen tulajdonsággal rendelkező hatáslánc *szabályozási feladatok ellátására alkalmatlan*. Ennek oka az, hogy a pozitív visszacsatolású rendszerben nem a zavarójelnek a szabályozott jellemzőre gyakorolt *nemkívánatos* hatásának *mérséklése*, hanem ellenkezőleg, eme nemkívánatos hatásnak további *növekedése* valósulna meg. Ez természetesen nem jelenti azt, hogy a pozitív visszacsatolás jelenlétével ne kellene számolni, ez a *labilis* folyamatok belső hatásmechanizmusában természetszerűen jelen van. Az is előfordulhat, hogy *szándékolt* alkalmazásával a szabályozási hatáslánc belső részében alakítunk ki – különféle célok (pl. erősítési tényező növelése, integráló tulajdonságú szerv létrehozása, nemlineáris hatások mérséklése, stb.) elérése érdekében – pozitív és negatív visszacsatolású *lokális* hurkokat anélkül, hogy ezzel az eredő szabályozási hatáslánc negatív visszacsatolását megváltoztatnánk. A visszacsatolás jellegzetes tulajdonsága a *labilitásra való hajlam*, ami a pozitív visszacsatolás esetében erőteljesebben jelenik meg. Ha a zárthurkú hatásláncban pl. kizárólag *holtidő* okozta késleltetés játszik szerepet, akkor a negatív visszacsatolású *labilis* szabályozási rendszerben a jelek egyre *növekvő* amplitúdójú *lengésekkel* tartanak egy „katasztrofális helyzet” kialakulása felé, a *labilis* pozitív visszacsatolás esetében ez a jelenség a jelek *monoton, exponenciális növekedésében* mutatkozik meg. A gyakorlatban előforduló esetekben a jelek növekedésének a védelmi rendszer „megszólalása”, vagy a hatáslánc valamelyik elemének *telítődése* szab határt, ami az üzemszavar okozta hatásokat ugyan mérsékelheti, de üzemszerű állapotnak ez a szituáció **nem** tekinthető. Mindezek mellett a negatív visszacsatolásnak a gyakorlati alkalmazásokban fontos tulajdonsága, hogy megfelelő mértékű alkalmazásával – a zavarelhárítási feladat ellátásán túlmenően – az önmagukban *labilis* folyamatok *stabilizálására* is alkalmassá tehető (lásd az állapotvisszacsatolás témakörének feldolgozását).

Az egyváltozós szabályozási rendszerek tárgyalását megelőzően áttekintjük a dinamikus rendszer matematikai modelljével kapcsolatos alapfogalmakat, ezen belül is azt a legfontosabb részeket, hogy mit értünk a jelátvivő taggal leírt rendszer *stabilitásán*, illetve az

állapotváltozó adott $x(0)$ kezdeti feltételének és $u(t)$ gerjesztésnek ismeretében hogyan lehet meghatározni a rendszermodell $x(t)$ állapotváltozóját és az $y(t)$ válaszát. Tapasztalni fogjuk, hogy kizárólag a *lineáris* rendszermodell esetében lesz egyszerű dolgunk, nemlineáris esetben a stabilitásvizsgálat igencsak körülményes lehet, és a differenciálegyenlet megoldására is általában *numerikus* módszereket kell alkalmaznunk.

Megjegyzés

A Laplace transzformáció – amely az *állandó együtthatójú lineáris* differenciálegyenletek és differenciálegyenlet rendszerek megoldásának egy általánosan használt, hatékony és egyszerű módszere – egy *funkcionál*, amely a t időtartományban értelmezett $f(t)$ ún. *belépő időfüggvény*hez (a tárgyfüggvényhez, $f(t)=0$ ha $t<0$) egy, az s komplex operátor tartományában értelmezett $F(s)$ **operátor** függvényt (a képfüggvényt) rendeli: $f(t) \rightarrow L\{f(t)\}=F(s)$, illetve az s operátor tartományban értelmezett $F(s)$ **operátor**függvényből az $f(t)$ **időfüggvényt** származtatja: $F(s) \rightarrow L^{-1}\{F(s)\}=f(t)$ (*inverz Laplace transzformáció*). A leképezés szabályai:

$$f(t) \rightarrow L\{f(t)\} = F(s) = \int_{t=0}^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

$$F(s) \rightarrow L^{-1}\{F(s)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st} ds = \sum_{i=1}^n \operatorname{res}_{(p_i)} F(s) e^{st}$$

Az $L\{f(t)\}=F(s)$ definíciós képlet *improprius* integrál. Konvergenciájának elegendő feltétele, ha az $f(t)$ tárgyfüggvény szakaszonként folytonos és elegendően nagy t -re $|f(t)| < M \exp(at)$, és M, a pozitív állandók. (Pl. $L\{1(t)\} = 1/s$, $L\{1(t-T_h)\} = \exp(-sT_h)/s$, $L\{e^{at}\} = 1/(s-a)$, illetve $L^{-1}\{1/s^2\} = t$, $L^{-1}\{a/[s(s+a)]\} = 1 - \exp(-at)$, $L^{-1}\{1/(1+sT)^2\} = (t/T^2)\exp(-t/T)$, stb). Az *inverz* transzformáció vonalintegrálját zárt görbe menti integrálra lehet visszavezetni, és ennek kiszámítására a komplex függvénytan *residuum* tételét⁴ lehet felhasználni. A Laplace transzformáció alkalmazásával a t időtartományban megadott lineáris **differenciálegyenletet** az s operátor tartományban **algebrai** egyenletté lehet *egyszerűsíteni*. Az s tartományban az adott $u(s)$ gerjesztésre keletkező $x(s), y(s)$ válaszok lineáris algebrai egyenletekkel történő meghatározása a transzformáció

$$L\{Ax(t)+Bu(t)\} = AL\{x(t)\} + BL\{u(t)\} = Ax(s) + Bu(s)$$

$$L\{dx(t)/dt\} = sx(s) - x(0)$$

linearitási tételén és **differenciálási** szabályán alapszik. Az $x(s)$ és $y(s)$ ismeretében az $x(t)$ és $y(t)$ időfüggvények *inverz Laplace* transzformációval határozhatók meg ($x(t)=L^{-1}\{x(s)\}$, és $y(t)=L^{-1}\{y(s)\}$). Az *inverz* transzformáció néhány fontosabb szabálya a linearitás

$$L^{-1}\{Cx(s)+Du(s)\} = CL^{-1}\{x(s)\} + DL^{-1}\{u(s)\} = Cx(t) + Du(t)$$

tétele, és a konvolúció (*Faltung*) tétele. Ez utóbbi szerint az $y(s)=W(s)u(s)$ szorzatfüggvény *inverz* transzformáltja az $L^{-1}\{W(s)\}=w(t)$ és az $L^{-1}\{u(s)\}=u(t)$ tárgyfüggvények $w(t)*u(t)$ **konvolúciója** (vagyis *nem* a tárgyfüggvények $w(t)u(t)$ szorzata !!!):

$$L^{-1}\{W(s)u(s)\} = w(t) * u(t) = \int_{\tau=0}^t w(\tau)u(t-\tau)d\tau = \int_{\tau=0}^t w(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

A konvolúció tétele mellett, ha az *inverz* transzformálandó függvény $y(s)=W(s)u(s)=B(s)/A(s)$ olyan algebrai tört, amelyben a nevező n fokszámú $A(s)$ karakterisztikus polinomjának p_i gyöke k_i multiplicitású, az $y(t)$ időfüggvény kifejezése (*inverz* transzformáció *többszörös* pólusok esetén):

$$y(t) = L^{-1}\{y(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} y(s)e^{st} ds = \frac{1}{2\pi j} \oint_c \frac{B(s)}{A(s)} e^{st} ds = \sum_{i=1}^n \operatorname{res}_{(p_i)} \frac{B(s)}{A(s)} e^{st}$$

$$\text{ahol } \operatorname{res}_{(p_i)} \frac{B(s)}{A(s)} e^{st} = \lim_{s \rightarrow p_i} \left[\frac{1}{(k_i-1)!} \frac{d^{k_i-1}}{ds^{k_i-1}} \left((s-p_i)^{k_i} \frac{B(s)}{A(s)} e^{st} \right) \right]$$

⁴ Ha egy $f(s)$ komplex függvény egy c zárt görbe által határolt tartományban véges számú p_i szinguláris pontot kivéve mindenütt analitikus, akkor a c görbe mentén vett vonalintegrálja azonos a p_i pontokban vett *residuumok* összegének $2\pi j$ -szeresével.

Miután a definíciós integrál integrandusának $\exp(-st)$ exponenciális tényezőjében a t idő mértékegysége sec ($\dim[t]=\text{sec}$) és a $-st$ exponensnek *dimenziótlan*nak kell lennie, ezért az s Laplace operátor $1/\text{sec}$ dimenzióval rendelkezik ($\dim[s]=\text{sec}^{-1}$). Az s komplex változó a differenciálás-, az $1/s$ az integrálás Laplace operátora.

A dinamikus rendszer matematikai modellje

A szabályozási rendszer elméleti analíziséhez célszerű a tényleges fizikai, kémiai, biológiai, élettani, gazdasági, stb. dinamikus folyamatoktól (a modellezni kívánt objektumoktól) elvonatkoztatni, és ezeket – ha erre lehetőség van – a *matematikai modelljeikkel* helyettesíteni. Ezzel a „szerkezetileg” igen *sokféle* szabályozási rendszerek *egységes* matematikai tárgyalásának lehetőségét teremthetjük meg (ez a sokféleség elsősorban a szabályozott folyamatok különbözőségeiből származik, a szabályozási algoritmust realizáló *technikailag megvalósított* szabályozó berendezés viszont általában egységes elvekre és szerkezeti kialakításokra épül). A matematikai modellnek a megalkotása – különösen a folyamatot leíró alrendszer esetében – nem egyszerű feladat, és azzal is számolni kell, hogy a másodlagos jelenségek elhanyagolása miatt ez a matematikai modell nem tudja teljeskörűen jellemezni a tényleges fizikai rendszert. A szabályozás hatásláncában szerepet játszó szabályozó berendezés és a szabályozott folyamat *alrendszerei* egymással szoros *kölcsönhatásban*⁵ lévő rendszerek (lásd az 1. ábrát), és természetesen matematikai modelljeikre is ez a *kölcsönhatás* a jellemző. A folyamat és a szabályozó berendezés matematikai leírásának együttese a teljes visszacsatolt rendszer statikus és dinamikus tulajdonságait is – a fizikai működéssel több-kevesebb összhangban – megadják (*modellalapú* leírásra épülő analízis és szintézis). A szabályozási hatásláncban lévő szervek, vagy ezeknek egy *készülékben* összevont része, önmagukban is alkothatnak *lokális*, alárendelt visszacsatolt hurkokat (pl. a helyzetbeállító, a szabályozó, a kaszkádszabályozás, stb.), és az egyes fizikai alrendszerek matematikai modellalkotásában is megjelenik a pozitív, vagy a negatív visszacsatolás (lásd a későbbiekben ismertetésre kerülő példákat). A dinamikus rendszerekben az $u(t)$ gerjesztések (bemenőjelek) hatására a folytonos t időben lejátszódó tranzienst folyamatok zajlanak, és ezeket általában az $x(t)$ állapotváltozók közvetítésével az $y(t)$ válaszok (kimenőjelek) időfüggvényei jelenítik meg.

Az **egy** bemenetű ($j=1$), **egy** kimenetű ($k=1$) és tetszőleges $n \geq 1$ rendszámú **SISO lineáris dinamikus rendszerek** esetében az $u(t)$ bemenőjel, és az $y(t)$ kimenőjel közötti függvénykapcsolatot – az objektum matematikai modelljének linearizálását⁶ követően és az $x(t)$ állapotváltozó közvetítő hatását mintegy kiküszöbölve – a $d^{(n)}y(t)/dt^n$ ún. vezető együtthatójára normalizált⁷ és

$$\begin{aligned} \frac{d^{(n)}y(t)}{dt^n} + h_1 \frac{d^{(n-1)}y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + h_{n-1} \frac{dy(t)}{dt} + h_n y(t) = \\ = g_0 \frac{d^{(m)}u(t)}{dt^m} + g_1 \frac{d^{(m-1)}u(t)}{dt^{m-1}} + \dots + g_{m-1} \frac{du(t)}{dt} + g_m u(t) \end{aligned}$$

⁵ Ez a *kölcsönhatás* azt jelenti, hogy a szabályozó alrendszerének u **kimenőjele** (az irányító jel) egyben a folyamat egyik **bemenőjele**, illetve a folyamat y **kimenőjele** (a szabályozott jellemző) egyben a szabályozó egyik **bemenőjele** (negatív visszacsatolt eredő rendszer).

⁶ A fizikai objektum eredetileg *nemlineáris* matematikai modelljének linearizálását – melynek eredménye a lineáris rendszeregyenlet vagy a lineáris állapotegyenlet – egy későbbi fejezetben ismertetjük.

⁷ A normalizálás jelentése: a normalizálatlan differenciálegyenletben az $a_0 d^{(n)}y(t)/dt^n$ tényező $a_0 \neq 0$ együtthatójával elosztjuk a rendszeregyenlet mindkét oldalát, ezzel a $d^{(n)}y(t)/dt^n$ tényező vezető együtthatója az *egység* lesz. Az irodalom a rendszeregyenletben az indexek *fordított sorrendjét* is használja.

alakban felírható, implicit, ***n***-edrendű, állandó együtthatójú, lineáris **differenciálegyenlet** (a *rendszer egyenlet*) definiálja. Ennek egy „más alakban” megjelenített – a differenciálegyenlet mindkét oldalának (zérus kezdeti feltételek mellett) Laplace transzformációjából származtatható – és vele egyenértékű (az $y(s)$ -re nézve explicit) **algebrai** kifejezése:

$$y(s) = W(s)u(s) = \underbrace{\frac{G(s)}{H(s)}}_{W(s)} u(s) = \frac{g_0 s^m + g_1 s^{m-1} + \dots + g_{m-1} s + g_m}{\underbrace{s^n + h_1 s^{n-1} + \dots + h_{n-1} s + h_n}_{W(s)}} u(s) = g_0 \underbrace{\frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}}_{W(s)} u(s)$$

Ennek alapján az $y(s)$ kimenő- és az $u(s)$ bemenő jelek Laplace transzformáltjainak $y(s)/u(s)$ hányadosaként definiálható a **SISO** tag **$W(s)=y(s)/u(s)$ átviteli függvénye** (*transfer function*), ami a szabályozástechnika egyik legfontosabb fogalma. A rendszeregyenlet, illetve az átviteli függvény h_i , g_i együtthatói *valós* állandók és realizálhatósági okok miatt **$n \geq m$** . A $W(s)$ matematikai alakja polinomok hányadosait tartalmazó *algebrai tört*, vagy a $G(s)$ számláló és $H(s)$ nevező z_i és p_i gyökeit tartalmazó ún. *zérus-pólus alakú* képlet. Az átviteli függvény szabályos (*proper*), ha a $G(s)$ polinom m fokszáma azonos a $H(s)$ polinom n fokszámával: $m=n$, és szigorúan szabályos (*strictly proper*), ha $m < n$. Ez utóbbi esetben a p_i pólusok száma *több* mint a z_i zérusoké, az $n-m$ különbségük a $W(s)$ átviteli függvény *pólustöbblete* (*pole access*). A szabályozott folyamatokat modellező átviteli függvény általában szigorúan szabályos, *pólustöbblete* ≥ 1 . A $G(s)$ és $H(s)$ polinomok relatív primek, ha nincs közös osztójuk, vagyis nincs egymással azonos z_i zérusuk és p_i pólusuk. Az egyváltozós rendszerek analízisében az átviteli függvénynek alapvető jelentősége és szerepe van. Az átviteli függvény

$$H(s) = s^n + \mathbf{h_1} s^{n-1} + \dots + \mathbf{h_{n-1}} s + \mathbf{h_n} = (s - \mathbf{p_1})(s - \mathbf{p_2}) \dots (s - \mathbf{p_n})$$

nevezője a **karakterisztikus polinom**, és ennek **p_i** gyökei a jelátvivő tag stabilitását és a dinamikus tulajdonságait alapvetően befolyásolják. Minden esetben tartsuk szem előtt, hogy az *átviteli függvény* lényegét tekintve a lineáris **SISO** jelátvivő tag ***n***-edrendű *differenciálegyenletének* egy vele egyenértékű, de más alakja, amit a mindkét alakban egyaránt szereplő g_i és h_i paraméterek is mutatnak.

Megjegyzés

A *rendszer egyenletnek* egy további kifejezése is értelmezhető, amikor is az $y(t)$ kimenőjel – az *inercia* (tehetetlenségből származó) típusú késleltetéseken túlmenően – a jelterjedés *véges sebességéből* származtatható és egy T_h *holtidővel* jellemzett *késleltetést* is tartalmazva válaszol az $u(t)$ bemenőjel által kiváltott hatásra. Ekkor a rendszeregyenlet és az ennek megfelelő átviteli függvény matematikai kifejezései:

$$\begin{aligned} \frac{d^{(n)} y(t)}{dt^n} + h_1 \frac{d^{(n-1)} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + h_{n-1} \frac{dy(t)}{dt} + h_n y(t) &= g_0 \frac{d^{(m)} u(t - T_h)}{dt^m} + g_1 \frac{d^{(m-1)} u(t - T_h)}{dt^{m-1}} + \dots + g_{m-1} \frac{du(t - T_h)}{dt} + g_m u(t - T_h) \\ \Downarrow \text{*****} \Downarrow \\ y(s) = W(s)u(s) &= \underbrace{\frac{G(s)}{H(s)}}_{W(s)} e^{-sT_h} u(s) = \frac{g_0 s^m + g_1 s^{m-1} + \dots + g_{m-1} s + g_m}{\underbrace{s^n + h_1 s^{n-1} + \dots + h_{n-1} s + h_n}_{W(s)}} e^{-sT_h} u(s) = g_0 \underbrace{\frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}}_{W(s)} e^{-sT_h} u(s) \end{aligned}$$

A *holtidős*, *lineáris* tag átviteli függvényében a $G(s)/H(s)$ algebrai tört (és az ehhez rendelhető *zérus-pólus* eloszlás) kifejezése mellett az $\exp(-sT_h)$ *transzcendens* tényező is megjelenik. A holtidős tag $u(t)=1(t)$ ugrásjelre adott $y(t)=v(t)$ válasza (*átmeneti* függvénye) egy olyan időfüggvény, amely a $0 < t < T_h$ időintervallumban zérus, tehát a látszat az, mintha a $t=0$ időpontban belépő bemenőjel hatására a kimenőjel T_h ideig **nem** reagálna. A $t > T_h$ időben az y választ az átviteli függvény algebrai tört tényezője alakítja. A $W(s)$ átviteli függvényben a holtidős tényező megjelenése – különösen akkor, ha ez a zárthurkú hatáslánc belsejében van jelen – az analízisben, a szintézisben és a fizikai működésben komoly gondokat okozhat. Itt említjük meg, hogy egy belépő $f(t)$

időfüggvénynek a pozitív idő irányában T_h -val történő *eltolásával* előállított $f(t-T_h)$ tárgyfüggvény Laplace transzformáltja:

$$L\{f(t-T_h)\} = L\{f(t)\} \exp(-sT_h), \text{ pl. } L\{\delta(t-T_h)\} = L\{\delta(t)\} \exp(-sT_h) = \exp(-sT_h)$$

A **több** ($j > 1$ számú) bemenetű, **több** ($k > 1$ számú) kimenetű és tetszőleges $n \geq 1$ rendszámú **MIMO lineáris** rendszer esetében az $u(t) = [u_1(t) \dots u_j(t)]^T$ bemenőjel vektor, és az $y(t) = [y_1(t) \dots y_k(t)]^T$ kimenőjel vektor közötti függvénykapcsolatot az n számú *állapotváltozó* komponensből álló $x(t) = [x_1(t) \dots x_n(t)]^T$ *állapotvektor* közvetítésével (az állapotváltozók $x(0)=0$ kezdeti értékei mellett) a

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \\ \Updownarrow \text{*****} \Updownarrow \\ x(s) &= (sI - A)^{-1} Bu(s) \\ y(s) &= W(s)u(s) = \underbrace{[C(sI - A)^{-1}B + D]}_{W(s)} u(s) \end{aligned}$$

vektor–mátrix alakban megadható **differenciálegyenlet rendszer** (az *állapotegyenlet*) és az ezt kísérő *kimeneti algebrai egyenletrendszer* írja le⁸. Az operátor tartományban az $u(s)$ bemenőjel vektor és az $y(s)$ kimenőjel vektor közötti függvénykapcsolatot a $k \times j$ számú skálár átviteli függvényt tartalmazó **$W(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ átviteli mátrix** definiálja. Az állapotteret leírásban **A** az **állapotmátrix** (mérete: $n \times n$), **B** a **bemeneti mátrix** (mérete: $n \times j$), **C** a **kimeneti mátrix** (mérete: $k \times n$), és **D** a **direkt mátrix** (mérete: $k \times j$) általában *valós* elemeket tartalmazó *paramétermátrixok*, n az állapotegyenlet *rendszáma*. Miután a **SISO** tag a **MIMO** tag speciális esete, a **SISO** tag n -edrendű differenciálegyenlete (a rendszeregyenlet) állapotteret leírással (állapotváltozókkal, állapotegyenlettel és kimeneti egyenlettel) is megadható⁹ (ennek előnye, hogy az *egyetlen*, de n -edrendű differenciálegyenletet n számú *elsőrendű* differenciálegyenletből álló differenciálegyenletrendszer helyettesítheti, aminek kezelése jelentősen egyszerűbb). A felírt lineáris matematikai modellek rendszerint egy nemlineáris modell *linearizálásából* származnak, és egy munkapont kis környezetében jellemzik az objektum statikus és dinamikus viselkedését. Az **LTI (Linear Time-Invariant)** modell alapvető tulajdonsága, hogy a t időtartományban értelmezett matematikai modell mellett megadhatjuk ennek az s Laplace operátor tartományban felírható alakjait is (pl. a **MIMO** tag **$W(s)$ átviteli mátrixát**, vagy a **SISO** tag $W(s) = y(s)/u(s)$ *átviteli függvényét*). Ennek révén az állapotegyenlet (n számú, de *elsőrendű* differenciálegyenlet tartalmazó differenciálegyenlet-rendszer), illetve a rendszeregyenlet (*egyetlen*, de n -edrendű differenciálegyenlet) *időtartománybeli* nehézkes kezelését megkerülve, az s Laplace operátor *tartományában* a lényegesen egyszerűbb *algebrai egyenletrendszerekkel*, illetve egyenletekkel dolgozhatunk.

⁸ Az n számú elsőrendű, állandó együtthatójú, lineáris differenciálegyenletből (az állapotegyenletből) és a k számú lineáris, algebrai, kimeneti egyenletből álló egyenletrendszer együttest a lineáris, időinvariáns, kauzális dinamikus rendszer *állapotteret leírásának* vagy *állapotteret reprezentációjának* is nevezik (*state-space system*). Az $u(t)$, $x(t)$, $y(t)$ jelek oszlopvektorok, amelyeket sorvektorok transzponáltjaiként is jelölhetjük. Koordinátákban is felírható kifejezését a későbbiekben részletezzük.

⁹ Az állapotteret leírásnak fontos tulajdonsága, hogy az $x(t)$ állapotvektor révén a dinamikus rendszer *belső hatásmechanizmusát* is feltárja.

Megjegyzés

A **SISO** tag $2n+1$ számú g_i , h_i paraméteret tartalmazó *rendszer egyenlete* (az n -edrendű differenciálegyenlet) különféle (elvileg végtelenül sokféle, a rendszer egyenlettel **egyenértékű**) *állapotváltozós alakokban* is megadható (lásd az *átviteli függvény* különféle felbontásait). Egyfajta általánosan felhasznált szokásos állapotváltozós leírások az un. első, és a második *Frobenius* alakok. A **SISO** tagot leíró állapotváltozós matematikai modell B , C , D paramétermátrixai és ezek méretei *speciálisak*. Az A mátrix (mérete $n \times n$), de B oszlopvektor (mérete $n \times 1$), C sorvektor (mérete $1 \times n$), D skalár (mérete 1×1). Levezetés nélkül adjuk meg a **SISO** tag *rendszer egyenletének* *Frobenius* alakokban felírható *állapotteret* *reprezentációit* és ennek A_F , B_F , C_F , D_F illetve A_F^* , B_F^* , C_F^* , D_F^* paramétermátrixait. Az első alakban az $u(t)$ gerjesztéstől a $dx(t)/dt$ állapotsebesség vektornak csak az n sorszámu komponense függ (lásd a B_F bemeneti oszlopvektort), a második alakban az $y(t)$ kimenőjel meghatározásához csak az $x^*(t)$ állapotvektor $x_n^*(t)$ n sorszámu komponensének ismerete szükséges (lásd a $C_F^* = B_F^T = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1]$ kimeneti sorvektort).

Rendszer egyenlet:

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + h_1 \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + h_n y(t) = g_0 \frac{d^n u(t)}{dt^n} + g_1 \frac{d^{n-1} u(t)}{dt^{n-1}} + \dots + g_n u(t)$$

↓ ***** ↓

Első *Frobenius* alak (x állapotváltozóval):

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -h_n & -h_{n-1} & -h_{n-2} & \dots & -h_1 \end{bmatrix}}_{A_F} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B_F} u(t)$$

$$y(t) = \underbrace{[g_n - g_0 h_n \quad g_{n-1} - g_0 h_{n-1} \quad \dots \quad g_1 - g_0 h_1]}_{C_F} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \underbrace{g_0}_{D_F} u(t)$$

↑ ----- ↓

Második *Frobenius* alak (x^* állapotváltozóval):

$$A_F^* = A_F^T \quad B_F^* = C_F^T \quad C_F^* = B_F^T \quad D_F^* = D_F^T = g_0$$

Bár az első és a második alak $x(t)$ illetve $x^*(t)$ állapotváltozói egymástól *eltérnek*, az $y(t)$ kimenőjel és az $u(t)$ bemenőjel közötti függvénykapcsolatot leíró rendszer egyenlet (vagy az ennek megfelelő átviteli függvény) mindkét modell esetében természetesen *azonos*:

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = C_F(sI - A_F)^{-1}B_F + D_F = C_F^*(sI - A_F^*)^{-1}B_F^* + D_F^* = \frac{g_0 s^n + g_1 s^{n-1} + \dots + g_n}{s^n + h_1 s^{n-1} + \dots + h_n}$$

Annak indoka, hogy a **SISO** tag egyetlen, n -edrendű differenciálegyenletet jelentő matematikai modelljét gyakran az n számú *elsőrendű* differenciálegyenletet tartalmazó állapotegyenlet alakjára vezetjük vissza egyrészt az, hogy a *látszólag* komplikáltabb állapotegyenlet matematikai kezelése a rendszer egyenletet kezeléséhez képest lényegesen *egyszerűbb*, másrészt az állapotteret leírás a rendszer *belső struktúráját* (az $x(t)$ vagy $x^*(t)$ állapotváltozók megjelenítésével) is részleteiben feltárja és áttekinthetővé teszi¹⁰. A *Frobenius* alak paramétermátrixaiból láthatjuk, hogy az ezekben szereplő adatok a rendszer egyenlet h_i ($i=1,2,\dots,n$) és g_i ($i=0,1,2,\dots,n$) *valós* paramétereit tartalmazzák. Figyeljük meg, hogy az első *Frobenius* alak állapotmátrixának utolsó sorában a *rendszer egyenlet* $s^n + h_1 s^{n-1} + \dots + h_{n-1} s + h_n$ karakterisztikus polinomjának *negatív* h_i együtthatói állnak (ennek a polinomnak az $s=p_i$ gyökei azonosak az A_F állapotmátrix λ_i sajátértékeivel, amelyek a rendszer egyenletével leírt rendszer transziens viselkedését befolyásolják). A rendszer egyenletből, illetve az ennek megfelelő átviteli függvényből származtatható első *Frobenius* alakot *irányíthatósági* kanonikus alaknak, a

¹⁰ Különösen így van ez, ha a rendszer egyenletet olyan állapotegyenlet alakra hozzuk, melynek állapotmátrixa *diagonális*, főátlójában az állapotmátrix λ_i sajátértékeivel (lásd *kanonikus transzformáció*, az állapotváltozók *szétcsatolása*). Ekkor a paramétermátrixok komplex elemeket is tartalmazhatnak.

másodikat *megfigyelhetőségi* kanonikus alaknak is nevezik. A *Frobenius* alakok mellett egyéb, a rendszeregyenlettel egyenértékű állapotterezs reprezentációk is konstruálhatók¹¹.

A dinamikus **MIMO** rendszernek általában $j > 1$ számú $u_i(t)$ bemenőjele, $n \geq 1$ számú $x_i(t)$ állapotváltozója és $k > 1$ számú $y_i(t)$ kimenőjele van (de speciális esetben természetesen $j=1$ és $k=1$ mellett **SISO** – egy bemenetű, egy kimenetű $n \geq 1$ rendszámú – rendszerről is lehet szó). A fizikai objektum *rendszeregyenlete*¹², vagy *állapotegyenlet reprezentációja*, a rendszer matematikai modellje, amit a **lineáris, időinvariáns, kauzális**¹³ rendszer esetében az *átviteli függvény* vagy az *átviteli mátrix* is helyettesíthet. A rendszeregyenlet általában egy n -edrendű ($n \geq 1$), az $u(t)$ bemenő-, és az $y(t)$ kimenő jeleket és ezek $u^{(i)}(t) = d^{(i)}u(t)/dt^i$, $y^{(i)}(t) = d^{(i)}y(t)/dt^i$ differenciálhányadosait is tartalmazó differenciálegyenlet. Az állapotegyenlet $n \geq 1$ számú *elsőrendű*, az $u_i(t)$ bemenő jeleket, az $x_i(t)$ állapotváltozókat valamint a $dx_i(t)/dt$ állapotsebességeket tartalmazó közös differenciálegyenletből álló *differenciálegyenlet rendszer* (az egyes $dx_i(t)/dt$ állapotsebességek *mindegyike* az $u_i(t)$ bemenő jelek és az $x_i(t)$ állapotváltozók *mindegyikének* a függvénye), amit a k számú az $y_i(t)$ kimenő jeleket meghatározó, algebrai egyenlet egészít ki (az egyes $y_i(t)$ kimenőjelek *mindegyike* szintén az $u_i(t)$ bemenő jelek és az $x_i(t)$ állapotváltozók *mindegyikének* a függvénye). Ez utóbbi algebrai egyenletrendszert *kimeneti egyenletnek*, vagy *mérési egyenletnek* is nevezik. Vektor–mátrix alakban felírható általános alakjuk

nemlineáris rendszer esetében:

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= f[x(t), u(t)] \\ y(t) &= g[x(t), u(t)]\end{aligned}$$

illetve *lineáris (LTI)* rendszer esetében:

¹¹A **MATLAB** [AF,BF,CF,DF]=**tf2ss**(Gs,Hs) függvénye a $W(s)=G(s)/H(s)$ polinomiális alakú átviteli függvényből az *irányíthatósági* állapotterezs alak paramétermátrixait számítja (**tf2ss**: *transfer function to state-space conversion*).

¹²A *rendszeregyenlet* a **SISO** tag $u(t)$ bemenő-, és $y(t)$ kimenő jelei között meglévő és rendszerint egy n -edrendű $F[y^{(n)}(t), y^{(n-1)}(t), \dots, y(t), u^{(m)}(t), u^{(m-1)}(t), \dots, u(t)]=0$ nemlineáris, implicit differenciálegyenletet jelent. *Lineáris SISO* rendszer esetében ez az $a_0 y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \dots + a_n y(t) = b_0 u^{(m)}(t) + b_1 u^{(m-1)}(t) + \dots + b_m u(t)$ lineáris egyenletre egyszerűsödik, ahol a_i, b_i együtthatók *valós* állandók. Az $y^{(i)}(t), u^{(i)}(t)$ az $y(t), u(t)$ jelek i -szeres, idő szerinti deriváltjai. A differenciálegyenlet $y^{(n)}(t)$ vezető együtthatóra normalizált alakja:

$$y^{(n)}(t) + h_1 y^{(n-1)}(t) + \dots + h_n y(t) = g_0 u^{(m)}(t) + g_1 u^{(m-1)}(t) + \dots + g_m u(t),$$

ahol $h_i = a_i/a_0$ és $g_i = b_i/a_0$ a *normalizált* együtthatók ($a_0 \neq 0$, de más együtthatók *zérus* értékek is lehetnek). Realizálhatóság miatt a bemenőjel $u^{(m)}(t)$ deriváltjának m rendszáma nem haladhatja meg a kimenőjel $y^{(n)}(t)$ deriváltjának n rendszámát ($n \geq m$). Az *állapotegyenlet reprezentáció* j számú $u_i(t)$ bemenőjel és a k számú $y_i(t)$ kimenőjel közötti függvénykapcsolatot az $x_i(t)$ állapotváltozók közvetítésével $dx(t)/dt = f[x(t), u(t)]$, $y(t) = g[x(t), u(t)]$ vektor–mátrix alakban felírható n számú elsőrendű differenciálegyenletet (differenciálegyenletet rendszert) tartalmazó kifejezésben és a k számú nemlineáris algebrai egyenlet alakjában adja meg. Lineáris esetben ez $dx(t)/dt = Ax(t) + Bu(t)$, $y(t) = Cx(t) + Du(t)$ és A, B, C, D *valós* számokat tartalmazó, a jelek oszlopvektoraihoz illeszkedő *paramétermátrixok*. Az *állapotegyenlet reprezentáció SISO és MIMO* tagot egyaránt jellemezhet, a rendszeregyenlet a **SISO** tag egyfajta (n -edrendű differenciálegyenletet jelentő) matematikai modellje.

¹³**Lineáris** rendszer: érvényes a *szuperpozíció* elve, vagyis ha az $u_1(t)$ és $u_2(t)$ gerjesztésekre keltett válaszok az $y_1(t)$ és $y_2(t)$ jelek, akkor az $u(t) = k_1 u_1(t) + k_2 u_2(t)$ gerjesztés $y(t) = k_1 y_1(t) + k_2 y_2(t)$ választ eredményez (k_1, k_2 állandók). **Időinvariáns** rendszer: az $u(t)$ gerjesztés *időbeli* $u(t-T_h)$ *eltolása ugyanekkora eltolást* eredményez az $y(t-T_h)$ válaszban. **Kauzális** rendszer: bármely *belépő* $u(t)$ gerjesztéshez, *belépő* $y(t)$ válasz tartozik, az $y(t_1)$ válasz nem függ a bemenőjel $t > t_1$ jövőbeli értékeitől (az oknak meg kell előznie az általa kiváltott okozatot).

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

Ezekben $dx(t)/dt$ **állapotsebesség** vektor, $x(t)$ **állapotváltozó** vektor, $u(t)$ **bemenőjel** vektor $y(t)$ **kimenőjel** vektor f, g **nemlineáris függvények** (oszlopvektorok), de lineáris esetben $f[x(t), u(t)] = Ax(t) + Bu(t)$, és $g[x(t), u(t)] = Cx(t) + Du(t)$ ahol az A, B, C, D a lineáris rendszer u, x, y oszlopvektorokhoz illeszkedő paramétermátrixai.

Megjegyzés

Speciális esetben az $y_i(t)$ kimenőjeleknek felvehetjük magukat az $x_i(t)$ állapotváltozókat is, ekkor formálisan a mérési egyenletek k száma azonos az elsőrendű differenciálegyenletek n számával és a kimeneti egyenlet $y(t) = Ix(t)$ vektor-mátrix egyenlet alakjában értelmezhető (ekkor $y(t) = g[x(t), u(t)] = Cx(t)$, és $C = I$ az $n \times n$ méretű **egység mátrix**).

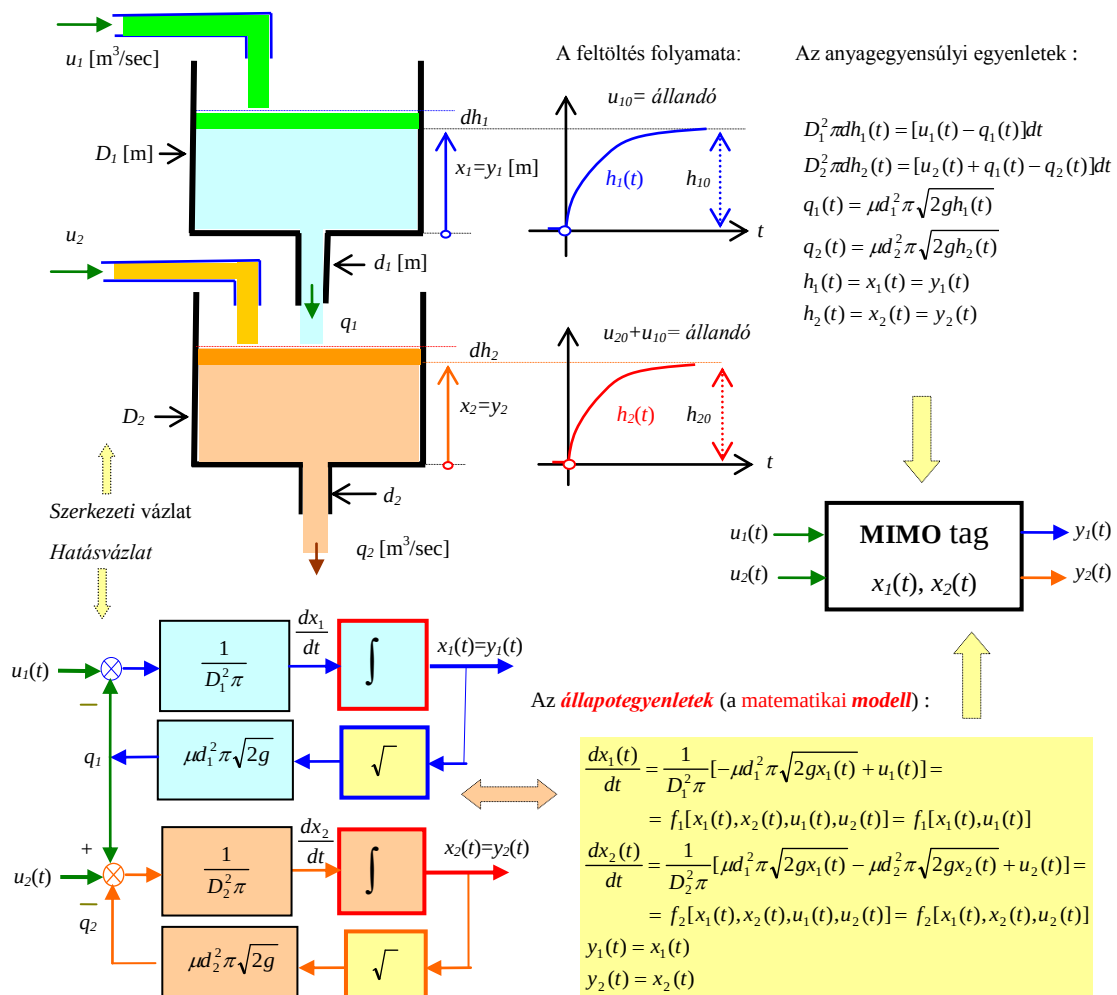
A következő példák bemutatásával az kívánjuk érzékeltetni, hogy a különféle folyamatok (fizikai és egyéb objektumok) matematikai modelljének meghatározása milyen módon történhet, illetve milyen tulajdonság jellemzi a modelljeikkel leírt objektumokat. A folyamatok **sokfélesége**, de a matematikai modellek **hasonlósága** teremti meg a dinamikus rendszerek (köztük a negatív visszacsatolás elvén működő szabályozási rendszerek) **egységes, modell alapú** tárgyalásának lehetőségét. Ennek alapján **elvonatkoztatunk** az objektumok különféle szerkezeti, áramköri és egyéb megoldásainak sokféleségétől, és mind a folyamatot, mint pedig a szabályozó berendezést a matematikai modelljeikkel absztraháljuk¹⁴. A képletekben felírt matematikai modellhez – a jelátvitel szemléltetésére – egy **algebrai** (memóriamentes)–, és **dinamikus** (integráló és holtidős) **alaptagokat** tartalmazó **hatásvázlatot** is rendelkezhetünk. Ez a hatásvázlat az objektum képletszerűen leírt viselkedését a matematikai modellel egyenértékűen jellemzi. A hatásvázlat kimenő (**output, o**) és bemenő (**input, i**) jelei közötti alapfüggvényeket szimpolizáló algebrai **alaptagjai** a **lineáris (arányos: $o=ki$, és az **összegző $o=\sum i$ alaptagok)** és a **nemlineáris** [pl: $o=ki^2$, $o=k\sqrt{i}$, $o=\exp(i)$, $o=f(i)$, $o=ki_1i_2$ stb.] alaptagok, **dinamikus** alaptagjai az **integráló** [$o(t)=o(0)+\int i(t)dt$] és a **holtidős** alaptagok [$o(t)=i(t-T_h)$]. Ezek felhasználásával a lineáris és a nemlineáris dinamikus rendszerek hatásvázlat struktúrája építhető fel. Ha ennek birtokában az **integráló alaptagok** $o(t)=x(t)$ **kimenő jeleit** állapotváltozóknak vesszük fel, a dinamikus rendszer állapotegyenlete is előállítható. Az **algebrai** alaptagok fontos tulajdonsága, hogy $i(t)$ bemenőjelek megváltozásaira az $o(t)$ kimenőjelek megváltozásával azonnál reagálnak, a kimenő és bemenő jelek között jelkésleltetés nincs (memóriamentes tagok). Ettől ellentétesen a **dinamikus** alaptagok $o(t)$ kimenőjelei az $i(t)$ bemenőjel megváltozására csak időbeli késleltetéssel reagálnak.**

Példák

1. Hidraulikus rendszer (szabadkiömlésű tartályokból álló folyamat)

Két, szabadkiömlésű hengeres tartályt az $u_1(t)>0$ és $u_2(t)>0$ bemeneti térfogatsebességek (hozamok) táplálják, az alsó tartályba ezen túlmenően a felső tartály $h_1(t)$ szinthezete által befolyásolt $q_1(t)>0$ hozam is befolyik. Az alsó tartályból kifolyó és szintén ennek $h_2(t)$ szinthezete által függő hozam $q_2(t)>0$ (lásd 3. ábra, D és d a tartályok és a kifolyási nyílások *sugarait* jelölik).

¹⁴ A szabályozni kívánt folyamat (a szabályozott szakasz) matematikai modelljének meghatározása az egyik legfontosabb, és egyben legnehezebb feladat. Ennek megalkotásában jelentős mértékben kell közreműködnie a folyamatot ismerő specialistának és a szabályozási rendszert tervező szabályozástechnikusnak. Ha a folyamat matematikai modellje elfogadható módon írja le a fizikai objektum viselkedését, a teljes, automatikusan működő szabályozási rendszer megtervezése is lehetővé válik.



3. ábra Szabadkiömlésű tartályok szerkezeti vázlata, hatásvázlata és nemlineáris állapotegyenlete

A légköri nyomásra távozó $q_1(t) > 0$ és $q_2(t) > 0$ hozamok Torrichelli, illetve Bernoulli tételei alapján $q_1(t) = \mu d_1^2 \pi \sqrt{2gh_1(t)}$, $q_2(t) = \mu d_2^2 \pi \sqrt{2gh_2(t)}$, ahol $\mu \approx 0.85$ a kifolyási tényező, g a nehézségi gyorsulás, $d^2 \pi$ az áramlási keresztmetszet. A rendszer állapotváltozó és egyben kimenőjelei a $h_1 = x_1 = y_1$ és $h_2 = x_2 = y_2$ szinthezettek. Az állapotegyenlet az egyes tartályok anyagegyensúlyi feltételei alapján írható fel, ezek azt fejezik ki, hogy a szinthezettekben dt idő alatt bekövetkező dh változások a tartályokban $D^2 \pi dh$ térfogat változásokat eredményeznek, amit a beáramló és kiáramló hozamok közötti egyensúly felbomlásainak eltérései hoznak létre. Az $u_1(t) = u_{10}$ és $u_2(t) = u_{20}$ állandó értékek mellett kialakuló egyensúlyi helyzetben a beáramló és a kiáramló hozamok azonosak, ezért $u_{10} = q_{10} = \mu d_1^2 \pi \sqrt{2gh_{10}}$ és $u_{20} + q_{10} = u_{20} + u_{10} = q_{20} = \mu d_2^2 \pi \sqrt{2gh_{20}}$. A szerkezeti vázlatot, a rendszert absztraháló MIMO tagot, az alaptagokból felépíthető hatásvázlatot, és a rendszer állapotegyenleteit a 3. ábra tartalmazza. A másodrendű nemlineáris rendszer állapotegyenlete két, elsőrendű, közönséges differenciálegyenletet tartalmazó differenciálegyenlet rendszerből áll, a matematikai modellel nemlinearitását az okozza, hogy a q_1 és q_2 hozamok a h_1 és h_2 szinthezettek négyzetgyökétől függenek. A hatásvázlaton ezt a gyökvonó nemlineáris algebrai tagok jelenítik meg (a gyökvonó tag olyan nemlineáris alaptag, amelynek $o(t)$ kimenő jele az $i(t)$ bemenő jelének négyzetgyöke: $o(t) = \sqrt{i(t)}$). A fizikai működésből következik, hogy állandó értékű u_{10} és u_{20} hozamok mellett szükségszerűen kialakulnak a szinthezettek h_{10} és h_{20} állandósult értékei (önbeálló rendszer), amikor is a tartályokba be-, és kiáramló hozamok egymással azonosak:

$$u_{10} = q_{10} \rightarrow h_{10} = \{u_{10} / [\mu d_1^2 \pi \sqrt{(2g)}]\}^2 = c_1(u_{10})^2$$

$$u_{20} + q_{10} = u_{20} + u_{10} = q_{20} \rightarrow h_{20} = \{(u_{10} + u_{20}) / [\mu d_2^2 \pi \sqrt{(2g)}]\}^2 = c_2(u_{10} + u_{20})^2$$

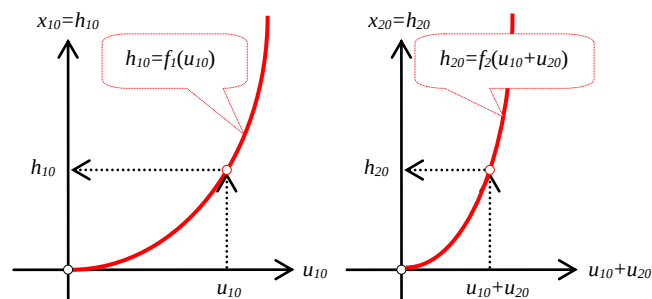
$$c_1 = \{1 / [\mu d_1^2 \pi \sqrt{(2g)}]\}^2 \quad c_2 = \{1 / [\mu d_2^2 \pi \sqrt{(2g)}]\}^2$$

A kifejezésekből látható, hogy az állandósult viszonyokat leíró $h_0 = h(u_0)$ statikus karakterisztikák parabolák, mivel az egyensúlyi szinthezettek a beáramló hozamok négyzetétől függenek (lásd 4. ábra). Az egyensúlyi helyzet kialakulásához vezető $h_1(t)$ és $h_2(t)$ időfüggvények meghatározásához a nemlineáris differenciálegyenlet

rendszer kell az $u_1(t)$, $u_2(t)$ hozamok és a $h_1(0)$, $h_2(0)$ kezdeti feltételek ismeretében megoldani¹⁵. Ezek az időfüggvények az üres tartályok ($h_1(0)=0$, $h_2(0)=0$) feltöltődési folyamatában monoton növekedve tartanak a h_{10} és h_{20} állandósult értékek felé. A két bemenőjel (u_1 , u_2), a két állapotváltozó ($x_1=h_1$, $x_2=h_2$), és a kimenőjeleknek is tekintett ($y_1=x_1=h_1$, $y_2=x_2=h_2$) változók alapján a jelátvitelt **MIMO** tag absztrahálja, a belső hatásmechanizmust a lineáris és nemlineáris *alaptagokból* felépülő hatásvázlat szimbolizálja. A fizikai működésből következően a $u(t)$ bemenőjelek, az $x(t)$ állapotváltozók és az $y(t)$ kimenőjelek kizárólag pozitív értékek lehetnek. Figyeljük meg, hogy az alaptagokból felépített hatásvázlat mindkét integráló tagja a saját $x_1(t)$, $x_2(t)$ kimenőjeléről – a nemlineáris gyökvonó tagokon keresztül – *negatívan* visszacsatolt. Ennek következménye a rendszer aszimptotikusan stabilis tulajdonsága. A hatásvázlat alapján is megállapíthatjuk, hogy állandó bemeneti hozamok mellett a rendszer egyensúlyi állapotában az integráló tagok $dx(t)/dt$ bemenőjeleinek zérus értékei kell hogy legyenek (mert ha nem ez lenne, nem lehetne állandósult állapot), ezért például az x_{10} állandóságához szükséges, hogy $dx_{10}/dt=0=(1/D_1^2\pi)(u_{10}-q_{10})=(1/D_1^2\pi)[u_{10}-(\mu d_1^2\pi)\sqrt{(2gx_{10})}]$ legyen. Az x_{10} egyensúlyi értéke – egyezően a korábban más módon értelmezett eredménnyel – ebből

$$x_{10} = h_{10} = \left(\frac{u_{10}}{\mu d_1^2 \pi \sqrt{2g}} \right)^2 = c_1(u_{10})^2$$

Ennek a kifejezésnek az alapján ábrázolhatjuk a tartályok $x_{10}=h_{10}=f_1(u_{10})$ és $x_{20}=h_{20}=f_2(u_{10}+u_{20})$ statikus karakterisztikáit, amelyek azt mutatják meg, hogy az állandó u_{10} , illetve $u_{10}+u_{20}$ befolyó térfogatmennyiségek miként befolyásolják a h_{10} , h_{20} szinthezettek **állandósult** értékeit. Ezek a karakterisztikák egyébként másodfokú parabolák (lásd 4. ábra).



4. ábra. A tartályok statikus karakterisztikái

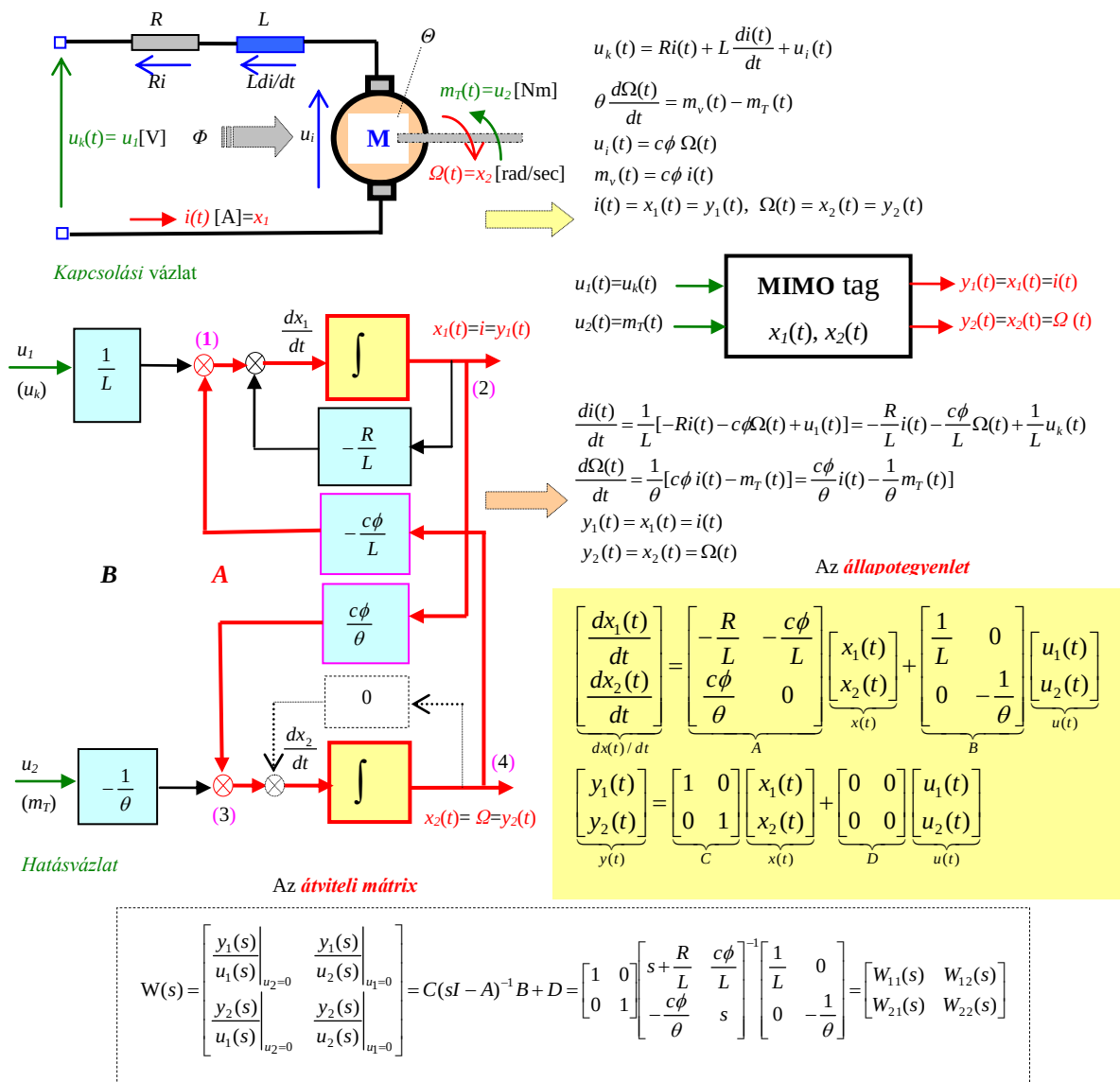
A statikus karakterisztikák egy fizikai objektum esetében akkor értelmezhetőek, ha az **állandónak** felvett u_0 bemenőjelek hatására létrejön a dinamikus rendszernek egy olyan állapota, amelyben a rendszer $x(t)$ állapotváltozói és az $y(t)$ kimenőjelei is egy x_0 , y_0 **állandó**, de *nem zérus* értékeket vesznek fel. Ezek az állandó értékek egy tranzienst folyamat „lecsengésének” végére jönnek létre. Az ilyen dinamikus folyamatok *aszimptotikusan stabilis (önbeállónak* is nevezett) rendszerek. A fizikai objektumok nem mindegyike rendelkezik önbeálló tulajdonsággal, ezeknél a statikus karakterisztika fogalma sem értelmezhető.

2. Elektromechanikai rendszer (külsőgerjesztésű egyenáramú villamos motor)

Az állandó Φ fluxusú egyenáramú villamos gép elektromos energiát mechanikai energiává átalakító szerkezet. Bemenőjelei az armatúra körre kapcsolt $u_k=u_1$ kapocsfeszültség és a forgórész tengelyére ható $m_T=u_2$ terhelő nyomaték, elsődleges kimenőjele a motor tengelyének Ω szögsebessége. Az armatúra tekercs ellenállása R , induktivitása L , a forgórész tehetetlenségi nyomatéka Θ . Az armatúrára kapcsolt u_k feszültség az armatúra körben i áramot indít, ami $Ri(t)$ és $Ldi(t)/dt$ feszültségesekeket hoz létre. Az i áram és a Φ fluxus kölcsönhatásaként $m_v=c\Phi i$ ($c\Phi$: gépállandó) villamos nyomaték keletkezik, ami az i armatúraárammal arányos. Az m_v-m_T nyomatékkülönbség a forgómozgás $\Theta\epsilon=\Theta d\Omega(t)/dt=m_v-m_T$ mozgásegyenlete szerint ($\epsilon=d\Omega(t)/dt$ a forgórész szöggyorsulása) a gép Ω szögsebessége ($m_v>m_T$ esetében) növekedni kezd. Ez a szögsebesség $u_i=c\Phi\Omega$ indukált feszültséget („ellenelektromotoros erőt”) hoz létre az armatúra tekercsben, és ennek iránya – Lenz törvénye szerint – ellentétes az u_k kapocsfeszültség irányával. Az armatúra körre felírható Kirchhoff hurokegyenlete ($u_k=iR+Ldi/dt+u_i$) és Newton mozgásegyenlete ($\Theta d\Omega/dt=m_v-m_T$) alapján határozhatjuk meg a

¹⁵ Ennek a $dx(t)/dt=-\alpha\sqrt{x(t)}+\beta u(t)$ típusú nemlineáris differenciálegyenletnek most létezik az *analitikus* megoldása is, ennek meghatározását – matematikai ismeretanyag felfrissítése céljából – az olvasóra bizzuk.

gép állapotegyenletét. A szerkezeti vázlatot, a rendszert absztraháló **MIMO** tagot, a lineáris alaptagokból felépíthető hatásvázlatot, a rendszer állapotegyenleteit és átviteli mátrixát a 5. ábra tartalmazza.

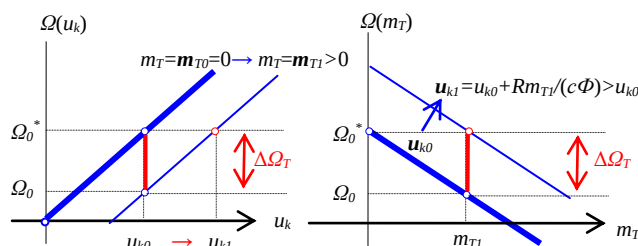


A villamos gép fizikai törvényszerűségei alapján felépített *lineáris alaptagokat* tartalmazó hatásvázlat integráló tagjainak $i(t)=x_1(t)$ és $\Omega(t)=x_2(t)$ kimenőjelei a folyamat állapotváltozóit, amelyek most $y_1=x_1=i$, $y_2=x_2=\Omega$ kimenőjeleknek is felveszünk (egy hajtásszabályozási feladatban az Ω szögsebesség a szabályozott jellemző szerepkörét töltheti be, amelyet az m_T terhelő nyomaték nemkívánatosan befolyásol, és ennek hatását az u_k kapcsolófeszültség szándékolt változtatásával ellensúlyozhatjuk). A hatásvázlat alapján figyeljük meg, hogy az **(1)→2→3→4→(1)** „útvonalon” olyan *negatív* visszacsatolású hurok van, amelyben egy *negatív* visszacsatolt és egy *viszacsatolatlan* integráló tag *negatív* visszacsatolású *zárt* hatásláncot alkot. Az $u_1(t)=u_{10}=u_{k0}$ és $u_2(t)=u_{20}=m_{T0}$ állandó bemenőjel értékek mellett $x_{10}=i_0$ és $x_{20}=\Omega_0$ adatokkal kialakuló egyensúlyi helyzetben az integráló tagok bemenő jelei zérus értékek (ha nem lennének azok, az i_0 és Ω_0 nem lehetnének állandók). Ekkor $\theta d\Omega_0/dt=0=c\Phi i_0-m_{T0}$, vagyis az armatúra áram állandósult $i_0=(1/c\Phi)m_{T0}$ értékét *kizárólag a terhelőnyomaték* szabja meg (a terhelés nem megengedett mértéke a gép *túlmelegedéséhez* és meghibásodásához vezethet). Az $L di_0/dt=0$ feltételből $u_{k0}=Ri_0+c\Phi\Omega_0=[R/(c\Phi)]m_{T0}+c\Phi\Omega_0$, és innen

$$\Omega_0 = f(u_{k0}, m_{T0}) = \frac{1}{c\Phi} \left(u_{k0} - \frac{R}{c\Phi} m_{T0} \right) = \frac{1}{c\Phi} (u_{k0} - Ri_0)$$

A terhelőnyomaték $m_{T0}=0$ értéke mellett a motor Ω_0^* un. üresjárási szögsebessége **arányos** a gép u_{k0} kapcsolófeszültségével [$\Omega_0^*=u_{k0}/(c\Phi)$]. Az $m_T=m_{T1}>0$ terhelő nyomaték ezt az üresjárási szögsebességet az m_T

terheléssel **arányos** $\Delta\Omega_T = -m_{T1}R/(c\Phi)^2$ mértékben *csökkenti* le (lásd 6. ábra). A terhelő nyomatéknak a szögsebességre kifejtett nemkívánatos hatását a gép kapocsfeszültségének adott mértékű megváltoztatásával lehet megszüntetni. Ha egy szabályozási rendszer kialakításával az m_T terhelő nyomatéknak az Ω szögsebességre gyakorolt nemkívánatos hatását az u_k kapocsfeszültség *szándékolt* módosításával kívánjuk elhárítani, a motor matematikai modelljének ismeretében tudjuk kiszámítani, hogy például egy Δm_T terhelésvátozás okozta $\Delta\Omega_T$ szögsebességváltozás *megszüntetéséhez* mekkora *szándékolt* Δu_k kapocsfeszültség változtatás szükséges (armatúraköri beavatkozás).



6. ábra A motor $\Omega(u_k, m_T)|_{m_T=\text{áll.}}$ és $\Omega(u_k, m_T)|_{u_k=\text{áll.}}$ statikus karakterisztikái

Annak eldöntésére, hogy az állandó bemenő jelek hatására az $i(t)$ és $\Omega(t)$ milyen módon érik el az i_0 és Ω_0 egyensúlyi értékeiket, a lineáris differenciálegyenlet adott $u_k(t)$, $m_T(t)$ bemenő jelekre és $i(0)$, $\Omega(0)$ kezdeti feltételekre vonatkozó megoldása szükséges. A tranzien folyamat – a gép R , L , Θ , $c\Phi$ paramétereitől függően *aperiodikusak*, vagy *csillapított lengéseket* tartalmazó időfüggvények lehetnek. A fizikai működés tulajdonságaiból levonható következtetések alapján – miután az állandó u_{k0} kapocsfeszültség és m_{T0} terhelőnyomaték hatására létrejön az i_0 armatúraáram, és Ω_0 szögsebesség állandósult értéke – a rendszer aszimptotikusan stabilis. Ez egyébként az integráló tagok negatív visszacsatolásából is kikövetkeztethető. Az adott feltételek mellett tárgyalt elektromechanikus rendszer állapotegyenlet reprezentációja lineáris matematikai modellhez vezetett. Meg kell említenünk azt az esetet is, amikor a Φ gerjesztő fluxus *nem állandó* érték, vagy esetleg *szándékolt* változtatásával is befolyásolni kívánjuk a motor Ω szögsebességét (gerjesztőköri beavatkozás). Ilyen esetben a rendszer állapotegyenletei alapvetően nemlineáris tulajdonságúak, és a Φ gerjesztő fluxus alacsony értéke a szögsebesség üzemzavar jellegű „megszaladásához” is vezethet.

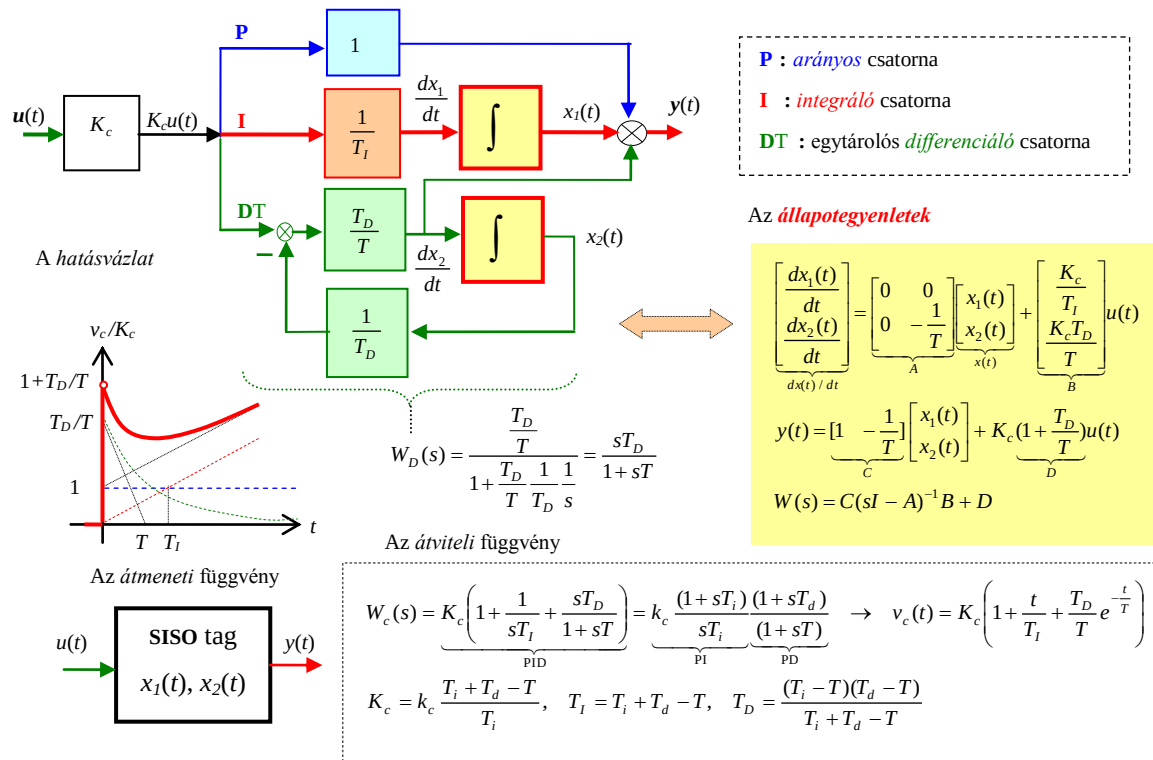
3. Elektronikus áramkör (PID szabályozó)

A PID szabályozó egymással párhuzamos kapcsolású arányos (P)–, integráló (I)–, és egytárolós differenciáló (DT) csatornából (műveleti erősítőket, R , C áramkörü elemeket és tápegységet tartalmazó alkatrészekből) rakható össze. Ennek áramkörü kapcsolási vázlatát már korábban részleteztük. A szabályozó lineáris alaptagokból felépülő hatásvázlatát, állapotegyenletét, átviteli–, és átmeneti függvényeit a 7. ábra tartalmazza. Figyeljük meg, hogy az egytárolós *differenciáló* tagot késleltetés nélküli arányos tagnak integráló taggal történő *negatív* visszacsatolása valósítja meg. Mind az állapotegyenlet, mind pedig az átviteli függvény a hatásvázlat alapján közvetlenül felírható. Az állapotváltozók az integráló tagok kimenőjelei, vagyis az x_1 az I csatorna *integráló* tagjának kimenő jele, az x_2 a DT csatorna *visszacsatoló ágában* lévő *integráló* tag kimenő jele. Az y kimenőjelnek az állapotváltozókból és a bemenőjelből történő „összerakása” most komolyabb figyelmet igényel (lásd az állapotegyenleteket).

A $W_c(s)$ átviteli függvény PIPD időállandós normálalakját a szabályozó méretezésekor, a vele egyenértékű PID alakot pedig az áramkörü realizáláskor használhatjuk. Az $u(t)=1(t)$ állandó bemenőjel mellett az $y(t)=v_c(t)$ kimenőjel (amely egyébként a párhuzamos kapcsolást alkotó P, I és DT csatornák kimenőjeleinek az összege) időfüggvénye az integráló csatorna miatt $t \rightarrow \infty$ mellett „minden határon túl” növekszik¹⁶. Az $y(t)$ kimenőjel állandó értéket csak $u(t)=0$ bemenőjel mellett tud felvenni. Miután az átviteli függvény számlálója és nevezője azonos fokszámú, a $v_c(t)=L^{-1}\{W_c(s)/s\}$ átmeneti függvénynek a $t=0$ időpontban $v_c(0)=K_c(1+T_D/T)=k_c T_d/T$ értékű ugrása van. Ez az elrendezés igen sokféle szabályozási feladat megoldásában a szabályozó alrendszerét absztrahálja. Az állapotmátrix diagonális, $\lambda_1=p_1=0$ és $\lambda_2=p_2=-1/T < 0$ sajátértékekkel, amelyek egyébként a $W_c(s)$ átviteli függvény pólusait is jelentik. Az átviteli függvény PIPD alakjából az is leolvasható, hogy a szabályozó átviteli függvényének két zérushelye van, és ezek $z_1=-1/T_i < 0$, $z_2=-1/T_d < 0$. A technikai kialakítás mai szintjén a PID szabályozót nem műveleti erősítőkből felépített analóg áramkör, hanem digitális eszköz (PLC, folyamatirányító számítógép, stb.) realizálja. A hatásvázlat I csatornáján megjelenő *visszacsatolatlan integráló*

¹⁶ Ezt a „minden határon túl” történő növekedést az integráló hatást realizáló fizikai objektum (pl. a kondenzátorral visszacsatolt műveleti erősítő) telítődése *korlátozza*.

tag előidézője a rendszer *labilitásának*, ami most abban nyilvánul meg, hogy az állandó u_0 bemenőjel hatására x_1 állapotváltozó – és ennek hatására az y kimenőjel is – minden határon túl növekszik. A hatásvázlatból, vagy a $W_c(s)$ átviteli függvény **PID** párhutamos alakjából egyszerűen meghatározható a $v_c(t)$ átmeneti függvény. Ebből láthatóan a szabályozó egy $y(0)=K_c(1+T_D/T)$ forszírozott kimenő jellel „indít”, majd az integráló csatornájának révén a kimenő jelet időben lineáris függvénykapcsolat szerint mindaddig növeli, amíg az $u(t)$ bemenő jele zérussá nem válik.



7. ábra **PID** szabályozó hatásvázlata, *lineáris* állapotegyenlete, *átviteli*– és *átmeneti* függvényei

Miután jelen esetben **SISO** tagról van szó, az *átviteli* függvény **PIPD** alakjából a tag *rendszer*egyenlete közvetlenül felírható:

$$W_c(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = k_c \frac{(1 + sT_i)(1 + sT_d)}{sT_i(1 + sT)} = \frac{k_c T_i T_d s^2 + k_c (T_i + T_d)s + k_c}{T_i T s^2 + T_i s}$$

$$T_i T \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + T_i \frac{dy(t)}{dt} = k_c T_i T_d \frac{d^2 u(t)}{dt^2} + k_c (T_i + T_d) \frac{du(t)}{dt} + k_c u(t)$$

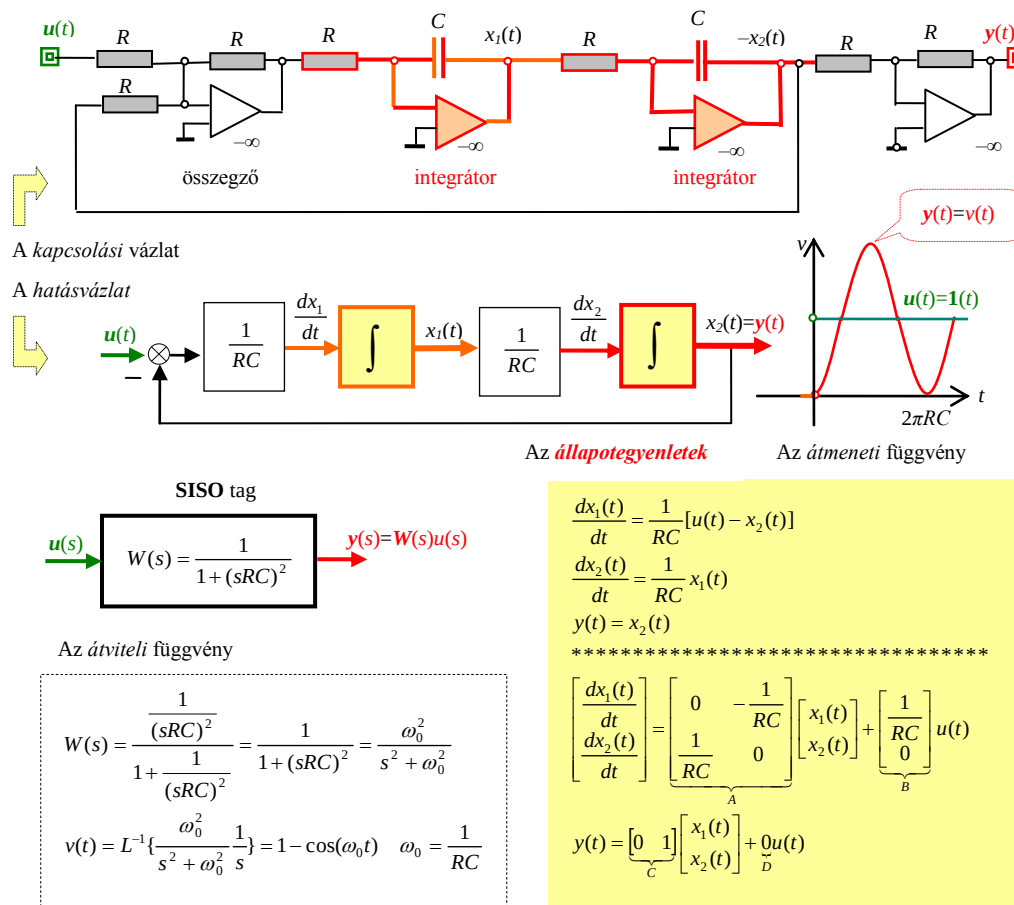
Vegyük észre, hogy a dinamikus tag *rendszer*egyenletében $n=m=2$ és nem szerepel benne (egy más értelmezésben *zérus együttthatóval* van jelen) az $y(t)$ kimenőjel, csupán ennek $dy(t)/dt$ elsőrendű és $d^2 y(t)/dt^2$ másodrendű idő szerinti deriváltjai.

4. Elektronikus áramkör (RC oszcillátor)

Az elektronika egyik fontos, széles körben felhasznált áramköre a harmonikus jelet előállító *RC oszcillátor*. Áramköri kialakítását tekintve két, egymással soros kapcsolást alkotó integrátor *negatív visszacsatolásából* épül fel. Villamos kapcsolási vázlatát, állapotegyenleteit, hatásvázlatát, átviteli-, és átmeneti függvényét a 8. ábra tartalmazza. Az $u(t)=1(t)$ egységugrásra adott válaszból láthatóan az $y(t)=v(t)$ kimenőjel $\omega=1/RC$ körfrekvenciájú ($T_p=2\pi RC$ periódusidejű) harmonikus lengőmozgást végez, az oszcilláció körfrekvenciája az R , vagy C értékeivel befolyásolható. A rendszernek u_0 =állandó bemenőjele mellett $x_{20}=u_0$, $x_{10}=0$ értékekkel *virtuális*¹⁷ egyensúlyi pontja van (ekkor az integrátorok bemenő jelei zérus értékek), de innen egy Δu_0 állandó bemenőjellel kimozdítva $x_1(t)$ és $x_2(t)$ harmonikus lengőmozgásba kezd. Figyeljünk fel arra, hogy a két, egymással soros kapcsolást alkotó integráló tag *negatív* visszacsatolása a stabilitási határhelyzetben lévő (tehát

¹⁷ Ez az egyensúlyi helyzet azért „*virtuális*”, mert bármilyen hatás, ami a rendszert ebből kimozdítja majd magára hagyja, harmonikus lengőmozgást eredményez.

gyakorlati szempontból labilis) rendszert eredményez (az összegzőt és az integrátorokat tartalmazó áramköri hurokban lévő páratlan számú műveleti erősítői fázisfordító tulajdonsággal rendelkeznek, ennek eredménye a hurok *negatív* visszacsatolása). Ha a visszacsatolás *pozitív* lenne, a labilis tulajdonság abban nyilvánulna meg, hogy a rendszer ugrásjelre adott $x_1(t)$, $x_2(t)=y(t)$ válaszai monoton jelleggel „minden határon túlmenően” növekednének. Ez a jelenség természetesen csak addig tartana, amíg a műveleti erősítők be nem telítődnek.



8. ábra RC oszcillátor áramköri kapcsolása, hatásvázlata, *lineáris* állapotegyenlete, átviteli függvénye

Az A állapotmátrix karakterisztikus egyenlete és ennek gyökei: $\det(\lambda I - A) = 0$, $\lambda_{1,2} = \pm j/RC = \pm j\omega_0$, vagyis a *sajátértékek valós részei zérus értékek*, tehát mindkét sajátérték a komplex számsík *imaginárius* tengelyén van. Itt jegyezzük meg, hogy a két integrátor *pozitív* visszacsatolása mellett a rendszer állapotmátrixának sajátértékei $\lambda_1 = 1/RC = \omega_0$ és $\lambda_2 = -1/RC = -\omega_0$ lennének (vagyis mindkét sajátérték a komplex számsík valós tengelyén lenne), ami a *pozitív* valós sajátérték miatt a stabilitás biztos tulajdonságát mutatja. Ez utóbbi esetben nem jönne létre az oszcilláció, az eredő átmeneti függvény monoton növekedve a végtelen érték felé tartana. Miután a rendszer x_1 , x_2 állapotváltozói és y kimenőjele állandó u_0 bemenőjel hatására nyugalmi helyzetet felvenni a negatív visszacsatolás mellett sem képesek, a labilis jelleg ekkor is fennáll. De ez utóbbi esetben az oszcilláló jelek mellett ezek amplitúdóinak *korlátossága* megmarad. Ha viszont az $u(t) = \sin(\omega t)$ gerjesztés olyan harmonikus jel, amelynek körfrekvenciája azonos a fizikai objektum ω_0 sajátfrekvenciájával ($\omega = \omega_0 = 1/RC$), külső rezonancia esete állna fenn, a jelek amplitúdói ekkor minden határon túl növekednének. Az átviteli függvény alapján a **SISO** tag rendszeregyenlete:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \omega_0^2 y(t) = \omega_0^2 u(t)$$

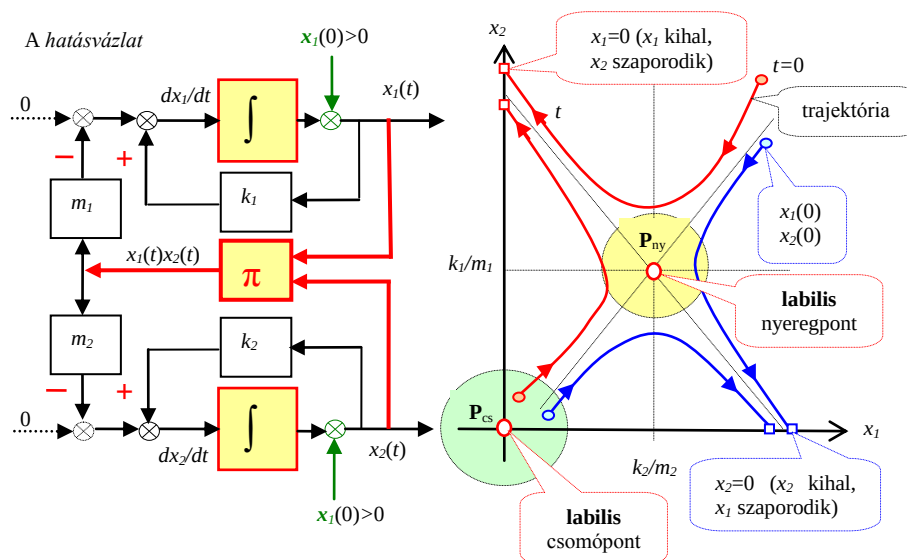
Vegyük észre, hogy ebben a másodrendű, állandó együtthatójú, lineáris differenciálegyenletben a kimenőjel $dy(t)/dt$ elsőrendű differenciálhányadosa nem (illetve *zérus együtthatóval*) szerepel¹⁸. A csillapítatlan legést jelentő működés (ami szabályozástechnikai értelemben **labilitást** jelent) most üzemszerű állapotnak felel meg.

5. Biológiai folyamat (Volterra állapotegyenlete¹⁹)

Két, egymással azonos területen versengő $x_1(t)$ és $x_2(t)$ diszkrét számosságú, de az elemek nagy száma miatt folytonos számosságúnak feltételezett mikrobafaj szaporodik. Volterra a szaporodási folyamatot a

$$\begin{aligned}\frac{dx_1(t)}{dt} &= f_1[x_1(t), x_2(t)] = k_1 x_1(t) - m_1 x_1(t) x_2(t) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= f_2[x_1(t), x_2(t)] = k_2 x_2(t) - m_2 x_1(t) x_2(t)\end{aligned}$$

nemlineáris állapotegyenletekkel írta le. A $k_1 x_1(t)$ és $k_2 x_2(t)$ a korlátozásoktól mentes növekedési mértéket jelenti (feltételezzük, hogy $k_1 > k_2 > 0$), az $m_1 x_1(t) x_2(t)$ és $m_2 x_1(t) x_2(t)$ pedig a verseny következtében a növekedési mértékben bekövetkező csökkenés jellemzője ($m_1 > 0$, $m_2 > 0$). Az $x_1(0)$ és $x_2(0)$ kezdeti feltételek és az $x_1(t)$ és $x_2(t)$ számosságok kizárólag pozitív értékek lehetnek.



9. ábra A Volterra állapotegyenlethez rendelhető hatásvázlat és az állapottrajektória

Az állapotegyenlethez rendelhető nemlineáris rendszer hatásvázlatát, az $x_1 \sim x_2$ állapotsíkon elhelyezkedő (**P** jelű) virtuális egyensúlyi pontok koordinátáit, és a különféle kezdeti feltételekből induló állapot-trajektóriákat²⁰ a 9. ábra tartalmazza. A rendszer $u(t)$ bemenőjeleit zérus értékeknek tekinthetjük, az állapotváltozók mozgását a különböző értékeket felvevő $x_1(0) > 0$, $x_2(0) > 0$ kezdeti feltételek generálják. Az integráló tagok a k_1 és k_2 átviteli tényezőkön keresztül önmagukról *pozitívan* visszacsatoltak, az $m_1 x_1(t) x_2(t)$, illetve az $m_2 x_1(t) x_2(t)$ szorzó tagon keresztüli visszacsatolásuk viszont *negatív*. Az $x_1(t)$, $x_2(t)$ időfüggvények menetét – a szorzás nemlineáris művelete miatt – jelentősen befolyásolja, hogy milyen kezdeti feltételekről indul az x_1 és x_2 szaporodási vagy kihalási folyamat. A virtuális egyensúlyi helyzetek az integrátorok zérus értékű bemenőjeleinél lehetnek, amikor is $dx_1/dt = k_1 x_1 - m_1 x_1 x_2 = 0$, illetve $dx_2/dt = k_2 x_2 - m_2 x_1 x_2 = 0$. Az ezt kielégítő megoldások az $x_1 \sim x_2$ állapotsík $x_1 = x_2 = 0$ koordinátájú és **P_{cs}** jelű (csomópont) –, valamint az $x_1 = k_2/m_2$, $x_2 = k_1/m_1$ koordinátájú és **P_{ny}** jelű (nyeregpon) pontjaiban vannak (lásd 9. ábra). Az egyensúlyi pontok stabilitásviszonyait *Poincaré*–, vagy *Ljapunov* stabilitási tételei alapján a munkapontokban *linearizált* rendszer állapotmátrixának sajátérték eloszlása dönti el. A linearizált modellnek egy **P** jelű egyensúlyi pontra vonatkozó kifejezései

¹⁸ Általános érvényű tulajdonság: ha a rendszeregyenletben az $y(t)$ kimenőjelet vagy valamelyik $d^{(i)}y(t)/dt^i$ ($i: 1, 2, \dots, n-1$) deriváltját tartalmazó együttható *zérus* értéket vesz fel, a tag labilis (lásd a Hurwitz kritérium együttható feltételét).

¹⁹ Irodalom: Csáki Frigyes: Korszerű szabályozásméлет. Akadémiai Kiadó.

²⁰ Az állapottrajektóriák az $x_1(t)$ és $x_2(t)$ állapotváltozók időfüggvényeinek egy tömörített ábrázolási formája az az $x_2 \sim x_1$ állapotsíkon, grafikonjuk az időben paraméterezett formában megjelenítő $x_2 = f(x_1)$ görbék.

$$\begin{aligned}\frac{d\Delta x_1(t)}{dt} &= \left. \frac{\partial f_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} \right|_p \Delta x_1(t) + \left. \frac{\partial f_1(x_1, x_2)}{\partial x_2} \right|_p \Delta x_2(t) \\ \frac{d\Delta x_2(t)}{dt} &= \left. \frac{\partial f_2(x_1, x_2)}{\partial x_1} \right|_p \Delta x_1(t) + \left. \frac{\partial f_2(x_1, x_2)}{\partial x_2} \right|_p \Delta x_2(t) \\ A_p &= \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial f_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} \right|_p & \left. \frac{\partial f_1(x_1, x_2)}{\partial x_2} \right|_p \\ \left. \frac{\partial f_2(x_1, x_2)}{\partial x_1} \right|_p & \left. \frac{\partial f_2(x_1, x_2)}{\partial x_2} \right|_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 - m_1 x_{20} & -m_1 x_{10} \\ -m_2 x_{20} & k_2 - m_2 x_{10} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

A $\mathbf{P}_{cs}$ illetve $\mathbf{P}_{ny}$ egyensúlyi pontokra vonatkozó $A_{p_{cs}}$ és $A_{p_{ny}}$ állapotmátrixok a megfelelő x_{10} , x_{20} koordináták helyettesítésével kaphatók. Az állapotmátrixok és ennek sajátértékei:

$$\begin{aligned}A_{p_{cs}} & \text{ pontban : } x_{10} = x_{20} = 0 \\ A_{p_{cs}} &= \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \rightarrow \lambda_1 = k_1 > 0, \quad \lambda_2 = k_2 > 0 \\ A_{p_{ny}} & \text{ pontban : } x_{10} = \frac{k_2}{m_2}, \quad x_{20} = \frac{k_1}{m_1} \\ A_{p_{ny}} &= \begin{bmatrix} 0 & -k_2 \frac{m_1}{m_2} \\ -k_1 \frac{m_2}{m_1} & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \lambda_1 = \sqrt{k_1 k_2} > 0, \quad \lambda_2 = -\sqrt{k_1 k_2} < 0\end{aligned}$$

Miután a $\mathbf{P}_{cs}$ pontra linearizált rendszer állapotmátrixának *mindkét* sajátértéke *pozitív*, a $\mathbf{P}_{ny}$ pontra linearizált rendszer állapotmátrixának *egyik* sajátértéke *pozitív*, ezért *mindkét* egyensúlyi pont *labilis* (lásd *Ljapunov közvetett* stabilitási kritériuma). Az állapotsíkon ábrázolt trajektóriák azt szemléltetik, hogy a különféle kezdeti feltételekből induló szaporodás (vagy kihalás) miként alakul. Láthatóan az egyik faj kihalása (amikor is egyedeinek száma zérusra csökken) szükségszerűen bekövetkezik. Az időben paraméterezett trajektóriák az állapotvektor végpontjának mértani helyeit jelentik, miközben a kezdeti feltételek hatására a rendszer mozgásban van. A trajektóriákat meghatározó $x_2=f(x_1)$ kifejezések a

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)} = \frac{k_2 x_2 - m_2 x_1 x_2}{k_1 x_1 - m_1 x_1 x_2}$$

trajektória differenciálegyenlet $x_2=f(x_1)$ megoldásai, ezeket azonban itt nem részletezzük. Az 9. ábra azt mutatja, hogy a $\mathbf{P}_{cs}$ szinguláris pont (labilis *csomópont*) környezetéből „parabolák”, a $\mathbf{P}_{ny}$ szinguláris pont (labilis *nyereg* pont) környezetében pedig „hiperbolák” a meghatározó trajektória menetek.

A példákban bemutatott fizikai, biológiai objektumokhoz (hidraulikus–, elektromechanikus–, **PID** szabályozó–, elektronikus fizikai rendszerek, illetve egy biológiai folyamat) különféle formában megadható matematikai modelleket rendeltünk. Ezek nemlineáris (hidraulikus rendszer, és biológiai folyamat)–, illetve lineáris (villamos gép, **PID** szabályozó, **RC** oszcillátor) **állapotegyenletek** voltak. Láthattuk, hogy *lineáris rendszer esetben* az u bemenőjel–, az x állapotváltozó–, és az y kimenőjel közötti függvénykapcsolat az s Laplace operátor tartományban – az **átviteli mátrix**, illetve az **átviteli függvény** fogalmak bevezetésével – algebrai kifejezéssel is leírható. Ekkor – az A, B, C, D paramétermátrixok és az $u(s)=L\{u(t)\}$ ismeretében és $x(0)=0$ feltételezésével – az $x(s)$ és $y(s)$ megoldások az állapotegyenletek transzformáltjaiból közvetlenül kifejezhetők:

$$\begin{aligned}x(s) &= (sI - A)^{-1} B u(s) \\ y(s) &= [C(sI - A)^{-1} B + D] u(s) = \mathbf{W}(s) u(s).\end{aligned}$$

A modellalkotásnál egyrészt elhanyagolásokat tettünk (áramlási turbulencia, a folyadék viszkozitása, a forgómozgás légellenállása, az armatúra áramnak a fluxusra való visszahatása, a műveleti erősítők driftje, stb.), másrészt van a jeleknek egy olyan tartománya is, amelynél a matematikai modell érvényét veszti (tartályok túlfolyása, motor túlterhelése, műveleti

erősítők telítődése, stb.). Mindezek miatt *nem egzakt* leírásokról van szó, és ezek is csupán a jelek egy adott tartományában jellemzik a rendszereket. Mindegyik rendszer állapotegyenlete két *elsőrendű* differenciálegyenletet tartalmazott ($n=2$, másodrendű lineáris és nemlineáris rendszerek), amit a lineáris és nemlineáris *alaptagokból* felépített hatásvázlat *két integráló tagja* is reprezentál. A **SISO** tagok esetében (**PID** szabályozó, **RC** oszcillátor) az állapotegyenletek mellett a *másodrendű* rendszeregyenleteket is megadtuk. Általános esetben természetesen alacsonyabb ($n=1$), vagy magasabb ($n>2$) *rendszer* is előfordulhatnak, és a bemenő-, illetve a kimenő jelek j és k száma is tetszőleges lehet. Az **RC** oszcillátor és a biológiai folyamat példái azt kívánják érzékeltetni, hogy a dinamikus rendszerek állapotterez leírásának a szabályozási alkalmazásokon túlmutató jelentősége is van. A példák a *stabilis* és *labilis* egyensúlyi pontok minőségi különbözőségeit is illusztrálják, megmutatva, hogy a labilis egyensúlyi pontban a rendszer állapotváltozói nem tartózkodhatnak. A tartályok és az elektromechanikai rendszerek *önbeálló* (stabilis) tulajdonsággal rendelkeznek, ezért az állandó u_0 bemenő jelek mellett (mintegy a tranzienst folyamatok *végértékeként*) kialakulnak az állapotváltozók és a kimenő jelek x_0 , y_0 egyensúlyi értékei. Ekkor értelmezhetőek az egyensúlyi értékek közötti függvénykapcsolatok, és az ezeket megjelenítő $y_0=y(u_0)$ statikus karakterisztikák. A különféle technológiai folyamatok matematikai modelljét a folyamaton végzett mérési eljárásokkal is elő lehet állítani²¹.

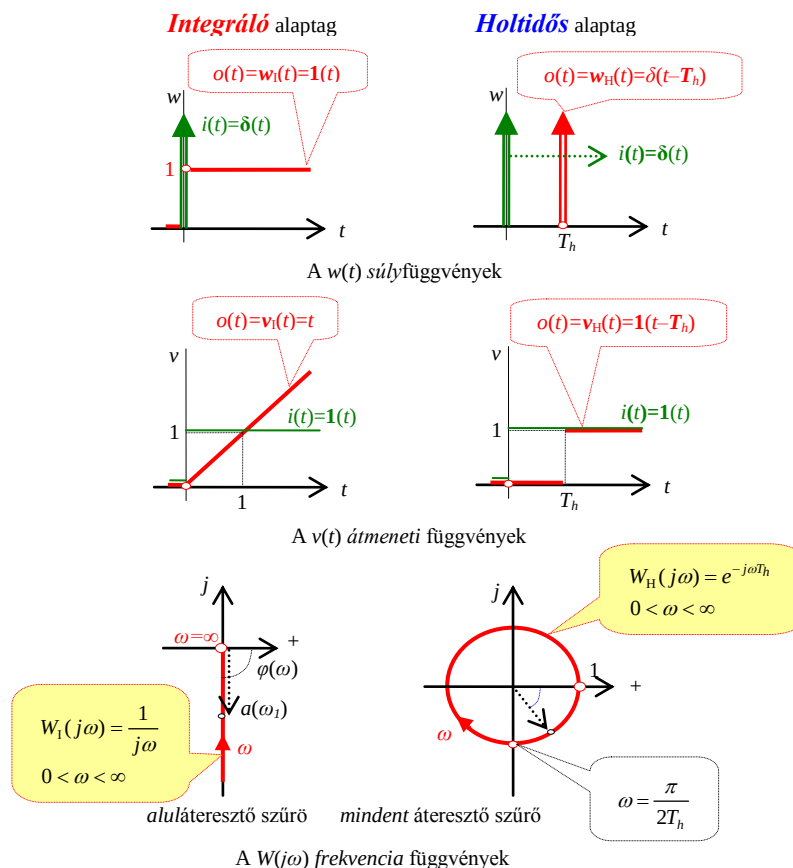
A bemutatott példákban látható, hogy a mérnöki szemléletmód a matematikai modellekhez egy jelátvivő tagokkal absztrahált vázlatot (a *hatásvázlatot*) rendel. Ez a képletszerűen megkonstruált matematikai modellel *egyenértékűen*, de attól szemléletesebben fejezi ki a rendszer jelei között meglévő *okási* viszonyokat, a *statikus* és *dinamikus* tulajdonságokat, a valóságos vagy virtuális *egyensúlyi* helyzetek kialakulásának lehetőségeit. A hatásvázlaton az *ok-okozat* relációk $u(t)$ *bemenőjel* (ok) $\rightarrow x(t)$ **állapotváltozó** (okozat és egyben ok) $\rightarrow y(t)$ *kimenőjel* (okozat) függvénykapcsolatokban jelennek meg, és *algebrai* és *dinamikus alaptagokból* álló struktúrát alkotnak. Az algebrai (más néven *memóriamentes*) tagok *időkésleltetés nélküli* függvénykapcsolatot absztrahálnak a bemeneteik és kimeneteik között, a *dinamikus* tag vagy egy *integráló (I)*-, vagy pedig egy *holtidős (H)* tulajdonsággal rendelkező *lineáris alaptag*. Az **I** tag $o(t)$ kimenő (*output*) jele az $i(t)$ bemenő (*input*) jelének *időszerinti integrálja* [más megfogalmazásban az **I** tag kimenő jelének a *sebessége* azonos a bemenő jelével: $do(t)/dt=i(t)$], a **H** tag kimenőjele a bemenőjelének T_h holtidővel *késleltetett* függvénye. A **dinamikus alaptagok** *lineáris* tagok, ezért matematikai leírásaik az *időtartományban* és az *operátor* tartományban egyaránt értelmezhetőek:

$$\begin{aligned} \text{I tag: } o(t) &= \int_0^t i(t) dt \rightarrow W_I(s) = \frac{o(s)}{i(s)} = \frac{1}{s} \\ \text{H tag: } o(t) &= i(t - T_h) \rightarrow W_H(s) = \frac{o(s)}{i(s)} = e^{-sT_h} \end{aligned}$$

Mindezekből az a fontos tulajdonság is következik, hogy az integráló tag $o(t)$ kimenő jelének az $i(t)$ bemenőjel hatására keltett $\Delta o(t)$ *megváltozásához* $t>0$ *időre van szükség* (ami egyébként azt is jelenti, hogy *véges* bemenőjel ugrás hatására az integráló tag kimenőjele a bemenőjel ugrásának *időpillanatában változatlan* marad). Az **I** tag fontos jellemzője, hogy

²¹ Ennek egyik módszere (amelyet elsősorban az egy bemenetű-, egy kimenetű **SISO** rendszerekre alkalmazhatunk) az $u(t)=1(t)$ egységugrásra adott $y(t)=v(t)$ válasz (az *átmeneti* függvény) feldolgozásán alapszik (az eljárást *átmeneti függvény* alapján végzett *folyamat* *identifikációnak* nevezik).

$o(t)$ kimenőjele *csak akkor lehet állandó, ha az $i(t)$ bemenőjele zérus*, illetve az aktuális, t_1 időpillanatban felvett $o(t_1)$ kimenőjele a bemenőjelének teljes $(-\infty < t < t_1)$ intervallumban felvett) „előéletétől” függ (*memória jellegű tulajdonság*). A holtidős tag kimenőjele a bemenőjelének a megváltozását csak a T_h holtidő eltelte után követi²². Az integráló és a holtidős alaptag minden dinamikus fizikai rendszer jelátviteli tulajdonságában és ennek matematikai leírásában szükségszerűen jelen van, és az u bemenőjel és y kimenőjel közötti jelkésleltetést absztahálja. Ha a T_h holtidő okozta késleltetés az integráló tagok jelenlétéből származó késleltetéshez képest igen kicsi, ennek hatásától gyakran eltekinthetünk.



10. ábra Az **integráló (I)** és a **holtidős (H)** alaptagok $w(t)$, $v(t)$ és $W(j\omega)$ rendszerjellemző függvényei

Megjegyzés

Az *integráló* és a *holtidős* alaptagok *lineáris* dinamikus tagok, és a nemlineáris dinamikus rendszerek jelátviteli tulajdonságainak leírásaiban is jelen vannak. A dinamikus rendszer alapvető rendszerjellemző függvénye a tag állapotegyenlete, illetve a rendszeregyenlete. *Lineáris SISO* rendszerek esetében ezen túlmenően a $W(s) = y(s)/u(s)$ **átviteli** függvény, a $w(t) = L^{-1}\{W(s)\}$ **súlyfüggvény** (ami az $i(t) = \delta(t)$ Dirac impulzusra adott

²² Az **I** (integráló) tag elsőrendű lineáris *differentiálegyenlete*: $do(t)/dt = k_I i(t)$, vagyis az $o(t)$ kimenőjelének $do(t)/dt$ *sebessége* arányos az $i(t)$ bemenő jellel. Az **I** tag *átviteli függvénye* k_I/s (az **I** alaptag esetében a k_I integrálási átviteli tényező az egység). A **H** alaptag olyan lineáris tagnak is tekinthető, melynek $\exp(-sT_h)$ transzcendens átviteli függvénye

$$e^{-sT_h} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + s \frac{T_h}{N}\right)^{-N} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + s \frac{T_h}{N}\right)^N}$$

szerint is közelíthető. Ez $N \geq 1$ számú, $T = T_h/N > 0$ időállandóval rendelkező, $1/(1+sT)$ átviteli függvényű egytárolós arányos tag soros kapcsolásának felel meg (a $N=10$ már jó közelítésnek számít).

válasz), a $v(t)=L^{-1}\{W(s)/s\}$ **átmeneti** függvény (ami az $i(t)=1(t)$ egységugrásra adott válasz) és a $W(j\omega)=W(s)_{s=j\omega}$ **frekvencia** függvény (ami az $i(t)=1\sin(\omega t)$ harmonikus bemenő jelre adott harmonikus $o(t)=a(\omega)\sin[\omega t+\varphi(\omega)]$ válasz $a(\omega)=absW(j\omega)$ és $\varphi(\omega)=arcW(j\omega)$ amplitúdóját és fáziseltolását szolgáltatja). Az integráló és a holtidős alaptagok *súly-, átmeneti-, és frekvencia* függvényei a 10. ábrán láthatók. A $w(t)$ súlyfüggvény és a $v(t)$ átmeneti függvény grafikonja szemléletesen mutatja, hogy a $\delta(t)$ és $1(t)$ bemenőjelekre milyen kimenőjel válasz jön létre. A frekvencia függvény azt jelzi, hogy az $i(t)=1\sin(\omega t)$ harmonikus bemenőjelre adott harmonikus $o(t)=a(\omega)\sin[\omega t+\varphi(\omega)]$ válasz **I** tag esetében olyan, hogy $\omega\rightarrow\infty$ esetében $a(\omega)=absW(j\omega)\rightarrow 0$, de a körfrekvenciától *függetlenül* $\varphi(\omega)=arcW(j\omega)=-\pi/2$ (aluláteresztő szűrő), a **H** tag esetében minden ω körfrekvencián $a(\omega)=absW(j\omega)=1$, de az ω körfrekvenciától *függően* $\varphi(\omega)=arcW(j\omega)=-\omega T_h$ (mindent áteresztő szűrő).

A dinamikus rendszerek állapotteres leírásának hatásvázlattal történő szemléltetésénél alkalmazott fontos elv, hogy egy $x(t)$ jel $dx(t)/dt$ deriváltját **integráló alaptag** $i(t)$ bemenetén működtetve, az integráló tag *kimeneten* maga az $o(t)=x(t)$ jel jelenik meg.

Az állapotegyenlet részletezése

Egy fizikailag realizált dinamikus rendszer (pl. a szabályozó, a folyamat alrendszerei vagy maga a teljes zárt szabályozási rendszer is) tulajdonságait leíró egyik általános matematikai modell az n számú $dx_i(t)/dt$ állapotsebességet és az $x_i(t)$ állapotváltozót, valamint a j számú $u_j(t)$ gerjesztést tartalmazó *elsőrendű közönséges differenciálegyenletből álló differenciálegyenlet rendszer* (az i -edik $dx_i(t)/dt$ állapotsebesség az $x_1, x_2, \dots, x_n$ állapotváltozók-, és az $u_1, u_2, \dots, u_j$ bemenő jelek *mindegyikének* az f_i nemlineáris függvénye), amelyet a k számú és az $y_1, y_2, \dots, y_k$ kimenő jelet (amelyeknek mindegyike szintén az állapotváltozóknak és az bemenő jelek mindegyikének a g_i nemlineáris függvényei) definiáló **algebrai egyenletrendszer** egészíti ki²³. A fizikai objektum $x_i(t)$ állapotváltozói olyan változók, amelyeknek a t_1 időpontbeli $x_i(t_1)$ ismerete alapján a tetszőleges $x_i(t_2)$ és az $y_i(t_2)$ ($t_2 > t_1$) válaszok meghatározhatók, ha ismerjük a matematikai modellt és az $u_i(t)$ gerjesztések $t_1 < t < t_2$ időintervallumbeli értékeit²⁴. Az $u(t)$ gerjesztésnek az $y(t)$ válaszra *közvetlen és közvetett* hatása van, a *közvetett* hatás az $x(t)$ állapotváltozók közvetítésével valósul meg. Ezt a matematikai modellt a dinamikus rendszer **állapotegyenlet reprezentációjának**, az x_i állapotváltozók által kifeszített n dimenziós teret **állapotternek** (state-space) nevezzük. Általános – holtidőt nem tartalmazó – alakja (j számú bemenőjellel, k számú kimenőjellel rendelkező, n rendszámú nemlineáris MIMO taggal absztrahált rendszer esetén):

²³ A műszaki technológiai folyamatokban az u irányító jel, az u_z zavaró jelek, és az y szabályozott jellemző közötti függvénykapcsolat meghatározására a mechanika, a villamosságtan, a hőtan, az áramlástan stb. törvényszerűségei (Kirchhoff, Newton törvények, a hőátadás és hővezetés törvényei, Bernoulli egyenletek, stb.) kerülnek felhasználásra. A folyamatok kauzálisak (az ok időben megelőzi az okozatot), és az u bemenőjelek hatására kiváltott x állapotváltozók és y kimenőjelek időfolyásai igen változatos képet mutatnak. Az energia és anyagtárolási okok, valamint a jelterjedés véges sebessége miatt a kimenőjel *késleltetve* reagál a bemenőjelek megváltozásaira, e késleltetések nagyságrendjei a $\mu\text{sec} \sim \text{msec}$ (pl. elektronikus- és elektromechanikus rendszerek), de $\text{sec} \sim \text{óra}$ (pl. termikus folyamatok) értékek is lehetnek. Az élettani folyamatok matematikai leírása a technikai folyamatok leírásához képest lényegesen bonyolultabb eljáráshoz vezethet, jelenleg is kutatás tárgyát képezi.

²⁴ A dinamikus rendszer alaptagokból felépített hatásvázlatán az *integráló tagok* bemenőjelei a $dx_i(t)/dt$ állapotsebességek, kimenőjelei az állapotsebességek idő szerinti integráljai, vagyis a rendszer $x_i(t)$ állapotváltozói.

$$\begin{aligned}
 \frac{dx_1(t)}{dt} &= f_1[x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_j(t)] \\
 \frac{dx_2(t)}{dt} &= f_2[x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_j(t)] \\
 &\vdots \\
 \frac{dx_n(t)}{dt} &= f_n[x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_j(t)] \\
 &***** \\
 y_1(t) &= g_1[x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_j(t)] \\
 y_2(t) &= g_2[x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_j(t)] \\
 &\vdots \\
 y_k(t) &= g_k[x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_j(t)]
 \end{aligned}$$

vagy rövidebben:

$$\begin{aligned}
 \frac{dx_i(t)}{dt} &= f_i[x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_j(t)] \quad i = 1, 2, \dots, n \\
 &***** \\
 y_i(t) &= g_i[x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_j(t)] \quad i = 1, 2, \dots, k
 \end{aligned}$$

A dinamikus rendszert leíró állapotegyenlet ismeretében rendszerint azt a két kérdést kell megválaszolni, hogy a f_i és g_i függvények, valamint az állapotváltozók $x_i(0)$ kezdeti értékeinek ismeretében,

- a $t=0$ időpontban **belépő**, adott $u_i(t)$ ($i: 1, 2, \dots, j$) gerjesztések hatására a $0 < t < \infty$ időintervallumban a rendszer milyen $x_i(t)$ ($i: 1, 2, \dots, n$) és $y_i(t)$ ($i: 1, 2, \dots, k$) **válaszokat** ad, illetve hogy az
- $u_i(t)=u_{i0}\mathbf{1}(t)=\text{állandó}$ gerjesztések esetében **létrejöhet-e** a rendszer olyan állapota, melyben $t \rightarrow \infty$ mellett az $x_i(t)$ állapotváltozók és az $y_i(t)$ kimenő jelek mindegyike az x_{i0} és y_{i0} állandó (**egyensúlyi**) értékeikhez tartanak²⁵?

A kérdések megválaszolása az állapotegyenlet **megoldását**, és a rendszer **stabilitásvizsgálatát** igényli. A megoldás során először $x_i(t)$ állapotváltozók kiszámításával *meg kell oldani* az n számú nemlineáris, elsőrendű, közönséges differenciálegyenletből álló differenciálegyenlet rendszert, majd az $x_i(t)$ és $u_i(t)$ ismeretében a nemlineáris, algebrai (mérési) egyenletrendszerből egy egyszerű behelyettesítéssel lehet *kiszámítani* az $y_i(t)$ válaszokat. Miután a f_i és g_i általában nemlineáris függvények, ezért rendszerint *numerikus* megoldási módszerek jöhetnek szóba. Ha azonban a nemlineáris matematikai modellt egy adott **P** jelű egyensúlyi munkapont környezetére *linearizáljuk*, vagy a rendszer eleve lineáris, olyan matematikai modellt kaphatunk, amelynek létezik *analitikus* megoldása is (a lineáris

²⁵ A dinamikus rendszer analízise során további, szintén fontos kérdések is felmerülhetnek (pl. *irányíthatóak-e*, illetve *megfigyelhetőek-e* a folyamat $x_i(t)$ állapotváltozói, *irányíthatóak-e* az $y_i(t)$ kimenő jelek, milyen legyen az $u(t)$ irányító jel, ha a rendszert egy adott $x(t_0)$ állapotából véges idő alatt az $x(t_1)$ állapotába akarjuk átvinni, az állapotegyenleten és az átviteli mátrixon túlmenően milyen egyéb matematikai *rendszerjellemzőkkel* írható le a modellezett objektum, stb.)

rendszereknek egységes, szinte minden vonatkozásában kidolgozott rendszerelmélete van²⁶). A stabilitási kérdésének eldöntésére többféle stabilitásfogalom használatos, nemlineáris esetben komplikált eljárások lehetségesek (*Maxwell, Poincaré, Ljapunov, Popov* stb. szerzők által kidolgozott stabilitásvizsgálati módszerek), a lineáris rendszerek stabilitáselmélete azonban viszonylag egyszerű (*Hurwitz, Nyquist, Bode, Evans* stb. eljárásai). Jelen munkában a stabilitás fogalmának azt a **gyakorlatban alkalmazott** elvét használjuk, amely szerint stabilisnak azt a dinamikus rendszert tekintjük, amely állandó $u(t)=u_0\mathbf{1}(t)$ belépő egységugrás típusú gerjesztésvektor hatására olyan *korlátos* $x(t)$ állapotvektor és $y(t)$ kimenőjelvektor választ ad, amelyeknek $t \rightarrow \infty$ időponthoz tartozó $x(\infty)=x_0$, $y(\infty)=y_0$ állandósult (de az u_0 értékétől függő) értékei is léteznek²⁷. Az ilyen rendszer a tranziensek lezajlása után az állandó u_0 gerjesztés vektor hatására előbb–utóbb állandó x_0 állapotváltozóval és y_0 kimenőjellel nyugalomba (egyensúlyi helyzetbe) kerül (**önbeálló rendszer**). Fontos észrevennünk, hogy az állapotegyenlet megoldása során az n számú $x_i(t)$ állapotváltozó és k számú $y_i(t)$ kimenőjel *mindegyikének* az időfüggvényét meg kell határoznunk. Az állapotváltozók által létesített n dimenziós állapottérben – miközben a t időváltozó felveszi a $0 < t < \infty$ intervallumbeli értékeit – ábrázolható az $x(t)=[x_1(t) \ x_2(t) \ \dots \ x_n(t)]^T$ állapotvektor²⁸ végpontjának mértani helye (a t idővel paraméterezett n dimenziós *térgörbe*, más néven az állapottrajektória), ami az n számú $x_i(t)$ megoldásoknak a $0 < t < \infty$ időintervallumban egy tömörített megjelenítési formája.

A nemlineáris rendszer munkaponti linearizálása

Legyen az $u(t)=[u_{10} \ u_{20} \ \dots \ u_{j0}]^T$ belépő gerjesztés vektor minden u_{i0} komponense $t>0$ mellett állandó, és tételezzük fel, hogy az ezek hatására keltett $x(t)=[x_1(t) \ x_2(t) \ \dots \ x_n(t)]^T$ állapotvektor $t \rightarrow \infty$ -ben felvett állandósult $x(t)_{t=\infty}=x(\infty)=x_0=[x_1(\infty) \ x_2(\infty) \ \dots \ x_n(\infty)]^T$ értékének minden $x_i(\infty)$ komponense is $x_i(\infty)=x_{i0}$ =*állandó* értékre beáll. Az n dimenziós állapottérnek ezt az $x_0=[x_{10} \ x_{20} \ \dots \ x_{n0}]^T$ koordinátájú **P** pontját a rendszer *stabilis egyensúlyi pontjának* nevezzük. Ebben az egyensúlyi állapotban minden állapotsebesség zérus ($dx_{i0}(t)/dt=0$ mert x_0 =*állandó*), ezért a **P** egyensúlyi pontban

$$\begin{aligned}\frac{dx_{i0}(t)}{dt} &= 0 = f_i(x_{10}, \dots, x_{n0}, u_{10}, \dots, u_{j0}) \quad i = 1, 2, \dots, n \\ y_{i0} &= g_i(x_{10}, \dots, x_{n0}, u_{10}, \dots, u_{j0}) \quad i = 1, 2, \dots, k\end{aligned}$$

Ennek az $n+k$ számú *algebrai* egyenletrendszernek az alapján – a f_i , g_i függvények és az u_{i0} gerjesztések ismeretében – az állapotváltozók és a kimenő jelek x_{i0} , y_{i0} egyensúlyi értékei meghatározhatók. Ha az egyensúlyi helyzetben a gerjesztés vektor minden komponense $u_{i0}+\Delta u_i(t)$ értékre megváltozik, ez szükségszerűen az állapotváltozók és a kimenőjelek minden komponensének $x_{i0}+\Delta x_i(t)$, $y_{i0}+\Delta y_i(t)$ változását is maga után vonja. A változást leíró állapotegyenlet

²⁶ Az eredeti nemlineáris modellnél a munkapontra linearizált modell *egyszerűbb*, de csupán a munkapont környezetében lejátszódó jelenségek tárgyalására alkalmas. Lineáris rendszer esetében a stabilitás *rendszerjellemező* tulajdonság, *nem függ* a kezdeti feltételtől és a gerjesztéstől. A linearizálás módszerének alkalmazásával a matematikai modell szempontjából is *homogenizálhatjuk* a szabályozási rendszer modelljét.

²⁷ Ilyen stabilis tulajdonsággal rendelkezik az előzőekben tárgyalt példák közül a *tartályokból álló folyamat* és az *egyenáramú motor* (*önbeálló* rendszerek). Az elektronikus **PID** szabályozó, az **RC** oszcillátor és a **Volterra** egyenletekkel leírt rendszereket *labilis* tulajdonsággal rendelkeznek, mert *állandó* bemenő jelek mellett az állapotváltozóik és a kimenőjeleik – a működési tartományaikban – *nem* képesek állandó értéket felvenni (*nem önbeálló* rendszerek).

²⁸ Az $[x_1(t) \ x_2(t) \ \dots \ x_n(t)]$ sorvektor $[x_1(t) \ x_2(t) \ \dots \ x_n(t)]^T$ transzponáltja *oszlopvektort* jelent, és a szövegezésben a leírás helytakarékossága miatt használjuk a transzponált alakot.

$$\frac{d[x_{i0} + \Delta x_i(t)]}{dt} = f_i[x_{i0} + \Delta x_1(t), \dots, x_{n0} + \Delta x_n(t), u_{10} + \Delta u_1(t), \dots, u_{j0} + \Delta u_j(t)] \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$y_{i0} + \Delta y_i(t) = g_i[x_{i0} + \Delta x_1(t), \dots, x_{n0} + \Delta x_n(t), u_{10} + \Delta u_1(t), \dots, u_{j0} + \Delta u_j(t)] \quad i = 1, 2, \dots, k$$

Az f_i és g_i függvényeket – ha ez egyébként megtehető – Taylor sorba fejtve, valamint figyelemmel arra, hogy u_{i0} , x_{i0} és y_{i0} állandó értékek és $dx_{i0}/dt=0$, $f_i(x_{10}, \dots, x_{n0}, u_{10}, \dots, u_{j0})=0$, valamint a gerjesztés $\Delta u_i(t)$ megváltozása is „kicsi”²⁹, a másodrendűen kis mennyiségeket elhanyagolva kapjuk:

$$\underbrace{\frac{dx_{i0}}{dt}}_0 + \frac{d[\Delta x_i(t)]}{dt} \cong \underbrace{f_i(x_{10}, \dots, x_{n0}, u_{10}, \dots, u_{j0})}_0 + \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1} \right)_P \Delta x_1(t) + \dots + \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_n} \right)_P \Delta x_n(t) +$$

$$+ \left(\frac{\partial f_i}{\partial u_1} \right)_P \Delta u_1(t) + \dots + \left(\frac{\partial f_i}{\partial u_j} \right)_P \Delta u_j(t) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$y_{i0} + \Delta y_i(t) \cong \underbrace{g_i(x_{i0}, \dots, x_{n0}, u_{10}, \dots, u_{j0})}_{y_{i0}} + \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_1} \right)_P \Delta x_1(t) + \dots + \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_n} \right)_P \Delta x_n(t) +$$

$$+ \left(\frac{\partial g_i}{\partial u_1} \right)_P \Delta u_1(t) + \dots + \left(\frac{\partial g_i}{\partial u_j} \right)_P \Delta u_j(t) \quad i = 1, 2, \dots, k$$

illetve a $dx_{i0}/dt=f_i(x_0, u_0)=0$, $y_{i0}=g_i(x_0, u_0)$ figyelembevételével:

$$\frac{d[\Delta x_i(t)]}{dt} \cong \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1} \right)_P \Delta x_1(t) + \dots + \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_n} \right)_P \Delta x_n(t) + \left(\frac{\partial f_i}{\partial u_1} \right)_P \Delta u_1(t) + \dots + \left(\frac{\partial f_i}{\partial u_j} \right)_P \Delta u_j(t) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\Delta y_i(t) \cong \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_1} \right)_P \Delta x_1(t) + \dots + \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_n} \right)_P \Delta x_n(t) + \left(\frac{\partial g_i}{\partial u_1} \right)_P \Delta u_1(t) + \dots + \left(\frac{\partial g_i}{\partial u_j} \right)_P \Delta u_j(t) \quad i = 1, 2, \dots, k$$

A $(\partial f_i/\partial x_i)_P$, $(\partial f_i/\partial u_i)_P$, $(\partial g_i/\partial x_i)_P$, $(\partial g_i/\partial u_i)_P$ parciális deriváltak melletti P index arra utal, hogy ezek a *meredekségek* a **P** egyensúlyi ponthoz tartozó értékeket jelentik. Ez a linearizálás eredményeként kapott lineáris matematikai modell az *egyensúlyi pont kis környezetében* lejátszódó tranziens jelenségek tanulmányozására *helyettesítheti* az eredeti nemlineáris rendszer matematikai modelljét, és egyszerűségénél fogva a rendszeranalízist is jelentősen megkönnyíti. A közelítés csak akkor alkalmazható, ha a f_i és g_i nemlineáris függvények az egyensúlyi pontban az *érintőkkel helyettesíthetők*, vagyis ha a Jacobi típusú **A**, **B**, **C**, **D** paraméter mátrixokban szereplő parciális deriváltak léteznek (a f_i és g_i függvények a **P** munkapontban *folytonosak*, *egyértékűek* és legalább egyszer *deriválhatók*, tehát nincs *szakadásuk*, *hiszterézisük*, vagy *töréspontjuk*). A nemlineáris rendszer **P** munkapontra vonatkozó – vektor–mátrix formátumban is felírható – linearizált matematikai modellje mindezek alapján:

²⁹ A „kis változás” azt jelenti, hogy az $f(x_0, u_0)=0$, $g(x_0, u_0)=0$ egyenletekkel leírt hiperfelületek a **P** egyensúlyi pont környezetében az *érintő hipersíkjaikkal* közelíthetők.

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \frac{d\Delta x_1(t)}{dt} \\ \frac{d\Delta x_2(t)}{dt} \\ \vdots \\ \frac{d\Delta x_n(t)}{dt} \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}}_{A \quad (n \times n)} \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta x_1(t) \\ \Delta x_2(t) \\ \vdots \\ \Delta x_n(t) \end{bmatrix}}_{\Delta x(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_j} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial u_j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \frac{\partial f_n}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial u_j} \end{bmatrix}}_{B \quad (n \times j)} \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta u_1(t) \\ \Delta u_2(t) \\ \vdots \\ \Delta u_j(t) \end{bmatrix}}_{\Delta u(t)} \\
\begin{bmatrix} \Delta y_1(t) \\ \Delta y_2(t) \\ \vdots \\ \Delta y_k(t) \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_k}{\partial x_1} & \frac{\partial g_k}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_k}{\partial x_n} \end{bmatrix}}_{C \quad (k \times n)} \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta x_1(t) \\ \Delta x_2(t) \\ \vdots \\ \Delta x_n(t) \end{bmatrix}}_{\Delta x(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u_1} & \frac{\partial g_1}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial u_j} \\ \frac{\partial g_2}{\partial u_1} & \frac{\partial g_2}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial u_j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_k}{\partial u_1} & \frac{\partial g_k}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial g_k}{\partial u_j} \end{bmatrix}}_{D \quad (k \times j)} \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta u_1(t) \\ \Delta u_2(t) \\ \vdots \\ \Delta u_j(t) \end{bmatrix}}_{\Delta u(t)}
\end{aligned}$$

Ennek egy tömörebb, általánosan használt alakja (a $d\Delta x(t)/dt$: *állapotsebesség* vektor, $\Delta x(t)$: *állapotvektor* ($n \times 1$), $\Delta u(t)$: *bemenőjel* vektor ($j \times 1$), $\Delta y(t)$: *kimenőjel* vektor ($k \times 1$), **A** : *állapotszámítás* ($n \times n$), **B** : *bemeneti mátrix* ($n \times j$), **C** : *kimeneti mátrix* ($k \times n$), **D** : *direkt mátrix* ($k \times j$) jelölések bevezetésével):

$$\begin{aligned}
\frac{d\Delta x(t)}{dt} &= A\Delta x(t) + B\Delta u(t) \\
\Delta y(t) &= C\Delta x(t) + D\Delta u(t)
\end{aligned}$$

A linearizált állapotegyenletben a kis változásra utaló Δ jelölést rendszerint elhagyjuk, de ha ez félreértésre adna alkalmat, a megfelelő szövegkörnyezetben erre hivatkozunk³⁰.

6. Példa

Az előzőekben tárgyalt két tartályból álló folyamat *nemlineáris állapotegyenleteit* már részleteztük. A nemlineáris tulajdonságot a differenciálegyenletekben szereplő négyzetgyökös kifejezések jelentették (a q kiáramló hozamok az $x=h$ szinthez tartozó *négyzetgyökének* függvényei, $q=\alpha\sqrt{h}=\alpha\sqrt{x}$), a differenciálegyenleteket kísérő algebrai egyenletek eleve lineáris kifejezések. A linearizálás során vegyük figyelembe, hogy az u_{10} és u_{20} állandó bemeneti hozamok mellett a **P** jelű egyensúlyi pont állapotváltozóinak koordinátái $x_{10}=h_{10}=c_1(u_{10})^2$, $x_{20}=h_{20}=c_2(u_{10}+u_{20})^2$. A gyökvonás linearizálása:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\alpha\sqrt{x}) = \alpha \frac{\partial}{\partial x} \left(x^{\frac{1}{2}} \right) = \alpha \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \alpha \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{\alpha}{2\sqrt{x}}$$

Jelen példában (ami kivételnek tekinthető) a $dx(t)/dt = -\alpha\sqrt{x(t)} + \beta u(t)$ típusú nemlineáris differenciálegyenlet analitikusan is megoldható lenne, de most a *linearizálás* alkalmazásával történő megoldást kívánjuk illusztrálni. Az előzőekben már bemutatott állapotegyenletek alapján láthattuk, hogy a mérési egyenlet eleve lineáris, ezért csak a nemlineáris differenciálegyenlet linearizálását kell végrehajtani. Részletezve:

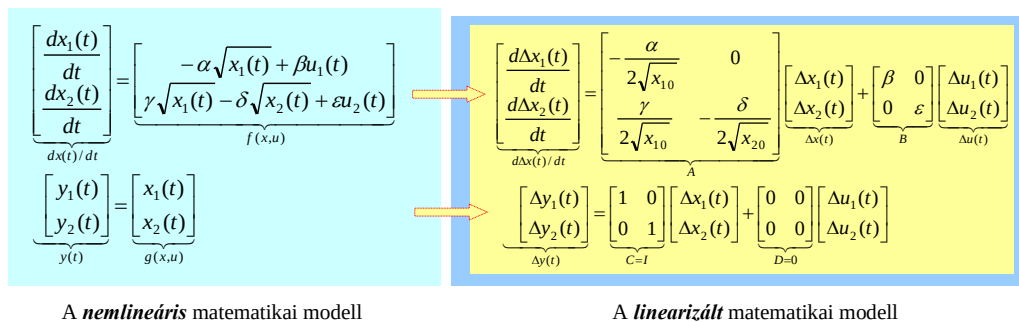
³⁰ Lehetséges, hogy a dinamikus rendszer matematikai modellje eleve lineáris (lásd a korábban tárgyalt elektromechanikus rendszer, PID szabályozó és RC oszcillátor példákat, amelyek lineáris, idő-invariáns – LTI – matematikai modellel leírható rendszerek). Ez azonban csak azért lehetséges, mert a fizikai objektum matematikai leírásakor a másodlagos jelenségeket figyelmen kívül hagytuk.

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1(t)}{dt} &= f_1[x_1(t), u_1(t)] = -\alpha\sqrt{x_1(t)} + \beta u_1(t) \\
\frac{dx_2(t)}{dt} &= f_2[x_1(t), x_2(t), u_2(t)] = \gamma\sqrt{x_1(t)} - \delta\sqrt{x_2(t)} + \varepsilon u_2(t) \\
y_1(t) &= g_1[x_1(t)] = x_1(t) \\
y_2(t) &= g_2[x_2(t)] = x_2(t) \\
&***** \\
\alpha &= \mu\left(\frac{d_1}{D_1}\right)^2 \sqrt{2g} > 0, \quad \gamma = \mu\left(\frac{d_1}{D_2}\right)^2 \sqrt{2g} > 0, \quad \delta = \mu\left(\frac{d_2}{D_2}\right)^2 \sqrt{2g} > 0, \\
\beta &= \frac{1}{D_1^2 \pi} > 0, \quad \varepsilon = \frac{1}{D_2^2 \pi} > 0
\end{aligned}$$

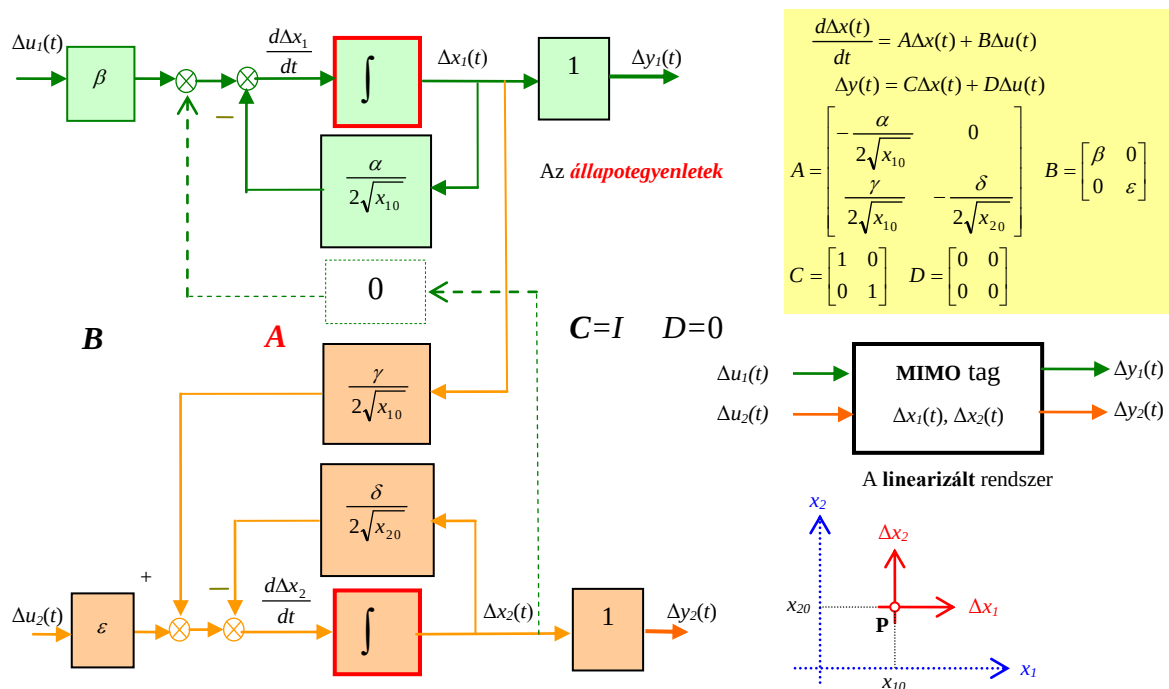
A linearizált állapotegyenletek:

$$\begin{aligned}
\frac{d\Delta x_1(t)}{dt} &= \left(\frac{\partial f_1(x_1, u_1)}{\partial x_1} \right)_p \Delta x_1(t) + \left(\frac{\partial f_1(x_1, u_1)}{\partial u_1} \right)_p \Delta u_1(t) = -\frac{\alpha}{2\sqrt{x_{10}}} \Delta x_1(t) + \beta \Delta u_1(t) \\
\frac{d\Delta x_2(t)}{dt} &= \left(\frac{\partial f_2(x_1, x_2, u_2)}{\partial x_1} \right)_p \Delta x_1(t) + \left(\frac{\partial f_2(x_1, x_2, u_2)}{\partial x_2} \right)_p \Delta x_2(t) + \left(\frac{\partial f_2(x_1, x_2, u_2)}{\partial u_2} \right)_p \Delta u_2(t) = \\
&= \frac{\gamma}{2\sqrt{x_{10}}} \Delta x_1(t) - \frac{\delta}{2\sqrt{x_{20}}} \Delta x_2(t) + \varepsilon \Delta u_2(t) \\
\Delta y_1(t) &= \Delta x_1(t) \\
\Delta y_2(t) &= \Delta x_2(t)
\end{aligned}$$

Vektor–mátrix alakban az eredeti *nemlineáris* és a *linearizált* matematikai modell:



A rendszer állandó u_{10} , u_{20} bemenő jelek mellett x_{10} , x_{20} adatokkal az állapotsík $\mathbf{P}(x_{10}, x_{20})$ pontjában stabilis egyensúlyi helyzetben van. A $\mathbf{P}$ pont kis környezetében a rendszer mozgását *közelítőleg* a linearizált állapotegyenletek írják le. A linearizált rendszer hatásvázlatát és a paramétermátrixokat a linearizált állapotegyenlet alapján a 11. ábra tartalmazza. Figyeljük meg, hogy a hatásvázlaton (a linearizálás eredményeként) kizárólag *arányos* ($\mathbf{P}$), *integráló* ($\mathbf{I}$), és *összegző* ($\mathbf{\Sigma}$) **lineáris alaptagok** szerepelnek, és az integráló tagok *negatívan* vannak visszacsatolva. A visszacsatolások átviteli tényezői az $\mathbf{A}$ állapotmátrix paraméterei, amelyek az egyensúlyi pont koordinátáinak függvényei. Az $\mathbf{A}$ állapotmátrix *alsó háromszög* alakú, így főátlójában a $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$ *sajátértékei* szerepelnek. A linearizált állapotegyenletnek létezik az adott $\Delta x(0) = [\Delta x_1(0) \ \Delta x_2(0)]^T$ kezdeti feltételekre és $\Delta u(t) = [\Delta u_1(t) \ \Delta u_2(t)]^T$ gerjesztésre vonatkozó $\Delta y(t) = \Delta x(t) = [\Delta x_1(t) \ \Delta x_2(t)]^T$ analitikus megoldása, ennek kérdéskörét a későbbiekben tárgyaljuk. Mivel $\mathbf{C}$ egységmátrix és $\mathbf{D}$ nullmátrix, ennek jelentése az, hogy a rendszer kimenőjelei azonosak az állapotváltozókkal, és ekkor a bemenőjelek *direkt* módon a kimenőjeleket nem befolyásolják ($\mathbf{D}u(t)=0$). A jelek kis változásait tartalmazó állapotegyenlet lényegét tekintve azt jelenti, hogy az eredeti nemlineáris rendszer állapotterének origóját egy lineáris koordináta transzformációval a $\mathbf{P}(x_{10}, x_{20})$ egyensúlyi pont által meghatározott helyre transzformáljuk, és ebben a munkapontban a nemlineáris függvényeket az *érintőkkel* helyettesítjük (lásd 8. ábra).

11. ábra A tartályok *linearizált* állapotegyenletéhez rendelt (lineáris alaptagokat tartalmazó) hatásvázlat

Megjegyzés

A korábban tárgyalt biológiai folyamat (másodrendű nemlineáris *Volterra* állapotegyenlet) linearizálásának eljárását az előzőekben szintén bemutattuk. A rendszer nemlinearitását ott az állapotváltozók szorzási művelete okozta.

A holtidőtől mentes *linearizált* (vagy eredetileg is lineáris) modell *algebrai alaptagjai* az időkéseletetés nélküli *arányos* (**P**) és az *összegző* (**Σ**) *lineáris alaptagok*³¹, dinamikus tagja az *integráló* (**I**) *alaptag*. Az **LTI** rendszer alaptagokból felépíthető hatásvázlat struktúrájában a tagok egymáshoz képet soros-, párhuzamos-, és visszacsatolást tartalmazó *alapstruktúrákat* alkothatnak³². A lineáris modellben a $dx_i(t)/dt$ állapotsebességek illetve az $y_i(t)$ kimenőjelek mindegyike az összes $x_i(t)$ állapotváltozónak és az összes $u_i(t)$ bemenőjelnek a *súlyozott lineáris kombinációja*, a súlyozó tényezők az **A**, **B**, **C**, **D** paramétermátrixokban szereplő állandók³³. A lineáris rendszer állapotegyenletének koordinátákban felírt alakja:

³¹ Az *arányos* tag $o(t)=y(t)$ kimenőjele az $i(t)=u(t)$ bemenőjelenek *állandó szorosa* ($y(t)=ku(t)$, k az arányos tag átviteli tényezője), az *összegző* tag kimenőjele a bemenőjeleinek összege [$y(t)=\Sigma u_i(t)$]. A *nemlineáris* rendszerben (a lineáris alaptagokon túlmenően) *nemlineáris algebrai tagok* is jelen vannak. Ezek – a nemlinearitások sokféleségének megfelelően – igen változatosak lehetnek (például: szorzók, hányados képzők, gyökvonók, hatványozók, logaritmizálók, telítődők, két és többállásúak, hiszterézissel rendelkezők, általános $y=f(u)$ függvénygenerátorok, stb.). Az algebrai tagokat *memóriamentes* tagoknak is nevezik, miután kimenőjelüknek a t_i időpontbeli $y(t_i)$ értéke kizárólag a bemenőjelük $u(t_i)$ értékétől függ (vagyis független az y kimenőjelenek és u bemenőjelenek a t_i időpontot megelőző értékeitől). Az algebrai tagok egy *idealizált*, időkéseletetés nélküli $o=f(i)$ kapcsolatot írnak le az i bemenő és o kimenő jelek között.

³² A soros és párhuzamos kapcsolásokban a *lineáris* tagok egymáshoz képesti felcserélése az *eredő* jelátviteli tulajdonságokat változtatlanul hagyja, visszacsatolás esetében a visszacsatolt és a visszacsatoló tag felcserélése (hacsak nem *azonos* jelátviteli tulajdonságú tagokról van szó) azonban alapvetően megváltoztathatja. Az egymástól különböző nemlineáris alaptagok soros kapcsolásában a tagok sorrendjének felcserélése az eredő jelátvitelt szintén alapvetően módosítja.

³³ Az $u(t)$, $x(t)$ és $y(t)$, jelek *oszlopvektorok*, melyeknek komponensei az $u_i(t)$, $x_i(t)$ és $y_i(t)$ skaláris változók. Ezeket az *oszlopvektorokat* gyakran *sorvektorok* transzpozíciójaként is jelöljük, pl. $x(t)=[x_1(t) \ x_2(t) \dots x_n(t)]^T$.

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{dx_1(t)}{dt} \\ \frac{dx_2(t)}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n(t)}{dt} \end{bmatrix}}_{dx(t)/dt} &= \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{A \ (n \times n)} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}}_{x(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nj} \end{bmatrix}}_{B \ (n \times j)} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_j(t) \end{bmatrix}}_{u(t)} \\
 \underbrace{\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_k(t) \end{bmatrix}}_{y(t)} &= \underbrace{\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{k1} & c_{k2} & \cdots & c_{kn} \end{bmatrix}}_{C \ (k \times n)} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}}_{x(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1j} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{k1} & d_{k2} & \cdots & d_{kj} \end{bmatrix}}_{D \ (k \times j)} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_j(t) \end{bmatrix}}_{u(t)}
 \end{aligned}$$

A koordinátákban megadott állapotegyenleteket (a leírás tömörítése céljából) általában a vektor–mátrix formájukban is használjuk. Az állapottér reprezentációk kifejezései ennek megfelelően *nemlineáris* rendszer esetében:

$$\begin{aligned}
 \frac{dx(t)}{dt} &= f[x(t), u(t)] \\
 y(t) &= g[x(t), u(t)]
 \end{aligned}$$

lineáris (vagy linearizált nemlineáris) rendszer esetében pedig:

$$\begin{aligned}
 \frac{dx(t)}{dt} &= Ax(t) + Bu(t) \\
 y(t) &= Cx(t) + Du(t)
 \end{aligned}$$

Ezekben az $u(t)$, $x(t)$, $y(t)$ jelek és a f és g tetszőleges nemlineáris kifejezéseket tartalmazó függvények rendre $j \times 1$, $n \times 1$, $k \times 1$ és $n \times 1$, $k \times 1$ méretű oszlopvektorok:

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_j(t) \end{bmatrix} \quad x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_k(t) \end{bmatrix} \quad f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \quad g = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_k \end{bmatrix}$$

Az $A \ (n \times n)$, $B \ (n \times j)$, $C \ (k \times n)$, $D \ (k \times j)$ adott méretű és az oszlopvektorokhoz *illeszkedő paramétermátrixok*.

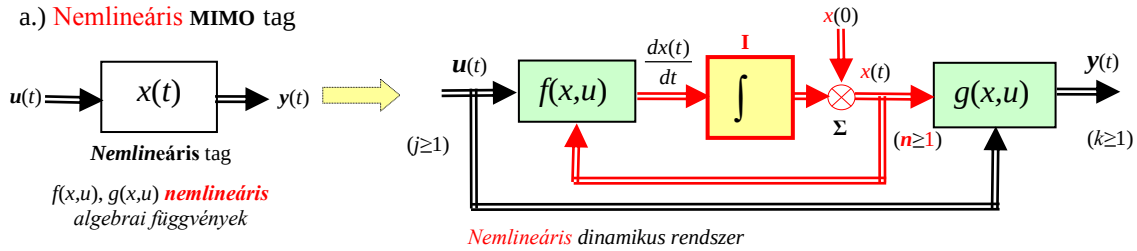
A nemlineáris–, és lineáris rendszerek n rendszámú állapotegyenleteihez rendelhető **MIMO** (*több bemenetű: $j > 1$, több kimenetű: $k > 1$*) és **SISO** (*egy bemenetű: $j = 1$, egy kimenetű: $k = 1$*) tagok hatásvázlatait a 12. ábra tartalmazza. Figyeljük meg, hogy mindegyik hatásvázlaton szembeötlően jelenik meg az a tulajdonság, hogy

■ az $y(t)$ kimenőjelnek az $x(t)$ állapotváltozótól és az $u(t)$ bemenő jeltől való összetevője van, valamint

■ a rendszer dinamikus tulajdonságait az $x(t)$ állapotváltozó hordozza, és az $x(t)$ integráló alaptag visszacsatolásának kimenőjeleként van jelen.

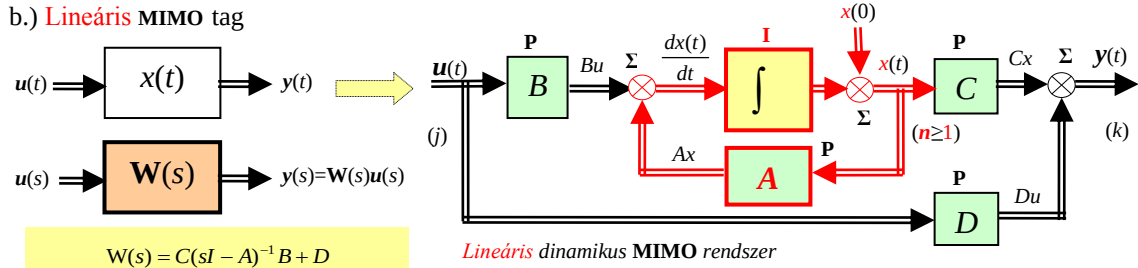
***** Nemlineáris rendszer *****

a.) **Nemlineáris MIMO tag**



***** Lineáris rendszerek *****

b.) **Lineáris MIMO tag**

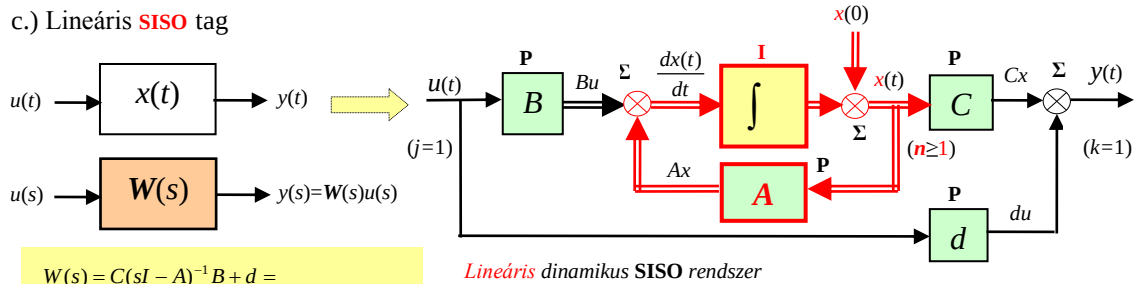


$dx(t)/dt$ állapotsebesség vektor ($n \times 1$) $x(t)$ állapotvektor ($n \times 1$)

$u(t)$ bemenőjel vektor ($j \times 1$) $y(t)$ kimenőjel vektor ($k \times 1$)

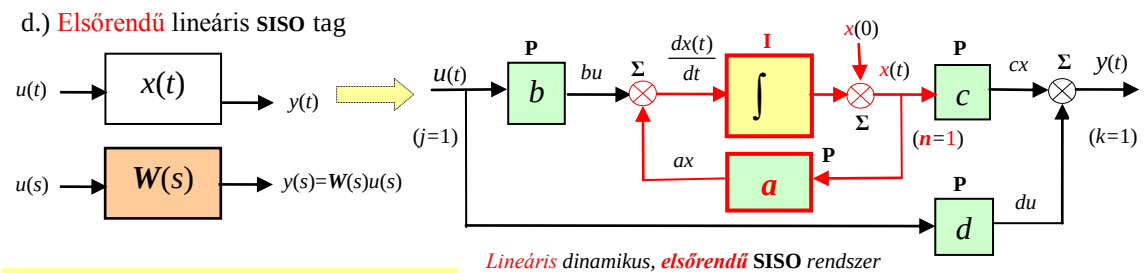
A állapotmátrix ($n \times n$) B bemeneti mátrix ($n \times j$)
 C kimeneti mátrix ($k \times n$) D direkt mátrix ($k \times j$)

c.) **Lineáris SISO tag**



A állapotmátrix ($n \times n$) $n \geq 1$ B oszlopvektor ($n \times 1$) $j=1$
 C sorvektor ($1 \times n$) $k=1$ $D=d$ skálár (1×1)

d.) **Elsőrendű lineáris SISO tag**



$A=a=\lambda$ skálár (1×1) $n=1$ $B=b$ skálár (1×1) $j=1$
 $C=c$ skálár (1×1) $k=1$ $D=d$ skálár (1×1)

P : időkésleltetés nélküli arányos alaptag Σ : összegző tag $\int$: integráló alaptag

12. ábra Nemlineáris és lineáris rendszerek állapotegyenleteihez rendelhető hatásvázlatok

A vektor-mátrix alakban felírt állapotegyenletek ugyan tömören, és látszólag igen egyszerű kifejezésekben adják meg a dinamikus rendszer matematikai modelljét, azonban ne feledkezzünk meg arról, hogy végső soron n számú elsőrendű közönséges

differentiálegyenletből álló differenciálegyenlet–rendszerrel és k számú algebrai egyenletet tartalmazó egyenletrendszerrel van szó. A matematikai modell „végletekig leegyszerűsített” alakját a $j=1, k=1, n=1$ elsőrendű lineáris SISO rendszer jelenti, amikor is a dinamikus rendszer állapotegyenlet reprezentációja *egyetlen* közöséges differenciálegyenletet és *egyetlen* algebrai egyenletet tartalmaz. A 12. ábra nemlineáris és lineáris állapotegyenletekhez rendelhető hatásvázlatok jól szemléltetik, hogy a $dx(t)/dt$ állapotsebesség vektort a lineáris *integráló tag bemenetén működtetve*, ennek *kimenetén* az állapotsebesség vektor idő szerinti integrálja – vagyis maga az $x(t)$ állapotvektor, mint megoldás – jelenik meg, és az integráló tag bemenetén működtetett $dx(t)/dt$ előállításában az $u(t)$ és az $x(t)$ jelek játszanak szerepet. Fontos észrevennünk, hogy mivel minden egyes kimenőjel az *összes* állapotváltozónak és az *összes* bemenő jelnek a függvénye, ezért bármelyik y_i kimenőjel meghatározásához minden x_i állapotváltozó és minden u_i bemenőjel ismerete szükséges. A 12. ábra hatásvázlatok a jeleket szimbolizáló, nyílakkal ellátott kettős vonalak a jelek *oszlopvektor* (többkomponensű) voltára utalnak. Ha a nemlineáris rendszert a P_0 *egyensúlyi pontra* linearizáljuk, akkor ennek *közelítő* lineáris rendszermodelljét kapjuk. Ez utóbbi esetben a *linearizált* rendszer jelei az egyensúlyi ponthoz képesti $d\Delta x(t)/dt$, $\Delta x(t)$, $\Delta u(t)$ és $\Delta y(t)$ megváltozások, és a paramétermátrixokban szereplő adatok a P_0 munkapont koordinátáinak függvényei. A hatásvázlatok szemléletesen mutatják, hogy általános esetben az $u(t)$ gerjesztés *egyrészt* direkt módon (pl. lineáris esetben $Du(t)$ komponens révén), *másrészt* az $x(t)$ állapotváltozók közvetítésével (lineáris esetben $Cx(t)$ mértékben) befolyásolja az $y(t)$ kimenőjelet (az $u(t)$ bemenőjel $y(t)$ -re gyakorolt *direkt* hatása a *szabályozott folyamatok modelljében* általában **nem** jelenik meg ($D=0$), szemben a *szabályozó modelljének* esetében, amikor is ennek a direkt hatásnak *tudatos jelenlétére* rendszerint törekvés is van). Az állapotváltozók közvetítésével keltett $Cx(t)$ hatás – a visszacsatolt integráló tag következtében – késleltetve juthat csak érvényre. Az integráló tag visszacsatolásának mikéntjétől függően ez a rendszer *labilitását* is előidézheti. A hatásvázlatok – a matematikai modell képletszerű megadásához képest – szemléletesebben mutatják azt a tulajdonságot, hogy a dinamikus rendszer tranziens folyamatait az *integráló tagnak az **A** állapotmátrixon keresztüli visszacsatolása* jeleníti meg.

A n rendszámú rendszerek esetében a hatásvázlaton szereplő integráló tagok száma azonos az n rendszámmal és minden egyes integráló tag kimenőjele az $x(t)$ állapotvektor egyik $x_i(t)$ komponense. Ettől eltérően egy egyedi integráló tag $dx_i(t)/dt$ bemenő jele (az $u(t)$ gerjesztés vektor mellett) *minden* egyes integráló tag $x_i(t)$ kimenő jelétől függ, lineáris esetben ezek az A állapotmátrix i -edik sorában szereplő tényezőkkel súlyozott $a_{i1}x_1(t)+a_{i2}x_2(t)+\dots+a_{in}x_n(t)$ lineáris kombinációja. Ez egyben azt is jelenti, hogy az $n>1$ rendszámú rendszer integráló tagjai és ezek visszacsatolásai bonyolult struktúrát alkotnak, ami kizárólag $n=1$ esetében válik rendkívülien egyszerűvé (lásd 12d. ábrát). A lineáris modellnél $A=0$ mellett egyik integráló tag *sincs visszacsatolva*, ezért $u(t)=u_0\mathbf{1}(t)=\text{állandó}>0$ és $x(0)=0$ kezdeti feltétel esetében az **I** tag a $Bu_0\mathbf{1}(t)$ bemenőjelének hatására az állapotvektor $x(t)=\int Bu_0 dt=Bu_0 t=Bu_0 t$ szerint – időben *lineárisan* – növekszik, ami a kimenőjel vektor $y(t)=Cx(t)+Du(t)=(CBt+D)u_0$ lineáris növekedését is eredményezi, vagyis a rendszer gyakorlati szempontból *labilis*, mivel az állandó bemenőjel hatására az $x_i(t)$ állapotváltozói és ezek közvetítésével az $y_i(t)$ kimenő jelei is, időben ugyan lineárisan, de *minden határon túl növekszenek*. Az $A\neq 0$ állapotmátrix elemein keresztül viszont létre jön az integráló tagok *pozitív*, vagy *negatív* visszacsatolása, ami pozitív visszacsatolás esetén a rendszer labilitását tovább fokozza (az állapotváltozók és a kimenőjelek *exponenciálisan* növekszenek), vagy negatív visszacsatolás esetén a rendszert *stabilizálhatja* (az állapotváltozók és a kimenőjelek, az u_{i0} állandó bemenőjeleknek megfelelően, szintén állandó x_{i0}, y_{i0} értékeikhez tarthatnak). A hatásvázlaton szereplő integráló tagok *egykének* kimenőjele az *egyik* $x_i(t)$ állapotváltozó, de ennek az integráló tagnak az $dx_i(t)/dt$ bemenetére (ha az A mátrix elemei nem zérusok) *mindegyik* integrátor kimenete (így

saját $x_i(t)$ kimenete is) pozitívan vagy negatívan **visszacsatolt**. Minden esetre a lineáris rendszer $x(t)$, $y(t)$ időfüggvényeinek lefolyásában az **A állapotmátrix** minden adatának alapvető befolyása van, ezért **A** a dinamikus rendszer tulajdonságainak alakításában *kittüntetett, meghatározó* jelentőséggel bír³⁴. A 12b.– d. ábrákon vázolt *lineáris* rendszerek a 12a. ábra *nemlineáris* rendszerének speciális esetei, amikor is az $f[x(t), u(t)] = Ax(t) + Bu(t)$, illetve a $g[x(t), u(t)] = Cx(t) + Du(t)$ *lineáris* függvények. A legegyszerűbb lineáris rendszer az elsőrendű ($n=1$) **SISO** tag (lásd 12d. ábra). Ennek paramétermátrixai skaláris adatok, és az $x(0)$ kezdeti feltétel által kiváltott *sajátmozgás*, valamint az $u(t)$ gerjesztés (a kényszerfüggvény) keltette *gerjesztett mozgás* igen egyszerűen (a komplikált mátrixműveletek nélkül) meghatározhatók. Az elsőrendű lineáris **SISO** rendszernek az is jelentőséget ad, hogy az $n>1$ rendű lineáris **MIMO** rendszer általában (a *gyakorlati* esetekben mindig), *elsőrendű, egymásra hatást nem gyakorló részrendszerekre* bontható (lásd hasonlósági transzformációk, az állapotváltozók *szétcsatolása*).

Megjegyzés

Egy tetszőlegesen megválasztott *reguláris*, $n \times n$ méretű **T transzformációs mátrix** alkalmazásával és az $x_T(t) = Tx(t)$ új állapotvektor bevezetésével (ezek az új $x_T(t)$ állapotváltozók a régi $x_i(t)$ állapotváltozók súlyozott lineáris kombinációi, pl. $x_T(t) = T_{11}x_1(t) + T_{12}x_2(t) + \dots + T_{1n}x_n(t)$, stb.) az eredeti lineáris rendszer egy **másik**, vele egyenértékű állapotter reprezentációja (a $x(t) = T^{-1}x_T(t)$ hasonlósági transzformáció figyelembevételével)

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx_T(t) + Du(t) \rightarrow x(t) = T^{-1}x_T(t) \\ &***** \\ \frac{dx_T(t)}{dt} &= TAT^{-1}x_T(t) + TBu(t) = A_Tx_T(t) + B_Tu(t) \\ y(t) &= CT^{-1}x_T(t) + Du(t) = C_Tx_T(t) + D_Tu(t) \end{aligned}$$

alakra hozható ($A_T = TAT^{-1}$, $B_T = TB$, $C_T = CT^{-1}$, $D_T = D$). Ebben az alakban – a $T = T_d$ mátrix *megfelelő megválasztása* mellett, és ha az eredeti rendszer A állapotmátrixának sajátértékei egymástól különbözőek – az $A_T = T_dAT_d^{-1}$ transzformált mátrix **diagonális** is lehet, főátlójában az eredeti A mátrix *egymástól különböző* λ_i sajátértékeivel. Az állapotegyenletnek ez az átalakítása – az állapotváltozók „szétcsatolása” – a számításokat jelentősen egyszerűsíti. Az irodalom a diagonalizált A_T mátrixot $A_T = A$ módon is jelöli, utalva arra, hogy ennek főátlójában az eredeti A mátrix λ_i sajátértékei állnak és a *többi eleme zérus*:

$$A_T = A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Az A mátrix λ_i sajátértékei a $\det(\lambda I - A) = 0$ valós együtthatóval rendelkező n fokszámú karakterisztikus egyenlet gyökei. Ezért – az algebra alaptétele szerint – a **A** diagonális mátrix főátlójában a $\lambda_i = \sigma_i$ valós sajátértékek mellett $\lambda_{i,i+1} = \sigma_i \pm j\omega_i$ *konjugált komplex gyökpárok* is lehetnek, ezek azonban un. blokk–diagonális alakra alakíthatók (ez a két, konjugált komplex sajátértékkel rendelkező *elsőrendű* rendszernek *egy másodrendű* rendszerre történő összevonását jelenti). Ez utóbbi esetben a **A** főátlójában a *valós* sajátértékek, és a főátlóra támaszkodó 2×2 méretű σ_i és ω_i *valós* elemeket tartalmazó blokkok szerepelnek:

³⁴ Az itt leírt tulajdonságok ismertetésekor feltételeztük, hogy a B , C , D paramétermátrixok pozitív elemeket tartalmaznak. Az A állapotmátrixot az irodalom *rendszer mátrixnak* is nevezi. Az A állapotmátrixot ne tévesszük össze a lineáris rendszer sajátmozgását alapvetően befolyásoló $\Phi(t) = e^{At}$ *alapmátrixal*, ami egyébként az A állapotmátrixtól függő és az $e^{At} = I + At + (At)^2/2! + (At)^3/3! + \dots$ hatványsorával értelmezhető $n \times n$ méretű *mátrixfüggvény!*

$$\begin{bmatrix} \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{i-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_i & \omega_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_i & \sigma_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{i+2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots \end{bmatrix}$$

A $\mathbf{T}_d$ transzformációval az *integráló tagok kizárólag saját magukról* a λ_i tényezőkön keresztül visszacsatoltak, ami ismételten megerősíti, hogy a lineáris rendszer stabilitásának általános feltétele, hogy A állapotmátrixának *negatív* valós részü sajátértékei legyenek. Ha ez teljesül, az integráló tagok kizárólag saját magukról történő *negatív* visszacsatolásának következményeként jön létre a dinamikus rendszer *aszimptotikus stabilitása*. A blokk-diagonális transzformáció és az $\mathbf{A}=\mathbf{A}_T$ transzformált mátrix, valamint a $\mathbf{T}_d$ transzformációs mátrix meghatározása **MATLAB** támogatással:

$$[\mathbf{A}_T, \mathbf{B}_T, \mathbf{C}_T, \mathbf{D}_T, \mathbf{T}_d] = \text{canon}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, 'modal');$$

Az állapottér reprezentáció $\mathbf{A}_T = \mathbf{T}_d \mathbf{A} \mathbf{T}_d^{-1} = \mathbf{A}$ diagonális alakú állapotmátrixának előállítását létesítő $\mathbf{T}_d$ transzformációs mátrix – itt nem részletezett eljárással, komplikált mátrixműveletek révén (az állapotmátrix sajátvektorainak meghatározásán keresztül) – analitikusan is meghatározható³⁵. Az A állapotmátrix $\mathbf{m}$ sajátvektorait és λ_i sajátértékeit, valamint a $\mathbf{T}_d$ transzformációs mátrixot meghatározó **MATLAB** függvények:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \text{input}('A='); \quad [\mathbf{m}, \text{lambda}] = \text{eig}(\mathbf{A}); \\ \mathbf{T}_d &= \text{inv}(\mathbf{m}); \end{aligned}$$

Az állapotegyenlet megoldása

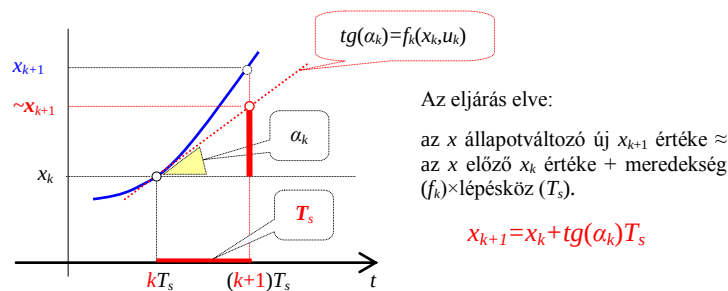
Az adott $x(0)$ kezdeti feltétel és az adott $u(t)$ gerjesztés hatására keltett $x(t)$ és $y(t)$ válaszok az állapotegyenlet ismeretében számíthatók. A nemlineáris állapotegyenlet – ritka kivételektől eltekintve – általában csak *numerikusan* oldható meg: pl. *Euler, Adams, Milne, Runge–Kutta* stb. numerikus módszerek³⁶.

Megjegyzés.

Euler módszer:

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &\cong \frac{x[(k+1)T_s] - x(kT_s)}{T_s} = f[x(kT_s), u(kT_s)] \\ x[(k+1)T_s] &\cong x(kT_s) + f[x(kT_s), u(kT_s)]T_s \end{aligned}$$

ahol k a pozitív egész számok sorozata T_s a számítás lépésköze.



13a. ábra Az *Euler* numerikus módszer szemléltetése

A numerikus megoldás természetesen a lineáris állapotegyenlet megoldására is felhasználható. Ez utóbbi, ún. *előrelépő* esetben, amikor is a megoldás érintőjének meredekségét a kT pontban értelmezzük:

$$x[(k+1)T_s] \approx x(kT_s) + [Ax(kT_s) + Bu(kT_s)]T_s = (I + AT_s)x(kT_s) + BT_s u(kT_s).$$

³⁵ Irodalom: *Bokor József–Gáspár Péter*: Irányítástechnika járműdinamikai alkalmazásokkal. TIPOTEX Kiadó. *Lantos Béla*: Irányítási rendszerek elmélete és tervezése I. (Egyváltozós szabályozások). Akadémiai Kiadó.

³⁶ **MATLAB** támogatás a nemlineáris differenciálegyenletrendszer numerikus megoldására: `ode23` és `ode45` függvények (*Runge–Kutta* eljárások).

Ebben a *lineáris extrapolációban* az $(I+AT_s)$ az $\exp(AT_s)$ alpmátrix *Taylor* sorának első két tagja. Diszkrét rendszerekben T_s a mintavételezési idő (*sampling time*), ami a numerikus számítás *lépésközének* felel meg. A *hátralépő Euler* módszer esetében a megoldás érintőjét a $(k+1)T_s$ pontban vett értékkel közelítjük. Ekkor

$$x[(k+1)T_s] \approx x(kT_s) + \{Ax[(k+1)T_s] + Bu[(k+1)T_s]\}T_s \rightarrow (I-AT_s)x[(k+1)T_s] = x(kT_s) + BT_s u[(k+1)T_s],$$

$$x[(k+1)T_s] \approx (I-AT_s)^{-1} \{x(kT_s) + BT_s u[(k+1)T_s]\}.$$

A numerikus megoldás pontosságára a számítás T_s lépésközének alapvető befolyása van. Különösen így van ez, ha az A mátrix sajátértékei széles tartományt fognak át ($|\lambda_{imax}| \gg |\lambda_{imin}|$), vagyis a rendszer „stiff” (a lépésköz hibás megválasztása *numerikus instabilitáshoz* is vezethet). A bonyolultabb numerikus módszerek zömében az *Euler* módszer továbbfejlesztésén alapszanak.

A lineáris rendszer válaszai *analitikusan is* meghatározhatók. A lineáris esetre érvényes a *szuperpozíció elve*, és ekkor az állapotegyenlet (itt nem levezetett) analitikus megoldását³⁷ jelentő $x(t)$ állapotvektor és $y(t)$ kimenőjel vektor kifejezései:

$$x(t) = \underbrace{e^{At} x(0)}_{x_s(t)} + \underbrace{\int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau}_{x_g(t)}$$

$$y(t) = C \left[\underbrace{e^{At} x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau}_{x(t) = x_s(t) + x_g(t)} \right] + Du(t)$$

Ebben $x_s(t)$ az $x(0)$ kezdeti értékek által keltett *sajátmozgás*. Ezt *kizárólag* az $x(0)$ kezdeti feltétel és a rendszer A állapotmátrixa befolyásolja, *komplementer* megoldásnak, *szabad összetevőnek* is nevezik. Az $x_g(t)$ az $u(t)$ kényszerfüggvény által létrehozott *gerjesztett mozgás*. Ezt a rendszer A állapotmátrixa, a B bemeneti mátrixa, és az $u(t)$ gerjesztés együttese befolyásolja, és *partikuláris* válasznak is hívják. Az eredő $x(t)$ megoldás a két mozgáskomponens $x_s(t) + x_g(t)$ *szuperpozíciója*³⁸. A $\Phi(t) = e^{At}$ *mátrixfüggvény* a lineáris rendszer *alpmátrixa*, értelmezését – az $e^{at} = 1 + at + (at)^2/2! + (at)^3/3! + \dots$ exponenciális függvény hatványsorának analógiájaként – hatványsorával adhatjuk meg:

$$\Phi(t) = e^{At} = \sum_{i=0}^{\infty} A^i \frac{t^i}{i!} = I + At + A^2 \frac{t^2}{2!} + A^3 \frac{t^3}{3!} + \dots$$

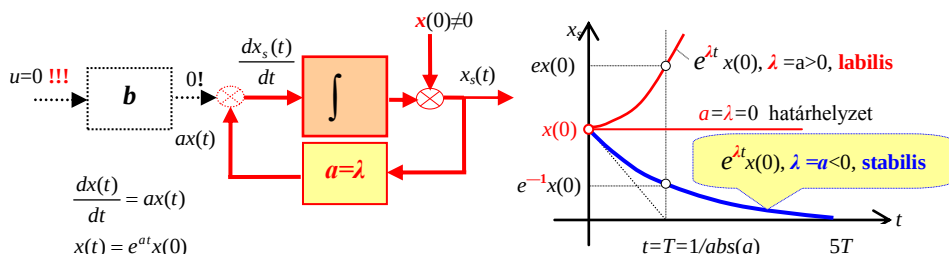
A $\Phi(t)$ alpmátrix a $dx(t)/dt = Ax(t)$ homogén differenciálegyenlet rendszer $x(t) = e^{At}$ megoldása, amit egy, a differenciálegyenletbe történő egyszerű visszahelyettesítéssel igazolhatunk.

³⁷ Annak belátását, hogy az itt felírt $x(t)$, $y(t)$ képletek a lineáris rendszer állapotegyenletének megoldásait jelentik úgy igazolhatjuk, hogy az *állapotegyenletekbe* visszahelyettesítve ezeket, *azonosságokat* kapunk. A megoldó képletek levezetése a differenciálegyenleteket tárgyaló különféle matematikai művekben megtalálható (pl: I.N. Bronstejn–K.A. Szemengyajev: Matematikai zsebkönyv. Műszaki Könyvkiadó). A *Laplace* transzformáción alapuló megoldást ebben az összefoglaló részben is közöljük. Az $x(t)$ állapotvektor $x_g(t)$ komponensének *analitikus* meghatározása csak „egyszerű” $u(t)$ gerjesztésvektor (pl. determinisztikus belépő vizsgálójelek: $\delta(t)$, $1(t)$, t , $t^2/2$, $\sin(\omega t)$, e^{at}) esetében problémamentes, az integrálást gyakran numerikusan kell elvégezni.

³⁸ Addig, amíg az $x_s(t)$ sajátmozgást a rendszer A állapotmátrixának λ_i sajátértékei befolyásolják, az $x_g(t)$ gerjesztett mozgás menetét alapvetően az $u(t)$ kényszerfüggvény határozza meg, és a rendszer csupán a partikuláris megoldás amplitúdóját és fáziseltolását befolyásolja. A rendszernek csak akkor van lényeges befolyása a partikuláris válaszra, ha az un. *külső rezonancia* esete áll elő, vagyis amikor a kényszerfüggvény egyik tagja hasonló a sajátmozgás válasz egyik tagjához. Ilyen esetben a gerjesztett válasz jellegében tér el a kényszerfüggvénytől.

Megjegyzés

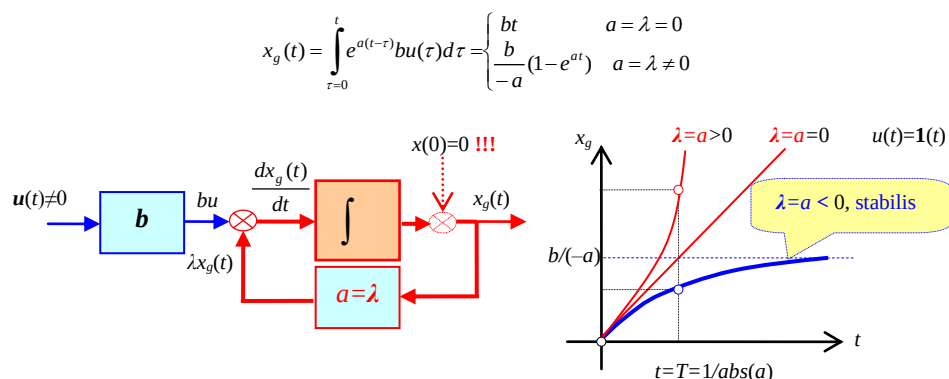
A lineáris rendszer $x_s(t)$ *sajátmozgása* $n=1$ elsőrendű esetben igen egyszerű, mivel ekkor $A=a$ skálár (ekkor A sajátértéke $a=\lambda$ önmaga), és az e^{At} mátrixfüggvény egy közöséges e^{at} exponenciális függvényre egyszerűsödik, vagyis $x_s(t)=e^{at}x(0)$. Ennek grafikonját – az $A=a=\lambda$ paraméter különféle értékeire – a 13b. ábra mutatja. Az $a=\lambda$ karakterisztikusan jellemzi a sajátmozgás időbeli lefolyását, amit az is jelez, hogy a sajátmozgást szemléltető hatásvázlat integráló alaptagja a λ átviteli tényezőjű arányos taggal van *visszacsatolva*. A visszacsatolás struktúrájában kialakuló tranzien্স folyamatok időfüggvényeit, ezek stabilis vagy labilis voltát az $a=\lambda$ értéke és *előjele* alapvetően befolyásolja (lásd a 13b. ábrát).



13b. ábra Elsőrendű lineáris rendszer $x_s(t)$ *sajátmozgása* a visszacsatolás $a=\lambda$ átviteli tényezőjének különféle értékei mellett

Láthatjuk, hogy kizárólag $a=\lambda<0$ sajátérték mellett (vagyis ha az integráló tag *negatívan* visszacsatolt, amikor is a $\lambda x(0)$ az $x(0)$ -hoz képest **ellentétes előjellel** jut vissza az integráló tag $dx(t)/dt$ bemenetére), „cseng le” az $x(0)$ kezdeti feltétel hatására keltett $x_s(t)$ sajátmozgás. Ekkor a rendszer állandósult állapotában az $u(t)=0$ bemenő jelhez $x_s(\infty)=0$ állapotváltozó és $y(\infty)=0$ kimenőjel tartozik (aszimptotikusan stabilis elsőrendű rendszer). Az $x(0)$ hatása most kb. $t=5/(-\lambda)=5T$ idő alatt $e^{-5}x(0) \approx x(0)/148.5$ értékre csökken, amit gyakorlati szempontból már zérusnak tekintünk [a $T=1/(-\lambda)$ érték ($\lambda<0$!) az elsőrendű rendszer időállandója, $t=T$ idő alatt az $x_s(t)_{t=T}=x_s(T)$ az $x(0)/e$ értékre csökken].

A gerjesztett mozgás és ennek grafikonja $u(t)=1(t)$ mellett (lásd 14. ábra):



14. ábra Elsőrendű lineáris rendszer $x_g(t)$ *gerjesztett mozgása* a visszacsatolás $a=\lambda$ átviteli tényezőjének különféle értékei és $u(t)=1(t)$ mellett

Az $x_g(t)$ megoldásból (vagy a hatásvázlatból), az is következik, hogy az állandó $u(t)=u_0 1(t)=1(t)$ gerjesztés hatására **kizárólag** akkor jön létre $t \rightarrow \infty$ mellett az $x_g(t)$ időfüggvénynek $x_g(\infty)=x_{g0}=bu_0/(-a)=b/(-a)$ állandó értéke, ha $a=\lambda<0$, vagyis ha az integráló tag *negatívan* van visszacsatolva (lásd 14. ábra). Ekkor a $t \rightarrow \infty$ időpontban az integráló tag $dx_g(t)/dt$ bemenőjele $b+ab/(-a)=b-b=0$, és ezért az $x_g(\infty)=x_{g0}$ kimenőjele állandó. Ebben az állandósult állapotban az elsőrendű rendszer kimenőjele is állandó, ennek értéke $y_0=cx_{g0}+du_0=(cb-da)/(-a)$. A 14. ábra azt a fontos tulajdonságot is szemlélteti, hogy a **negatívan visszacsatolt integráló** tag **eredő** jelátviteli tulajdonsága olyan **önbeálló** tagot jelent, amelynek **átviteli tényezője a visszacsatolás átviteli tényezőjének reciproka**.

Az $n>1$ esetében a sajátmozgás és a gerjesztett mozgás *mátrixfüggvényekkel* számítható. Ezt a sajátmozgásra részletezve az $x_s(t)$ $n \times 1$ méretű *oszlopvektor*, amelynek értéke az $x_s(t)=e^{At}x(0)$ mátrixfüggvény:

$$x_s(t) = e^{At} x(0) \rightarrow \begin{bmatrix} x_{s1}(t) \\ x_{s2}(t) \\ \vdots \\ x_{sn}(t) \end{bmatrix} = e^{\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} t} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{bmatrix} = \underbrace{e^{\begin{bmatrix} a_{11}t & \dots & a_{1nt} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}t & \dots & a_{nnt} \end{bmatrix}}}_{e^{At}} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{bmatrix} = \underbrace{\left(I + At + A^2 \frac{t^2}{2!} + \dots \right)}_{e^{At}} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{bmatrix}$$

Ebben az e^{At} exponenciális mátrixfüggvényt hatványsorával definiálhatjuk, ami a sajátmozgás $x_{si}(t)$ komponenseit is egy hatványsor alakjában adja meg. Az $x_s(t)$ kiszámítása zárt alakban akkor egyszerű, ha az A állapotmátrix az egymástól különböző λ_i valós sajátértékeket tartalmazó *diagonális* mátrix. Ebben az esetben az e^{At} tényezőt nem kell a sorával értelmeznünk, ugyanis:

$$\begin{bmatrix} x_{s1}(t) \\ x_{s2}(t) \\ \vdots \\ x_{sn}(t) \end{bmatrix} = \underbrace{e^{\begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} t}}_{e^{At}} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{bmatrix} = \underbrace{e^{\begin{bmatrix} \lambda_1 t & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n t \end{bmatrix}}}_{e^{At}} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \dots & 0 \\ \vdots & e^{\lambda_i t} & \vdots \\ 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}}_{e^{At}} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} x_1(0) \\ e^{\lambda_2 t} x_2(0) \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} x_n(0) \end{bmatrix}}_{e^{At} x(0)}$$

Láthatjuk, hogy az $x(t)$ állapotvektorban, és az $y(t)=Cx(t)+Du(t)$ kimenőjel vektorban is megjelenő $x_s(t)$ sajátmozgás komponens kizárólag akkor tarthat $t \rightarrow \infty$ mellett zérushoz, **ha az A állapotmátrix minden λ_i sajátértékének valós része negatív**. (Az olvasóra bizzuk annak belátását és matematikai indoklását, hogy az olyan rendszer, amelynek állapotmátrixában minden paraméter pozitív-, vagy legfeljebb zérus érték, bizonyosan *labilis* tulajdonsággal rendelkezik³⁹). **MATLAB** támogatás az x_s sajátmozgás és az x_g gerjesztett mozgás meghatározására:

```
[y, xs, t] = initial(A, B, C, D, x0);
[y, xg] = lsim(A, B, C, D, u, t);
```

Ha az állapotvektor kezdeti értéke $x(0)$ és $u(t)$ Laplace transzformálható ún. belépő időfüggvény, az állandó együtthatójú lineáris rendszer állapotegyenletének az s Laplace operátor tartományban kapható $x(s)$ és $y(s)$ megoldásai *algebrai* műveletekkel határozhatók meg⁴⁰, majd ezt követően az $x(t)$ és $y(t)$ időfüggvényeket *inverz* transzformációval számíthatjuk. Részletezve (adott $x(0)$, $u(t)$, és A , B , C , D paramétermátrixokvalamint $L\{u(t)\}=u(s)$ mellett):

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \\ \Downarrow \text{*****} \Downarrow \\ x(s) &= (sI - A)^{-1} [x(0) + Bu(s)] = \\ &= \underbrace{(sI - A)^{-1} x(0)}_{x_s(s)} + \underbrace{(sI - A)^{-1} Bu(s)}_{x_g(s)} \\ y(s) &= C(sI - A)^{-1} x(0) + \underbrace{[C(sI - A)^{-1} B + D]u(s)}_{W(s)} \end{aligned}$$

Az $x(t)$ és $y(t)$ időfüggvények az $x(s)$ és $y(s)$ inverz transzformátjaiként kaphatók:

³⁹ Segítség: az $n \times n$ méretű A állapotmátrix λ_i sajátértékei a $\det(\lambda I - A) = \lambda^n - \text{trace}(A)\lambda^{n-1} + \dots + \det(A) = 0$ n fokszámú karakterisztikus egyenlet λ_i gyökei. Ahhoz, hogy ezek a gyökök negatív valós részűek legyenek szükséges (de nem elégséges!) feltétel, hogy az együtthatók *azonos előjelűek* legyenek (lásd Hurwitz stabilitási kritérium). A $\text{trace}(A)$ az A mátrix *nyoma* (a főátlójában lévő paraméterek összege).

⁴⁰ Ha az A , B , C , D paramétermátrixokban szereplő együtthatók *függvényei* a t *időnek*, a rendszer ugyan lineáris marad, de ekkor a Laplace transzformáció a matematikai modell algebrai egyenletté történő átalakítására *nem használható*. Ennek oka, hogy az $A(t)x(t)$ szorzatfüggvény Laplace transzformáltja nem azonos a tényezők $A(s)$, $x(s)$ transzformáltjainak szorzatával ($L\{A(t)x(t)\} \neq A(s)x(s)$, lásd a konvolúció tételét!)

$$x(t) = L^{-1}\{x(s)\} = L^{-1}\{\Phi(s)[x(0) + Bu(s)]\}$$

$$y(t) = L^{-1}\{y(s)\} = L^{-1}\{C\Phi(s)x(0) + W(s)u(s)\}$$

ahol az $x(s)$ és $y(s)$ megoldásokban a

$$\Phi(s) = L\{\Phi(t)\} = L\{e^{At}\} = (sI - A)^{-1}$$

a $\Phi(t)=e^{At}$ alaplátrix *Laplace* transzformáltja, és az $y(s)$ kifejezésében a **W(s)** együtttható a **MIMO** tag **átviteli mátrixa**. Ha a kezdeti feltétel $x(0)=0$, akkor $y(s)=W(s)u(s)$, és a kimenőjel időfüggvénye $y(t)=L^{-1}\{y(s)\}=L^{-1}\{W(s)u(s)\}$. Az $u(s)$ bemenő-, és az $y(s)$ kimenőjel oszlopvektorok közötti függvénykapcsolat az s operátor tartományban tehát egy mátrixegyenlet formájában definiálható. Részletezve:

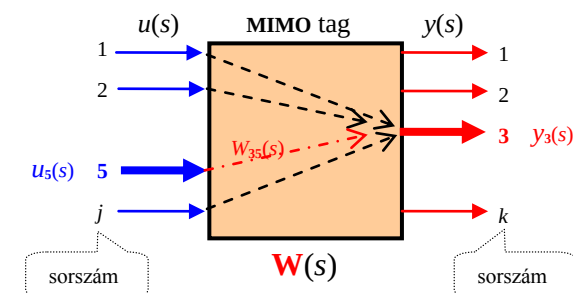
$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B + D =$$

$$= \frac{C \text{adj}(sI - A)B + \det(sI - A)D}{\det(sI - A)}$$

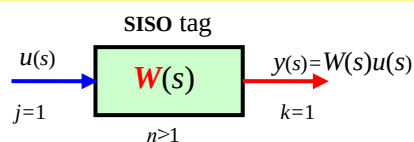
Az A, B, C, D paramétermátrixok ismeretében **W(s)** számlálójában lévő mátrixműveleteket elvégezve és a nevezőjében lévő $\det(sI-A)$ skaláris tényezőt figyelembe véve a kimenőjelvektor $y(s)$ transzformáltjára, valamint a **W(s)** átviteli mátrix általános alakjára az alábbi kifejezést kaphatjuk:

$$\begin{bmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \\ \vdots \\ y_k(s) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} W_{11}(s) & W_{12}(s) & \cdots & W_{1j}(s) \\ W_{21}(s) & W_{22}(s) & \cdots & W_{2j}(s) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ W_{k1}(s) & W_{k2}(s) & \cdots & W_{kj}(s) \end{bmatrix}}_{W(s)} \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \\ \vdots \\ u_j(s) \end{bmatrix}$$

$y(s)$ $W(s)$ $u(s)$



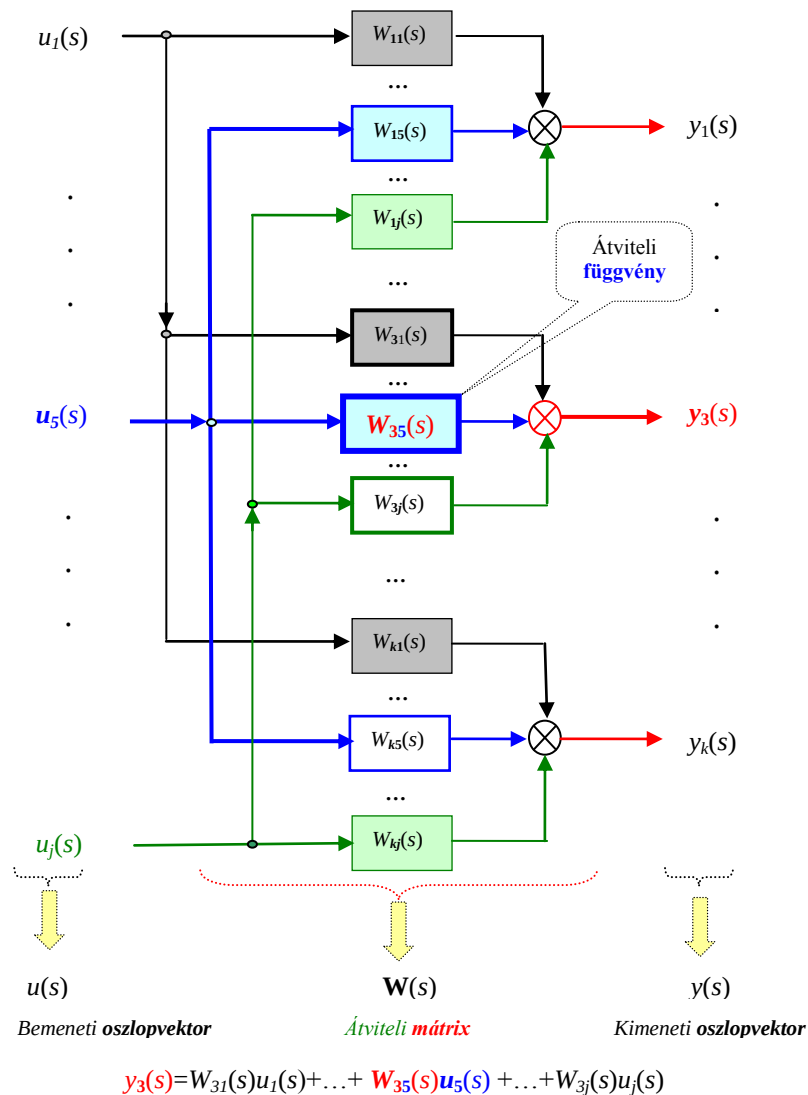
$$y_3(s) = W_{31}(s)u_1(s) + \dots + W_{35}(s)u_5(s) + \dots + W_{3j}(s)u_j(s)$$



15a. ábra A $W_{35}(s)$ átviteli függvény és a SISO tag jelentése

A **W(s)** átviteli mátrix egy átviteli függvény elemekből felépülő k sort és j oszlopot tartalmazó olyan mátrix, amelyben mindegyik $W_{lq}(s)$ átviteli függvényelemnek ($l: 1, 2, \dots, k$; $q: 1, 2, \dots, j$) a nevezője ugyanaz a $\det(sI-A)$ karakterisztikus polinom. Pl. a **W₃₅(s)** átviteli függvényelem azt mutatja meg, hogy a 3. sorszámú $y_3(s)$ kimenő jelre az 5. sorszámú $u_5(s)$ bemenőjelnek milyen befolyása van (lásd a 15a. ábrát). Ismételten rögzítsük le, hogy pl. az $y_3(s)$ kimenőjel mindegyik $u_i(s)$ bemenőjelnek a megfelelő $W_{3q}(s)$ ($q: 1, 2, \dots, j$) átviteli függvényekkel

súlyozott lineáris kombinációja, és azt a dinamikus tulajdonságot írja le, hogy a bemenő jelek *összessége* miként befolyásolják a kimenő jelek *egyikét* (a példában az y_3 kimenő jelet). A $W_{35}(s)$ átviteli függvény egyébként egy n -edrendű rendszeregyenletet is definiál az $y_3(t)$ kimenő-, és az $u_5(t)$ bemenő jelek között, miközben a többi *bemenőjel zérus*. **SISO** tag esetében az átviteli mátrix *egyetlen* elemet tartalmazó $W(s)$ átviteli függvényre egyszerűsödik. Az **átvitelmátrix** hatásvázlattal való szemléltetését a 15b. ábra mutatja.



15b. ábra az **állapotmátrix** szemléltetése az átviteli függvényelemekkel

Megjegyzés

A $\mathbf{W}(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ átviteli mátrix kiszámítása – a szokásos mátrixalgebrai alapműveleteken (összeadás, kivonás, szorzás) túlmenően – az $(sI - A)^{-1}$ *inverz mátrix* meghatározását is igényli. Az $(sI - A)^{-1}$ inverz mátrix akkor létezik, ha az $(sI - A)$ *négyzetes*, és *reguláris*, vagyis determinánsa *nem zérus*. Származtatása az

$$(sI - A)^{-1}(sI - A) = I$$

azonosság alapján történik (I az egységmátrix). Meghatározásának képlete:

$$(sI - A)^{-1} = \frac{\text{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)}$$

Az $\text{adj}(sI - A)$ *adjungált* mátrix az a mátrix, amely az $(sI - A)$ mátrixból úgy származik, hogy ennek egyes elemeihez tartozó előjeles *aldeterminánsokból* (a társtényezőkből) képzett mátrix *transzponáltja*. Ha $A = a$ skalár, akkor $(s - a)^{-1} = 1/(s - a)$, de ha például

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \rightarrow (sI - A) = \left(s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} s-a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & s-a_{22} \end{bmatrix}$$

2×2 méretű reguláris [$\det(sI-A)=s^2-s(a_{11}+a_{22})+a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \neq 0$] mátrix, akkor

$$\begin{aligned} (sI - A)^{-1} &= \begin{bmatrix} s-a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & s-a_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{\text{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)} = \frac{\begin{bmatrix} s-a_{22} & a_{21} \\ a_{12} & s-a_{11} \end{bmatrix}^T}{(s-a_{11})(s-a_{22})-a_{12}a_{21}} = \\ &= \frac{\begin{bmatrix} s-a_{22} & a_{12} \\ a_{21} & s-a_{11} \end{bmatrix}}{(s-a_{11})(s-a_{22})-a_{12}a_{21}} = \begin{bmatrix} \frac{s-a_{22}}{(s-a_{11})(s-a_{22})-a_{12}a_{21}} & \frac{a_{12}}{(s-a_{11})(s-a_{22})-a_{12}a_{21}} \\ \frac{a_{21}}{(s-a_{11})(s-a_{22})-a_{12}a_{21}} & \frac{s-a_{11}}{(s-a_{11})(s-a_{22})-a_{12}a_{21}} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Figyeljük meg, hogy az $(sI-A)^{-1}$ kifejezés egy olyan mátrix, amelynek algebrai tört elemeiben a számláló a nevezőjétől *kisebb fokszámú* polinom. Miután az $(sI-A)^{-1}$ az e^{At} alaplátrix Laplace transzformáltja, az e^{At} zárt alakban történő meghatározására az $e^{At}=L^{-1}\{(sI-A)^{-1}\}$ inverz Laplace transzformációt is használhatjuk.

$$\Phi(t) = L^{-1}\{(sI - A)^{-1}\} = \begin{bmatrix} L^{-1}\left\{\frac{s-a_{22}}{(s-a_{11})(s-a_{22})-a_{12}a_{21}}\right\} & L^{-1}\left\{\frac{a_{12}}{(s-a_{11})(s-a_{22})-a_{12}a_{21}}\right\} \\ L^{-1}\left\{\frac{a_{21}}{(s-a_{11})(s-a_{22})-a_{12}a_{21}}\right\} & L^{-1}\left\{\frac{s-a_{11}}{(s-a_{11})(s-a_{22})-a_{12}a_{21}}\right\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11}(t) & \phi_{12}(t) \\ \phi_{21}(t) & \phi_{22}(t) \end{bmatrix}$$

Vegyük észre, hogy a $\Phi(t)$ alaplátrix elemei $t \rightarrow \infty$ mellett *zérushoz tartanak*, ha a $s^2-(a_{11}+a_{22})s+a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ karakterisztikus polinom $\lambda_{1,2}=p_{1,2}$ gyökei (az A állapotmátrix sajátértékei, illetve a $W(s)$ átviteli mátrix pólusai) **negatívok**, vagy **negatív valós** résszel rendelkeznek⁴¹.

Mindezek alapján az állapotegyenletével leírt lineáris dinamikus rendszer aszimptotikus stabilitását az alábbiak szerint fogalmazhatjuk meg:

A lineáris SISO vagy MIMO dinamikus tag aszimptotikusan stabilis, ha az $x(t)$ állapotvektorának $x_s(t)$ sajátmozgás komponense $t \rightarrow \infty$ mellett zérushoz (az állapottér origójába) tart, vagyis:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_s(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{At} x(0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t) x(0) = 0$$

Ennek feltétele, hogy a $\Phi(t)=e^{At}$ alaplátrix⁴² minden komponense $t \rightarrow \infty$ mellett zérushoz tartson. Ez akkor következhet be, ha a rendszer **A** állapotmátrixának minden sajátértékére a **real(λ_i)<0** teljesül, vagy ezzel egyenértékűen a **det(sI-A) karakterisztikus polinom Hurwitz polinom**⁴³.

A SISO tag rendszeregyenlete és átviteli függvénye

Ha $j=k=1$ és $n \geq 1$ tetszőleges, akkor a **MIMO** tag egy bemenetű, egy kimenetű n rendszámú **SISO** tagra egyszerűsödik, $W(s)=C(sI-A)^{-1}B+D$ átviteli mátrixa – a B (oszlopvektor, $n \times 1$), C (sorvektor, $1 \times n$), D (skalár, 1×1) paramétermátrixok speciális tulajdonságai miatt – egyetlen átviteli függvény elemet tartalmaz. Ekkor **$y(s)=W(s)u(s)$** , és az átviteli függvény **$W(s)=y(s)/u(s)$** szerint a kimenő és bemenő jelek Laplace transzformáltjainak *hányadosaként* is értelmezhető. A **SISO** tag esetében A ($n \times n$) méretű mátrix, ezért $W(s)=G(s)/H(s)$ egy olyan

⁴¹ Ellenőrzésként kiszámíthatjuk az $(sI-A)^{-1}(sI-A)$ kifejezést is (ami az egységmátrixot kell adnia eredményül), ezt azonban az olvasóra bizzuk.

⁴² Az alaplátrix (más elnevezésében átmeneti mátrix) néhány fontosabb tulajdonsága: 1.) $d\Phi(t)/dt=A\Phi(t)$, 2.) $\Phi(0)=I$, 3.) $\Phi^{-1}(t)=\Phi(-t)$, 4.) $\Phi(t_2-t_1)\Phi(t_1-t_0)=\Phi(t_2-t_0)$, $t_2>t_1>t_0$, 5.) $\Phi^k(t)=\Phi(kt)$.

⁴³ Az n fokszámú Hurwitz polinom minden p_i gyökének reális része negatív: **real(p_i)<0**, $i: 1,2, \dots, n$.

algebrai tört, amelynek nevezője az n fokszámú $H(s)=\det(sI-A)$ karakterisztikus polinom⁴⁴. (A $j=k=n=1$ *elsőrendű SISO* tagot jelent, ekkor a lineáris rendszer minden jele és minden paramétermátrixa skalár⁴⁵, vagyis $A=a=\lambda$, $B=b$, $C=c$, $D=d$, és a karakterisztikus polinom $(s-a)$. Az $n \geq 1$ esetben a *SISO* tag az *állandó együtthatójú, n -edrendű, lineáris differenciálegyenlettel* (a tag **rendszer egyenletével**) is jellemezhető⁴⁶, ennek a vezető együtthatóra normalizált ($h_0=1$) kifejezése:

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + h_1 \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + h_n y(t) = g_0 \frac{d^m u(t)}{dt^m} + g_1 \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \dots + g_m u(t)$$

Ebben a h_i ($i: 1, 2, \dots, n$) és g_i ($i: 0, 1, 2, \dots, m$) **valós** együtthatók, valamint $n \geq m$.

Megjegyzés.

A rendszeregyenletnek az időtartományban történő megoldásához meg kell határozni a *homogén* differenciálegyenlet $y_h(t)$ *általános* megoldását és az *inhomogén* differenciálegyenlet egy $y_p(t)$ *partikuláris* megoldását. Az inhomogén egyenlet *általános* megoldása a homogén egyenlet *általános* megoldásának és az inhomogén egyenlet egy *partikuláris* megoldásnak az összege: $y(t)=y_h(t)+y_p(t)$. Körülményes módszer, egyszerűbben kereshetjük a megoldást, ha a rendszeregyenletet az állapotegyenlet alakjára vezetjük vissza, vagy a Laplace transzformáció eljárását alkalmazzuk.

A *rendszer egyenletből* közvetlenül is származtatható a *SISO* tag $W(s)=y(s)/u(s)$ átviteli függvénye. Ennek – az s komplex változó algebrai törtjeként (polinomok hányadosaként) megadható – általános, *polinomiális* normálalakja:

$$W(s) = \frac{G(s)}{H(s)} = \frac{g_0 s^m + g_1 s^{m-1} + \dots + g_m}{\underbrace{s^n + h_1 s^{n-1} + \dots + h_n}_{\text{algebrai tört alak}}} = g_0 \frac{\underbrace{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}_{\text{gyökényes alak}}}{\underbrace{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}_{\text{gyökényes alak}}} = \frac{y(s)}{u(s)}$$

Az átviteli függvény polinomiális kifejezésében a rendszeregyenlet g_i és h_i *valós* együtthatói szerepelnek, így ezek ismerete esetében a $W(s)$ átviteli függvény a rendszeregyenletből *közvetlenül felírható* (az átviteli függvény polinomiális normálalakja és a rendszeregyenlet egymásnak kölcsönösen megfelelő, ugyanazokat a paramétereket tartalmazó „más-más alakjai”).

⁴⁴ Csak a *SISO* tag $W(s)$ átviteli függvénye értelmezhető, mint az $y(s)$ kimenő és az $u(s)$ bemenő jelek Laplace transzformáltjainak *hányadosa*, zérus kezdeti feltételek mellett. A $W(s)=G(s)/H(s)$ átviteli függvényével leírt dinamikus rendszer aszimptotikusan stabilis, ha $H(s)=0$ karakterisztikus egyenletének minden p_i gyöke ($W(s)$ minden pólusa) az s komplex sík negatív valós részű félsíkján (a stabilitási tartományban) van. Egy más meghatározásban $W(s)=L\{w(t)\}$, ahol $w(t)$ a *SISO* tag súlyfüggvénye (impulzusválasza).

⁴⁵ A $dx(t)/dt=ax(t)+bu(t)$, $y(t)=cx(t)+du(t)$ *elsőrendű* ($n=1$) állapotegyenletnek adott $x(0)$ kezdeti feltételre, és $u(t)$ gerjesztésre vonatkozó (mátrixműveleteket *nem* tartalmazó)

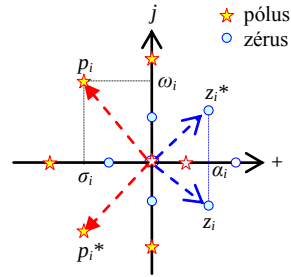
$$x(t) = e^{at}x(0) + \int_{\tau=0}^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau = e^{at}x(0) + b \int_{\tau=0}^t e^{a(t-\tau)}u(\tau)d\tau, \quad y(t) = cx(t) + du(t)$$

megoldásának jelentős szerepe van, mivel egy alkalmasan megválasztott kanonikus transzformációval az $n > 1$ rendszámú állapotegyenlet elsőrendű rendszerekre bontható fel (lásd az átviteli függvény *részletlőttes* alakját).

⁴⁶ Az n rendszámú, állandó együtthatójú, lineáris differenciálegyenlet (a *SISO* tag *rendszer egyenlete*) **ARMA** (**auto regressive, moving average**) modell, és $n \geq m$. Ennek az időtartománybeli megoldása körülményes eljárást igényel, ettől egyszerűbb, ha a rendszeregyenlethez egy vele egyenértékű *állapotváltozós leírást* rendeljük, és ezt oldjuk meg, vagy a Laplace transzformáció alkalmazásával az időtartományból az s operátor tartományra térünk át, majd az inverz Laplace transzformációval térünk vissza az időtartományba.

Megjegyzés

A $G(s)=g_0s^m+g_1s^{m-1}+\dots+g_{m-1}s+g_m=g_0(s-z_1)\dots(s-z_m)$ és $H(s)=s^n+h_1s^{n-1}+\dots+h_{n-1}s+h_n=(s-p_1)\dots(s-p_n)$ polinomok z_i gyökeinek ($W(s)$ zérusainak, ahol $W(z_i)=0$) és p_i gyökeinek ($W(s)$ pólusainak, ahol $W(p_i)=\infty$) meghatározásával a **polinomiális** normálalak **gyöktényezős** normálalakban, **időállandós** normálalakban vagy **részlettört** alakban is megadható. Az algebra alaptétele szerint a *valós* együtthatójú $G(s)$, $H(s)$ polinomok gyökei valós értékek (pl. $z_i=\alpha_i$, $p_i=\sigma_i$), vagy *konjugált komplex* párban megjelenő számpárok (pl. $z_{i,i+1}=\alpha_i\pm j\beta_i$, $p_{i,i+1}=\sigma_i\pm j\omega_i$), illetve a gyökök egy része a komplex sík *origójában* is lehet (pl. J számú $z_i=0$ zérus, és K számú $p_i=0$ pólus). A gyöktényezős alakhoz rendelhető az átviteli függvény „ábrája”, amely a zérusok és pólusok elhelyezkedését mutatja a komplex számsíkon (lásd 16. ábra). Ez az ábra – a g_0 együttható megadása mellett – egyértelműen definiálja az átviteli függvényt. Elvi lehetőségként több, egymással azonos zérus és pólus is lehetséges, amelyek kiejtik egymást. Az is előfordulhat, hogy valamely zérus vagy pólus a $G(s)$ számláló, illetve a $H(s)$ nevező polinomjainak többszörös multiplicitású gyöke.



16. ábra A $W(s)$ átviteli függvény pólus–zérus eloszlása a komplex számsíkon

Ennek megfelelően a $G(s)$ illetve $H(s)$ gyöktényezős kifejezésében az s^J és s^K , az $(s-z_i) = (s-\alpha_i)$ és $(s-p_i) = (s-\sigma_i)$, valamint a konjugált komplex gyökpárokat tartalmazó $(s-z_i)(s-z_{i+1}) = (s-z_i)(s-z_i^*) = s^2 - s(z_i+z_i^*) + z_i z_i^*$ illetve a $(s-p_i)(s-p_{i+1}) = (s-p_i)(s-p_i^*) = s^2 - s(p_i+p_i^*) + p_i p_i^*$ tényezők szerepelhetnek (z_i^* , p_i^* a z_i és p_i konjugáltjai). A valós zérusok és pólusok kiemelésével valamint a konjugált komplex zérusokat és pólusokat tartalmazó tényezőket egy valós együtthatójú másodfokú polinomba összevonva és ebből a $z_i z_i^* = \alpha_i^2 + \beta_i^2$ és $p_i p_i^* = \sigma_i^2 + \omega_i^2$ valós értékű állandókat kiemelve az alábbi kifejezéseket kaphatjuk:

valós α_i zérusokhoz és σ_i pólusokhoz tartozó tényezők:

$$\begin{aligned} s - z_i = s - \alpha_i &= (-\alpha_i) \left[1 + \left(-\frac{1}{\alpha_i} \right) s \right] = \frac{1}{\tau_i} (1 + s\tau_i) \\ s - p_i = s - \sigma_i &= (-\sigma_i) \left[1 + \left(-\frac{1}{\sigma_i} \right) s \right] = \frac{1}{T_i} (1 + sT_i) \\ \tau_i &= -\frac{1}{\alpha_i} \quad T_i = -\frac{1}{\sigma_i} \end{aligned}$$

konjugált komplex $(s-z_i)(s-z_{i+1})$ zéruspárokhoz és $(s-p_i)(s-p_{i+1})$ póluspárokhoz tartozó tényezők:

$$\begin{aligned} s^2 - (z_i + z_i^*)s + z_i z_i^* &= s^2 - [(\alpha_i + j\beta_i) + (\alpha_i - j\beta_i)]s + (\alpha_i + j\beta_i)(\alpha_i - j\beta_i) = (\alpha_i^2 + \beta_i^2) \left[1 - \frac{2\alpha_i}{\alpha_i^2 + \beta_i^2} s + \frac{1}{\alpha_i^2 + \beta_i^2} s^2 \right] = \\ &= \frac{1}{\tau_{0i}^2} (1 + 2\mu_i \tau_{0i} s + \tau_{0i}^2 s^2) \quad \tau_{0i} = \frac{1}{\sqrt{\alpha_i^2 + \beta_i^2}} > 0 \quad -1 < \mu_i = -\frac{\alpha_i}{\sqrt{\alpha_i^2 + \beta_i^2}} < 1 \\ s^2 - (p_i + p_i^*)s + p_i p_i^* &= s^2 - [(\sigma_i + j\omega_i) + (\sigma_i - j\omega_i)]s + (\sigma_i + j\omega_i)(\sigma_i - j\omega_i) = (\sigma_i^2 + \omega_i^2) \left[1 - \frac{2\sigma_i}{\sigma_i^2 + \omega_i^2} s + \frac{1}{\sigma_i^2 + \omega_i^2} s^2 \right] = \\ &= \frac{1}{T_{0i}^2} (1 + 2\xi_i T_{0i} s + T_{0i}^2 s^2) \quad T_{0i} = \frac{1}{\sqrt{\sigma_i^2 + \omega_i^2}} > 0 \quad -1 < \xi_i = -\frac{\sigma_i}{\sqrt{\sigma_i^2 + \omega_i^2}} < 1 \end{aligned}$$

A $\tau_i=1/(-\alpha_i)$ és $T_i=1/(-\sigma_i)$ valós *időállandók*, a $\omega_{0i}=1/T_{0i}$ a nevezőben lévő másodfokú tényezők valós sajátfrekvenciái (*natural frequency*), a ξ_i a valós csillapítási tényezők⁴⁷ (*damping factors*). Mindezek figyelembevételével (m_1, n_1 a valós, m_2, n_2 a konjugált komplex párban előforduló zérusok és pólusok száma, és így a $G(s)$ és $H(s)$ polinomok fokszámai $m=J+m_1+2m_2$, $n=K+n_1+2n_2$). Vagyis:

⁴⁷ A MATLAB [T0,ksi]=damp(Ps) utasítása egy tetszőleges, az s változóban n fokszámú $P(s)$ polinomhoz kiszámítja ennek gyökeit, a gyököknek megfelelő sajátfrekvenciákat és csillapítási tényezőket.

$$\begin{aligned}
W(s) &= \frac{g_o s^J \prod_{i=1}^{m_1} (s - \alpha_i) \prod_{i=1}^{m_2} [s - (\alpha_i + j\beta_i)][s - (\alpha_i - j\beta_i)]}{s^K \prod_{i=1}^{n_1} (s - \sigma_i) \prod_{i=1}^{n_2} [s - (\sigma_i + j\omega_i)][s - (\sigma_i - j\omega_i)]} = \\
&= g_o \frac{\prod_{i=1}^{m_1} (-\alpha_i) \prod_{i=1}^{m_2} (\alpha_i^2 + \beta_i^2)}{\prod_{i=1}^{n_1} (-\sigma_i) \prod_{i=1}^{n_2} (\sigma_i^2 + \omega_i^2)} \frac{1}{s^{K-J}} \frac{\prod_{i=1}^{m_1} [1 + (-\frac{1}{\alpha_i})s] \prod_{i=1}^{m_2} (1 - \frac{2\alpha_i}{\alpha_i^2 + \beta_i^2} s + \frac{1}{\alpha_i^2 + \beta_i^2} s^2)}{\prod_{i=1}^{n_1} [1 + (-\frac{1}{\sigma_i})s] \prod_{i=1}^{n_2} (1 - \frac{2\sigma_i}{\sigma_i^2 + \omega_i^2} s + \frac{1}{\sigma_i^2 + \omega_i^2} s^2)} \\
&\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{k/s^i} \underbrace{\hspace{10em}}_{W_T(s)} \\
W(s) &= g_o \frac{\underbrace{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}_{\text{gyöktényezős (pólus-zérus) alak}}}{\underbrace{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)}_{\text{gyöktényezős (pólus-zérus) alak}}} = \frac{k}{s^i} \frac{\prod_{i=1}^{m_1} (1 + s\tau_i) \prod_{i=1}^{m_2} (1 + 2\mu_i \tau_{0i} s + \tau_{0i}^2 s^2)}{\underbrace{\prod_{i=1}^{n_1} (1 + sT_i) \prod_{i=1}^{n_2} (1 + 2\xi_i T_{0i} s + T_{0i}^2 s^2)}_{W_T(s)}} \\
&\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{időállandós normálalak}
\end{aligned}$$

A *gyöktényezős (zero-pole-gain)* és az *időállandós* normálalak lényegét tekintve az átviteli függvény azonos tulajdonságait ($W(s)$ zérus-pólus eloszlását) mutatják, az időállandós alakban azonban minden, k , τ_i , μ_i , τ_{0i} , T_i , ξ_i , T_{0i} paraméter *valós* érték, és $i=K-J$ a tag *típuszáma*. A *transziens* viselkedést az átviteli függvény $W_T(s)$ időállandókat tartalmazó tényezője jeleníti meg, a rendszer kvázistacioner állapotában viszont a k/s^i tényező a meghatározó. Stabilis $W_T(s)$ mellett $i=0$ *arányos* (önbeálló) tagot jelent, az $i>1$ *integráló* tulajdonságot mutat, $i<1$ esetében *differenciáló* jellegű jelátvitelről van szó. Ha a k , τ_i , μ_i , τ_{0i} , T_i , ξ_i , T_{0i} paraméterek mindegyike *pozitív* érték és $i=0$, akkor minden pólus és zérus a komplex sík *negatív valós részű* felsíkján van, és a tag aszimptotikusan stabilis, önbeálló, és ún. *minimumfázisú*. Ha a stabilis pólusok mellett a zérusok között pozitív, vagy pozitív valós részű zérusok is vannak, az önbeálló tag *nem minimumfázisú*. A $W_T(s)$ tényező lényeges tulajdonsága, hogy az $s=0$ helyen vett helyettesítési értéke az egység: $W_T(0)=1$. A $W(s)=G(s)/H(s)$ polinomiális normálalakjából a gyöktényezős normálalak meghatározását a **MATLAB** `[z, p, k]=tf2zp(G, H)`; függvénye támogatja. Az időállandós normálalak különféle tényezői alapján az alábbi táblázatban megnevezett tagokat szokás egymástól megkülönböztetni:

$W(s)$ tényezője	A megfelelő rendszeregyenlet	Megnevezés	Jelölés	Megjegyzés
k	$y(t) = ku(t)$	<i>Időkésés nélküli arányos tag</i>	P	k : átviteli tényező
sT_D	$y(t) = T_D \frac{du(t)}{dt}$	<i>Differenciáló tag</i>	D	<i>Nem realizálható</i>
$\frac{1}{sT_i}$	$T_i \frac{dy(t)}{dt} = u(t)$	<i>Integráló tag</i>	I	T_i integrálási idő
$1 + sT_d$	$y(t) = u(t) + T_d \frac{du(t)}{dt}$	<i>Arányos-differenciáló tag</i>	PD	<i>Nem realizálható</i>
$\frac{1}{1 + sT}$	$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = u(t)$	<i>Egytárolós arányos tag</i>	T	$T>0$, időállandó
$1 + 2\mu T_d s + T_d^2 s^2$	$y(t) = u(t) + 2\mu T_d \frac{du(t)}{dt} + T_d^2 \frac{d^2 u(t)}{dt^2}$	P+D+D² tag	PDD²	<i>Nem realizálható</i>
$\frac{1}{1 + 2\xi T_0 s + T_0^2 s^2}$	$T_0^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\xi T_0 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = u(t)$	<i>Kéttárolós lengő tag</i>	T_ξ	$T_0>0, 0<\xi<1$
$\frac{1 + sT_i}{sT_i}$	$T_i \frac{dy(t)}{dt} = u(t) + T_i \frac{du(t)}{dt}$	<i>Arányos-integráló tag</i>	PI	$T_i>0$
$\frac{sT_d}{1 + sT}$	$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = T_d \frac{du(t)}{dt}$	<i>Egytárolós differenciáló tag</i>	DT	$T_d>0, T>0$
$\frac{1 + sT_d}{1 + sT}$	$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = u(t) + T_d \frac{du(t)}{dt}$	<i>Arányos-differenciáló tag</i>	PDT	$T_d>T>0$

$$\frac{1+sT_i}{1+sT}$$

$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = u(t) + T_i \frac{du(t)}{dt}$$

Közelítő arányos-integráló tag **PIT** $T > T_i > 0$

$$e^{-sT_h}$$

$$y(t) = u(t - T_h)$$

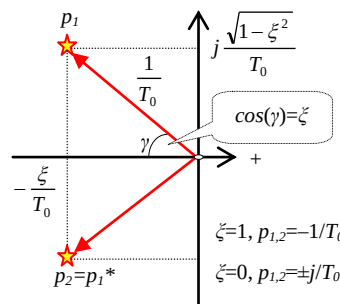
Holtidős tag

H

$$T_h > 0$$

A táblázatban kiemelten megjelenített **kéttárolós lengő** tag (T_ξ tag) átviteli függvénye és az ennek megfelelő rendszeregyenlet egy olyan alapeset, amivel a zárt szabályozási rendszer $y_A(s)$ (alapérték) bemenőjele és az $y(s)$ (szabályozott jellemző) kimenőjele közötti jelátviteli tulajdonságait is gyakran jellemezzük. Az átviteli függvényt ekkor egy negatív valós részű $p_{1,2} = \sigma \pm j\omega = [-\xi \pm j\sqrt{1-\xi^2}]/T_0$ ún. *domináns póluspár* jellemzi [lásd 17. ábra, $\omega_0 = 1/T_0$ a csillapítatlan (természetes) körfrekvencia, $\sqrt{1-\xi^2}/T_0$ a csillapított (lengési) körfrekvencia, $\xi = \cos(\gamma)$ a csillapítási tényező]. A ξ csillapítási tényező értékétől függően a kéttárolós lengő tag $v(t)$ átmeneti függvénye (egységugrás válasza):

$$v(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{1 + 2\xi T_0 s + T_0^2 s^2} \frac{1}{s} \right\} = \begin{cases} 1 - \frac{e^{-\xi \frac{t}{T_0}}}{\sqrt{1-\xi^2}} \left(\cos \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T_0} t + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T_0} t \right) & 0 < \xi < 1 \\ 1 - (1 + \frac{t}{T_0}) e^{-\frac{t}{T_0}} & \xi = 1 \\ 1 - e^{-\xi \frac{t}{T_0}} \left(\cosh \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T_0} t + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sinh \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T_0} t \right) & 1 < \xi < \infty \end{cases}$$

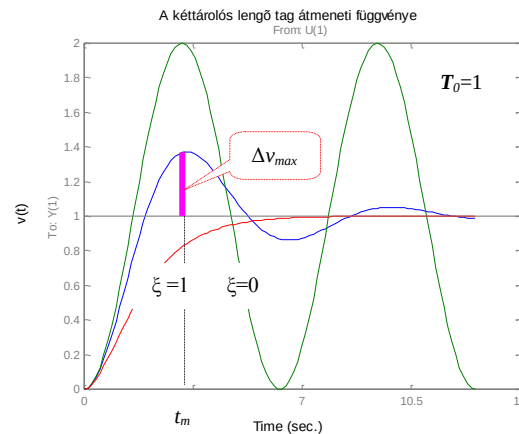


17. ábra A kéttárolós lengő tag (T_ξ tag) átviteli függvényének pólusai

A $v(t)$ kifejezéséből láthatóan a $\xi > 0$ csillapítási tényező értékétől függően a $v(\infty) = 1$ végértékre történő beállás *lengésekkel* ($0 < \xi < 1$) vagy *aperiódikusan* ($1 \leq \xi < \infty$) történik. Figyeljünk fel arra a tulajdonságra, hogy a ξ csillapítási tényező egységnyi értéke esetében az átviteli függvénynek kétszeres multiplicitású valós pólusa van a negatív valós tengely $p_{1,2} = -1/T_0$ pontjában, amikor is az aperiódikus átmeneti függvény a leggyosabb beállású. A $\xi = 0$ paraméter jelentése *csillapítatlan* lengést jelent, ekkor a pólusok $p_{1,2} = \pm j/T_0$ értékkel az imaginárius tengelyen vannak ($T = 2\pi T_0$ periódusidejű oszcillátor típusú működés). A $\xi < 0$ eset *labilitást* jelent, az átmeneti függvény minden határon túl növekszik.

A $v(t)$ grafikonját ξ különféle értékeire **MATLAB** támogatással számítjuk. Részletezve:

```
T0=input('T0=');ksi=input('ksi=');
[G,H]=odr2(1/T0,ksi);step(G,H);
```



18. ábra Kéttárolós lengő tag átmeneti függvényei

A T_ξ tag *átmeneti függvénye* (lásd 18. ábra) $0 < \xi < 1$ esetben *csillapodó* lengésekkel veszi fel az $y(\infty)=v(\infty)=1$ végértékét, miközben a $t_m=\pi T_0/\sqrt{1-\xi^2}$ időpontban keletkező maximális **túllendülése** (overshoot)

$$\Delta v_{\max} = v_{\max}(t_m) - 1 = e^{-\frac{\pi \xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

A $v(t)$ átmeneti függvény fontos tulajdonsága, hogy a $\Delta v_{\max}$ **túllendülés** értéke **kizárólag a ξ csillapítási tényező függvénye**.

A táblázat második kiemelt átviteli függvénye az **arányos-integráló (PI)** tagot írja le. Ez az $(1+sT_i)/(sT_i)=1+1/(sT_i)$ kifejezésnek megfelelően egy arányos (**P**) és egy integráló (**I**) tag *párhuzamos* kapcsolásának is tekinthető, átmeneti függvénye ennek megfelelően $v(t)=L^{-1}\{W(s)/s\}=1+t/T_i$. Kiemelt jelentősége azért van, mert igen nagy gyakorisággal a szabályozási algoritmus egy $W_c(s)=k_c[1+1/(sT_i)]$ típusú, **arányos (P)** és **integráló (I)** jelátviteli csatornával rendelkező átviteli függvénnyel jellemezhető ($T_i>0$: integrálási idő).

A táblázatban a harmadik kiemelt átviteli függvény az $\exp(-sT_h)$ **holtidős (H)** tényezőt jelenti. Ez a tényező akkor szerepel a tag átviteli függvényében, ha az y kimenőjel és az u bemenőjel közötti késleltetésben az inercia típusú késleltetésen túlmenően a jelterjedés *véges sebességének* a hatása nem hanyagolható el. Átmeneti függvénye $v(t)=1(t-T_h)$, vagyis az $u(t)=1(t)$ egységugrásra adott $y(t)=v(t)$ válasz egy T_h holtidővel *késleltetett* egységugrás. Az $\exp(-sT_h)$ tényező *transzcendens* volta a zárt szabályozási rendszer analízisében jelentős nehézséget okozhat, ezért gyakran *algebrai tört* típusú átviteli függvénnyel közelítjük (lásd a *Strejc*, vagy *Pade* közelítéseket).

Természetesen a táblázatban szereplő minden tagnak – az **átviteli függvényeken** és a **rendszer egyenleteken** túlmenően – fontos **rendszerjellemező** tulajdonsága a $w(t)=L^{-1}\{W(s)\}$ **súlyfüggvénye**, a $v(t)=L^{-1}\{W(s)/s\}$ **átmeneti függvénye** és a $W(j\omega)=W(s)_{s=j\omega}$ **frekvencia függvénye** (Nyquist helygörbéje). Ezek meghatározását és ábrázolását az olvasóra bizzuk. Az inverz transzformáció végrehajtásához vegyük figyelembe, hogy egy inverz transzformálandó $B(s)/A(s)$ *valódi* törtfüggvény ($B(s)$ $m \geq 0$ fokszáma kisebb $A(s)$ $n \geq 1$ fokszámánál) inverz transzformáltja az n fokszámú $A(s)$ polinom egyszeres multiplicitású p_i gyökei esetében (*Heaviside* kifejtési tétele):

$$L^{-1}\left\{\frac{B(s)}{A(s)}\right\} = \sum_{i=1}^n \frac{B(p_i)}{\left[\frac{dA(s)}{ds}\right]_{s=p_i}} e^{p_i t}$$

A táblázatban szereplő „nem realizálható” **D**, **PD**, **PDD²** tagok *ideális* differenciáló komponenseket tartalmaznak (számlálójuk a nevezőjüknél magasabb fokszámú, átmeneti függvényükben $\delta(t)$ *Dirac delta* és ennek körülményesen értelmezhető $d\delta(t)/dt$ elsőrendű-, és $d^2\delta(t)/dt^2$ másodrendű deriváltjai is megjelennek!). Ezek a $W(s)$ átviteli függvény $G(s)$ számlálójának gyöktényezőjeként ugyan létezhetnek, de *önmagukban* nem realizálhatóak. Az átviteli függvényben egy z_i zérus realizálása szükségszerűen együtt jár egy p_i pólus

jelenlétével is, ami biztosítja, hogy a számláló a nevezőtől *nem magasabb fokszámú* (tehát például az $s-z_i$ tényező *nem* realizálható tagot, de az $(s-z_i)/(s-p_i)$ realizálható tagot jelent). Elfajuló esetnek tekinthetjük a $W(s)=k$ átviteli függvényt is, amely $y(t)=ku(t)$ – időkésleltetés nélküli arányos, tehát bizonyos értelemben idealizált – kapcsolatot definiál az y kimenő és u bemenő jelek között. Ebben a vonatkozásban megengedőbbek vagyunk, mert ha a valóságban jelenlévő késleltetés a rendszer többi késleltetéséhez képest elhanyagolható, a késleltetés nélküli arányos tag (a *proporcionális*, **P** tag) absztrakciójával dolgozhatunk.

Az algebrai tört, vagy gyöktényezős kifejezésben adott átviteli függvényt *részlettörtes alakban* (partial-fraction) is megadhatjuk. Ha **$W(s)$** p_i pólusai *egymástól különbözőek*, akkor a polinomiális alak $r_i/(s-p_i)$ részlettörtek összegére is felbontható. Ennek kifejezése $n>m$ mellett:

$$\begin{aligned} W(s) &= \frac{g_0 s^m + g_1 s^{m-1} + \dots + g_{m-1} s + g_m}{s^n + h_1 s^{n-1} + \dots + h_{n-1} s + h_n} = \\ &\quad \text{polinomiális alak} \\ &= g_0 \frac{(s-z_1)(s-z_2)\dots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)} = \\ &\quad \text{gyöktényezős (pólus-zérus) alak} \\ &= \sum_{i=1}^n \underbrace{\frac{r_i}{s-p_i}}_{\text{részlettörtes alak}} = \sum_{i=1}^n \frac{\frac{r_i}{(-p_i)}}{1 + \frac{1}{(-p_i)} s} = \sum_{i=1}^n \underbrace{\frac{k_i}{1+sT_i}}_{\text{részlettörtes alak}} = \frac{y(s)}{u(s)} \end{aligned}$$

Ebben r_i a $W(s)$ komplex változós függvény reziduuma⁴⁸, $k_i=r_i/(-p_i)$ átviteli tényező, $T_i=1/(-p_i)$ időállandó. A részlettörtes alakból az is következik, hogyha a p_i pólusok az s komplex sík **negatív** valós tengelyén helyezkednek el, ez az alak n számú *egytagolás arányos tag* (**T** tag) *párhuzamos kapcsolásának* struktúrájával jellemezhető. A részlettörtes alak igen egyszerűvé teszi a tag $w(t)=L^{-1}\{W(s)\}$ impulzusválaszának kiszámítását, miután a $w(t)$ súlyfüggvény az $L^{-1}\{r_i/(s-p_i)\}=r_i \exp(p_i t)$ időfüggvény komponensek *összegeként* jön létre. Az átviteli függvény $W_i(s)=r_i/(s-p_i)=x_i(s)/u(s)$ összetevőjéhez egy

$$\begin{aligned} s x_i(s) &= p_i x_i(s) + r_i u(s) \Leftrightarrow \frac{dx_i(t)}{dt} = p_i x_i(t) + r_i u(t) \quad i: 1, 2, \dots, n \\ y(s) &= \sum_{i=1}^n x_i(s) \quad \Leftrightarrow \quad y(t) = \sum_{i=1}^n x_i(t) \end{aligned}$$

állapotegyenlet komponens, és az ezek összegeként keletkező y kimenőjel rendelhető. Ennek alapján használjuk azt a meghatározást, hogy egy dinamikus rendszer átviteli függvényének minden p_i *pólusához* a rendszer egyfajta $x_i(t)$ *állapotváltozója* tartozik (lásd pl. az átviteli függvény *párhuzamos* felbontását). Ebből az állapotegyenlet *első kanonikus alakja* állítható elő, amikor is a rendszeregyenletnek megfelelő állapotegyenlet diagonális állapotmátrixának főátlójában az átviteli függvény p_i pólusai szerepelnek. Az állapotegyenlet ekkor:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & p_n \end{bmatrix}}_{A_T = \Lambda} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix}}_{B_T} u(t) \\ y(t) &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}}_{C_T} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

⁴⁸ r_i a $W(s)$ komplex változós függvény p_i szinguláris pontjához tartozó

$$\dots + c_{-n}(s-p_i)^{-n} + \dots + c_{-1}(s-p_i)^{-1} + c_0 + \dots + c_n(s-p_i)^n + \dots$$

Laurent sorában az $(s-p_i)^{-1}$ tényezőjének c_{-1} együtthatója, a p_i ponthoz tartozó **reziduum** ($c_{-1}=r_i$). $W(s)=G(s)/H(s)$ átviteli függvény szinguláris pontjai (pólusai) a $H(s)=0$ karakterisztikus egyenlet p_i gyökei. Ezek, illetve a reziduumok kiszámítását (a $G(s)$ és $H(s)$ polinomok ismeretében) a **MATLAB**

$$[r, p, k] = \text{residue}(G, H); [z, p, k] = \text{tf2zp}(G, H)$$

utasításai támogatják (**tf2zp: transfer function to zero-pole conversion**).

A $W(s)=G(s)/H(s)$ átviteli függvény ismeretében a jelátvivő tag *súlyfüggvénye* (a $w(t)=L^{-1}\{W(s)\}$ impulzusválasza), *átmeneti függvénye* (a $v(t)=L^{-1}\{W(s)/s\}$ egységugrás válasza), $W(j\omega)=W(s)_{s=j\omega}=a(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$ *frekvencia függvénye* (az $u(t)=1\sin(\omega t)$ harmonikus jelre adott kvázistacioner $y(t)=a(\omega)\sin[\omega t+\varphi(\omega)]$ válasza), vagy *tetszőleges* $u(t)$ gerjesztésre adott $y(t)$, $x(t)$ *válaszai* MATLAB támogatással is meghatározhatók. Pl. a *polinomiális* normálalak ismerete alapján (ha $n \geq m$):

```
G=input('G='); H=input('H=');
[w,x,t]=impz(G,H); impulse(G,H); pause;
[v,x,t]=stepz(G,H); stepz(G,H); pause;
[reW,imW]=nyquist(G,H); nyquist(G,H); pause;
[a,fi,omega]=bode(G,H); bode(G,H); pause;
u=input('u=');
[y,x,t]=lsim(G,H,u,t); lsim(G,H,u,t);
```

Ha $W(s)=G(s)/H(s)$ és $u(s)=G_u(s)/H_u(s)$ algebrai törtek, akkor $y(s)=W(s)u(s)=[G(s)G_u(s)]/[H(s)H_u(s)]=B(s)/A(s)$. Az $y(t)$ időfüggvény ekkor az $L^{-1}\{W(s)\}=w(t)$ és a $L^{-1}\{u(s)\}=u(t)$ konvolúciójaként, vagy az $y(t)=L^{-1}\{y(s)\}=L^{-1}\{B(s)/A(s)\}$ inverz Laplace transzformáltjaként határozható meg. Abból a tulajdonságból, hogy az s operátor sec^{-1} dimenzióval rendelkezik az is következik, hogy minden z_i zérus és p_i pólus dimenziója is sec^{-1} , illetve az ezek reciprokaként bevezetett τ , T , τ_0 , T_0 paraméterek sec dimenziójúak, valamint a μ , ζ paraméterek *dimentiótlanok*.

A $W(s)$ átviteli függvény

$$H(s)=s^n+h_1s^{n-1}+\dots+h_{n-1}s+h_n=(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)$$

karakterisztikus polinomjának p_i gyökei (a $W(s)$ átviteli függvény *pólusai*) szabják meg a tag stabilitását, az $x_s(t)$ *sajátmozgásának* transziens összetevőit (lásd pl. az átviteli függvény *részlettörtes* alakját és az ebből származtatható $r_i \exp(p_i t)$ időfüggvény szerint alakuló súlyfüggvény komponenseket). Ezek az $r_i \exp(p_i t)$ összetevők $t \rightarrow \infty$ mellett akkor tartanak zérushoz, ha a $p_i t$ exponens negatív, vagyis ha $\text{real}(p_i) < 0$ ⁴⁹.

Aszimptotikusan stabilis a $W(s)=G(s)/H(s)$ átviteli függvényével leírt dinamikus tag, ha minden p_i pólusára – a $H(s)=s^n+h_1s^{n-1}+\dots+h_n=0$ karakterisztikus egyenletének minden gyökére – $\text{real}(p_i) < 0$ feltétel teljesül.

Az aszimptotikusan stabilis rendszer esetében $u(t)=u_0 1(t)$ ugrásalakú gerjesztésre $t \rightarrow \infty$ mellett létrejön a válasz $y_0=y(t)_{t \rightarrow \infty}$ állandósult értéke, amikor is az u és y jelek differenciálhányadosai zérus értékűek. Ebben az állandósult állapotban $h_n y_0 = g_m u_0$, illetve $y_0 = (g_m/h_n) u_0 = k u_0$ [$k=g_m/h_n$ a SISO tag *átviteli tényezője* (erősítése, *dc gain*), és $g_m \neq 0$, $h_n \neq 0$].

Megjegyzés

A SISO tag $W(s)$ átviteli függvényéhez – mint ahogy ezt az előzőekben tárgyaltuk – különféle állapotegyenletek rendelhetők. Ezek jellegzetes tulajdonsága, hogy a B bemeneti mátrix *oszlopvektor*, a C kimeneti mátrix *sorvektor* a D direkt mátrix *skalár* (lásd az átviteli függvény különféle – pl. direkt és párhuzamos – felbontásait, vagy a *Frobenius* alakokat). A SISO tag jelátviteli tulajdonságait a *rendszer egyenletén*, az *állapotegyenletén*, és az *átviteli függvényén* túlmenően további *rendszerjellemző* függvényekkel is leírhatjuk. Ezek: a $w(t)$ *súlyfüggvény* (impulzusválasz), a $v(t)$ *átmeneti* függvény (az egységugrás válasz), és a $W(j\omega)$ *frekvencia* függvény (a harmonikus jelekre adott válasz). Ez utóbbiak – hasonlóan a differenciálegyenlethez illetve az átviteli függvényhez – is alkalmasak arra, hogy *tetszőleges* $u(t)$ *gerjesztő* jelekre kapott *válaszokat* meghatározhassuk. A $W(j\omega)$ *frekvenciafüggvény* a szabályozó ún. „frekvencia módszeren” alapuló rendszertechnikai *méretezésében* (a szabályozó $W_c(s)$ átviteli függvényének – illetve a szabályozási algoritmusnak – meghatározásában) is jelentős szerepet kap.

Ha az aszimptotikusan stabilis rendszer az $u_i(t)=u_{i0}=\text{állandó} \neq 0$ gerjesztésre adott $x_i(t)$ és $y_i(t)$ válaszai $t \rightarrow \infty$ mellett $x_i(\infty)=x_{i0}$, $y_i(\infty)=y_{i0}$ állandó értékeket vesznek fel, akkor az n

⁴⁹ A Hurwitz stabilitási kritérium alkalmazásával a $H(s)$ polinom p_i gyökeinek *kiszámítása nélkül* is eldönthető az a kérdés, hogy minden p_i gyökre teljesül-e a $\text{real}(p_i) < 0$ feltétel.

dimenziós állapotterben ábrázolt állapotvektor $x(\infty)=x_0=[x_1(\infty) \ x_2(\infty) \ \dots \ x_n(\infty)]^T$ végpontja az állapotter **stabilis** – $\mathbf{P}_S$ jelű – **egyensúlyi pontja**. Nemlineáris esetben a dinamikus rendszernek adott u_0 gerjesztés vektor mellett *több* egyensúlyi pontja is lehet, lineáris rendszer esetében viszont csupán *egyetlen* egyensúlyi pont van⁵⁰. Stabilis vagy labilis rendszer $\mathbf{P}_S$, illetve $\mathbf{P}_L$ egyensúlyi pontjában⁵¹ a $dx_0(t)/dt$ állapotsebesség vektor zérus (mert az x_0 állapotvektor állandó), ezért az x_0 és y_0 koordináták értékei nemlineáris esetben a $dx_0(t)/dt=f(x_0,u_0)=0$ egyenletből határozhatók meg.

$$\frac{dx_0(t)}{dt} = f(x_0, u_0) = 0 \rightarrow x_0 = f^*(u_0)$$

$$y_0 = g(x_0, u_0) = g(f^*(u_0), u_0) = g(u_0)$$

Lineáris rendszer esetében az x_0 állapotvektornak és az y_0 kimenőjel vektornak a paramétermátrixokkal kifejezhető értékei:

$$\frac{dx_0(t)}{dt} = f(x_0, u_0) = Ax_0 + Bu_0 = 0 \rightarrow x_0 = -A^{-1}Bu_0$$

$$y_0 = Cx_0 + Du_0 = \underbrace{(-CA^{-1}B + D)}_k u_0 = ku_0$$

Az **LTI** rendszer egyensúlyi pontjának x_{i0} koordinátái algebrai mátrixműveletekkel számíthatók, az A^{-1} inverz mátrix most $A^{-1}=\text{adj}A/\det A$, és $\det(A) \neq 0$.

Ha a rendszer állapotvektorának kezdeti értéke $x(0)$ és a gerjesztésvektor $u(t)=u_0\mathbf{1}(t)$ ugrásfüggvény, akkor a $t=0$ időpontban a $dx(t)/dt$ állapotsebesség vektor (az integráló tag bemenő jele) nemlineáris és lineáris esetekben:

$$\left. \frac{dx(t)}{dt} \right|_{t=0} = f[x(0), u_0]$$

$$\left. \frac{dx(t)}{dt} \right|_{t=0} = Ax(0) + Bu_0$$

Ennek jelentése az, hogy az $x(t)$ állapotvektor minden $x_i(t)$ komponense $x_i(0)$ értékről indulva $tg(\alpha_i)=f_i[x(0), u_0]=f_i[x_1(0), \dots, x_n(0), u_1(0), \dots, u_l(0)]$, illetve lineáris esetben az $Ax(0)+Bu_0$ kifejezésnek megfelelően

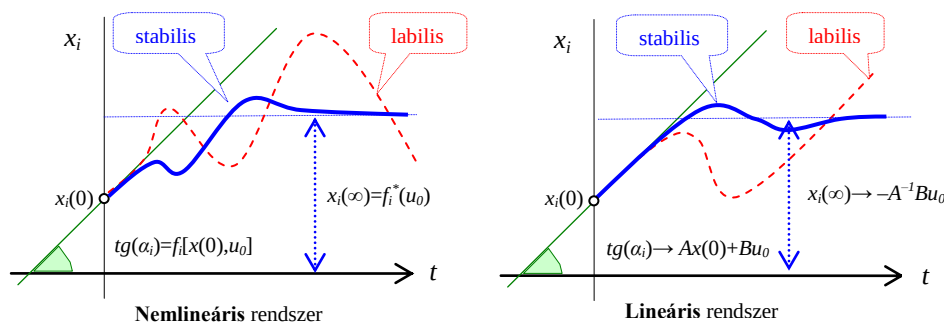
$$tg(\alpha_i) = a_{i1}x_1(0) + \dots + a_{in}x_n(0) + b_{i1}u_1(0) + \dots + b_{ij}u_j(0)$$

meredekséggel kezd az időben változni, vagyis általában a $x_i(t)$ megoldás $dx_i(t)/dt$ meredeksége a $t=0$ időpontban *mindegyik* állapotváltozó $x_i(0)$ kezdeti értékétől, és *mindegyik* bemenőjel ugrásnak az $u_i(0)$ nagyságától függhet⁵², akár stabilis, akár labilis rendszerről is legyen szó (lásd 19. ábra).

⁵⁰ Az *állapotter* x_0 koordinátájú egyensúlyi pontját – hasonlóan, mint a $W(s)$ átviteli függvénynek a komplex síkon ábrázolt p_i pólusokkal definiált pontjaihoz – *szinguláris* pontnak is nevezik.

⁵¹ A $\mathbf{P}_L$ labilis egyensúlyi pont „virtuális” egyensúlyi helyzetet jelent, mert ebben a pontban keletkező bármilyen kis kimozdítás hatására a rendszer ide visszatérni nem képes.

⁵² Lineáris rendszerek esetében a jelek *kezdeti* ($t=0$) és *végértékének* ($t=\infty$) meghatározására a *Laplace* transzformáció megfelelő tételeit is használhatjuk, feltételezve, hogy a *végérték* a rendszer aszimptotikus stabilitásának okán egyébként *létezik*.

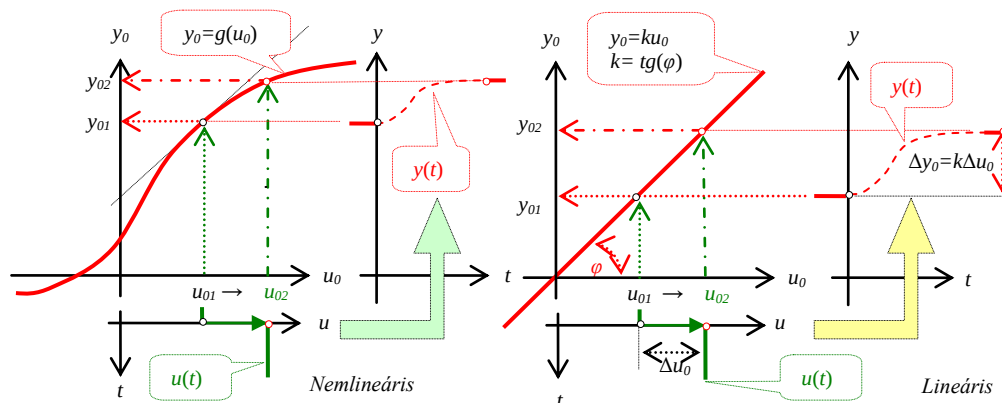
19. ábra Az ugrásjelre adott $x_i(t)$ válaszok kezdeti és végértékei

Önbeálló⁵³ SISO tagok esetében az u_0 állandó gerjesztéshez állandósult állapotban ($t \rightarrow \infty$) állandó x_0 állapotváltozó, és állandó y_0 kimenőjel tartozik, ezek összerendelését az

$$x_0 = f^*(u_0), \quad y_0 = g(u_0)$$

$$x_0 = -A^{-1}Bu_0, \quad y_0 = (-CA^{-1}B + D)u_0 = ku_0$$

kifejezések, illetve az y_0 kimenőjel és az u_0 bemenőjel közötti függvénykapcsolatot meghatározó statikus karakterisztikák teremtik meg⁵⁴ ($k = -CA^{-1}B + D = g_m/h_n$ a lineáris SISO tag átviteli tényezője, dc erősítése). Lineáris esetben az $y_0 = ku_0$ az origón átmenő k meredekségű egyenest jelenti (lásd 20. ábra). A statikus karakterisztika egy mérési eljárással is meghatározható, lényeges tulajdonsága, hogy kizárólag az önbeálló tagok u_0 , y_0 egyensúlyi értékei közötti függvénykapcsolatokat tartalmazza.



20. ábra Nemlineáris és lineáris önbeálló (stabilis) SISO tagok statikus karakterisztikái

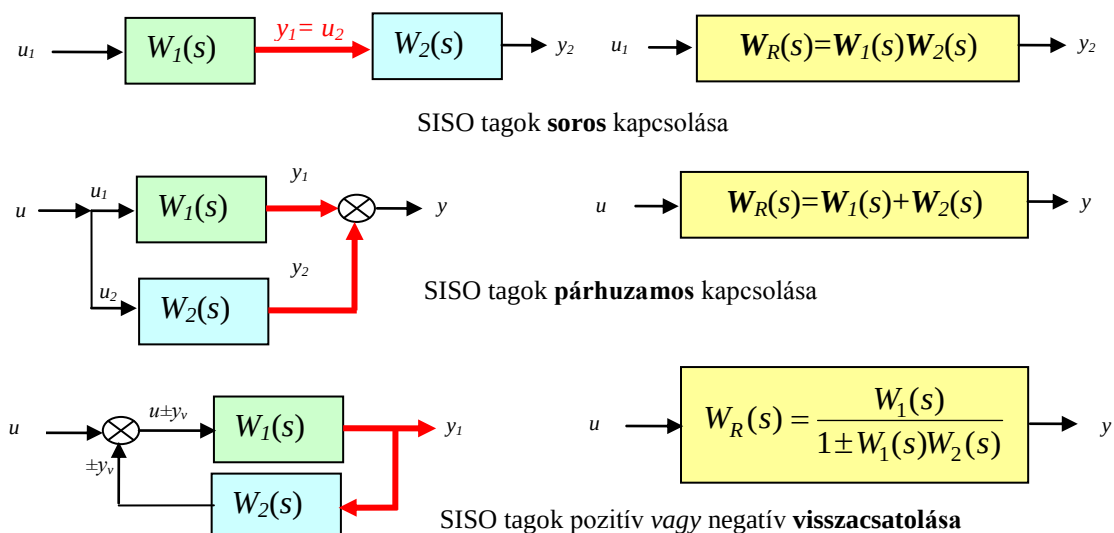
Annak eldöntésére, hogy egy Δu_0 ugrásfüggvény hatására keletkezett Δy_0 milyen $\Delta y(t)$ időfüggvény végértékeként jön létre, a differenciálegyenlet megoldására lenne szükség. A 20. ábra a lehetséges $\Delta y(t)$ időfüggvények egyikét (pl. az Δu_0 ugrásjelre adott $\Delta y(t)$ aperiódikus jellegű választ) mutatja.

A $W(s)$ átviteli függvénnyel jellemzett lineáris SISO tagok hatásvázlatok $\mathbf{P}$ (arányos), $\mathbf{I}$ (integráló) és $\mathbf{\Sigma}$ (összegző) lineáris alaptagokból álló hatásvázlat struktúrából építhetők fel (lásd az átviteli függvény különféle felbontásait, illetve az egyenáramú motor valamint az elektronikus áramkörök hatásvázlatait). A $W(s)$ átviteli függvénnyel jellemzett tagok

⁵³ Az önbeálló SISO tag aszimptotikusan stabilis, és az u_0 -állandó bemenőjelre, állandósult állapotban, $y_0 = ku_0$ -állandó kimenőjel választ ad. Az állapottól $\mathbf{P}_s$ pontja ekkor stabilis egyensúlyi pont.

⁵⁴ LTI rendszer esetében ez az állandósult állapot kizárólag akkor létezik, ha az $\mathbf{A}$ állapotmátrix minden λ_i sajátértéke – a $\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$ karakterisztikus egyenlet minden gyökére – $\text{real}(\lambda_i) < 0$.

egymással *alapstruktúrákat* alkotó kapcsolatban lehetnek. Ezek az alapstruktúrák a $W_1(s) = G_1(s)/H_1(s)$ és a $W_2(s) = G_2(s)/H_2(s)$ átviteli függvényű tagok **soros**, **párhuzamos** és **visszacsatolást** tartalmazó kapcsolásai (lásd 20a. ábra). **Soros** kapcsolás esetében a $W_1(s)$ átviteli függvényű tag $y_1(s)$ kimenő jele működteti a $W_2(s)$ átviteli függvényű $u_2(s)$ bemenőjelű és $y_2(s)$ kimenőjelű tagot [$u_2(s) = y_1(s)$]. Mindezek következményeként $y_2(s) = W_2(s)u_2(s) = W_2(s)y_1(s) = W_2(s)W_1(s)u_1(s)$, az eredő átviteli függvény ennek megfelelően $W_R(s) = W_1(s)W_2(s) = y_2(s)/u_1(s)$. **Párhuzamos** kapcsolás esetében mindkét tag azonos $u_1(s) = u_2(s) = u(s)$ bemenőjellel gerjesztett, az eredő kimenőjel az egyes tagok kimenőjelei az $y_1(s) + y_2(s) = W_1(s)u(s) + W_2(s)u(s) = [W_1(s) + W_2(s)]u(s)$ összege, az eredő átviteli függvény tehát $W_R(s) = W_1(s) + W_2(s) = y(s)/u(s)$. **Visszacsatolás** mellett a $W_1(s)$ visszacsatolt tag $u_1(s)$ bemenőjele a rendszer $u(s)$ bemenőjelenek és a visszacsatoló tag $y_v(s)$ kimenőjelenek az $u_1(s) = u(s) + y_v(s)$ összege (pozitív visszacsatolás esetén) vagy az $u_1(s) = u(s) - y_v(s)$ különbsége (negatív visszacsatolás esetén). Az eredő kimenőjel a visszacsatolt tag $y(s) = W_1(s)u_1(s) = W_1(s)[u(s) \pm y_v(s)]$ kimenő jele, de az $y_v(s)$ visszacsatoló jel $y_v(s) = W_2(s)y(s)$. Ennek megfelelően a struktúra $y(s)$ kimenőjelenek implicit kifejezése $y(s) = W_1(s)[u(s) \pm W_2(s)y(s)]$. Ebből $y(s)$ explicit alakban $y(s) = W_1(s)/[1 \pm W_1(s)W_2(s)]u(s)$, vagyis a visszacsatolás eredő átviteli függvénye $W_R(s) = W_1(s)/[1 \pm W_1(s)W_2(s)] = y(s)/u(s)$, és a + előjel a **negatív** visszacsatolásra, a – előjel a **pozitív** visszacsatolásra vonatkozik.

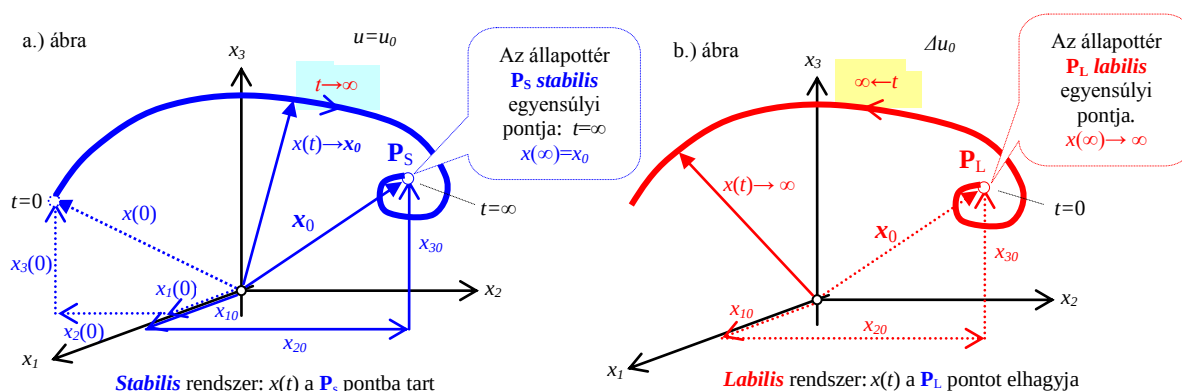


20a. ábra SISO tagok alapstruktúrái

A soros és a párhuzamos kapcsolások eredő átviteli függvényeinek nevezője a $H_1(s)H_2(s)$ karakterisztikus polinom. Ezért ha *mindkét* tag *stabilis*, az eredő rendszer is *stabilis*, de ha a tagok *valamelyike* labilis, az eredő rendszer is labilis. Nincs ez így a *visszacsatolás* esetében, mivel ekkor a $W_R(s)$ karakterisztikus polinomja $H_R(s) = H_1(s)H_2(s) \pm G_1(s)G_2(s)$, ami azt jelenti, hogy pl. labilis $W_1(s)$ esetében $W_2(s)$ megfelelő megválasztásával $W_R(s)$ stabilizálható, vagy stabilis $W_1(s)$ és $W_2(s)$ esetében a $W_R(s)$ labilis is lehet. Mindennek oka, hogy a visszacsatolásban **zártukú** jelterjedés realizálódik: $u_1 = u + y_v \rightarrow y = W_1(s)u_1 \rightarrow y_v = W_2(s)y \rightarrow u_1$.

A stabilitás szemléltetése az állapottérben. Az állapotrajektória

Az *aszimptotikusan stabilis*, illetve *labilis* rendszer mozgása nem csak az állapotváltozóinak $x_i(t)$ időfüggvényeivel, hanem az x_i állapotváltozók által kifeszített n dimenziós állapottérben az *állapottrajektóriával* is szemléltethető⁵⁵ (lásd 21. ábra). Az aszimptotikusan stabilis rendszer trajektóriája az állapottér $x(0)$ kezdeti feltétel vektor által meghatározott pontjából indul, és az állandó $u_0=[u_{10} \ u_{20} \ \dots \ u_{j0}]^T$ gerjesztés hatására, $t \rightarrow \infty$ mellett az állapottér $x_0=[x_{10} \ x_{20} \ \dots \ x_{n0}]^T$ koordinátájú P_S jelű stabilis egyensúlyi pontja felé tart, amit elméletileg a $t=\infty$ időpontban ér el (lásd a. ábra). Ha ezt a stabilis rendszert az egyensúlyi helyzetéből egy kis Δu_0 jellel *kimozdítjuk* majd Δu_0 gerjesztést egy rövid idő elteltét követően megszüntetjük, a rendszer *visszatér* az x_0 koordinátájú *stabilis* egyensúlyi pontjába. *Labilis* rendszer esetében is létezik a $f(x_0, u_0)=0$, vagy az $Ax_0 + Bu_0=0$ egyenleteknek x_0 koordinátájú P_L jelű *labilis* egyensúlyi pontja, de az ebből kimozdított rendszer ennek környezetét *elhagyja*, a trajektória $t \rightarrow \infty$ mellett a végtelenbe, vagy egy másik, stabilis egyensúlyi pontba tart (labilis, „virtuális” egyensúlyi pont, lásd b. ábra). Az is előfordulhat, hogy a labilis egyensúlyi pont körül periodikus vagy kaotikus mozgás jön létre⁵⁶.



21. ábra Stabilis és labilis rendszer állapottrajektóriái

Megjegyzés.

A különféle tudományágakban a stabilitás fogalmának is különféle értelmezését használják. Egyes biológiai, vagy közgazdasági folyamatokat akkor tekintenek stabilisnak, ha valamely állapotváltozójuk exponenciális törvényszerűség szerint *növekszik*. A szabályozástechnikában ettől *ellentétesen* az jelenti a stabilis rendszert, ha a rendszer $x_s(t)$ *sajátmozgása* (az u bemenőjel *zérus* értékének megfelelően) egy adott idő eltelte után közel *zérusra csökken*, az állandó u_0 hatására keltett gerjesztett $x_g(t)$ mozgása pedig $t \rightarrow \infty$ mellett az állandó x_0, y_0 koordinátákkal meghatározott egyensúlyi értékhez tart. Természettudományi területen a stabilitás problémakörét – a bolygómozgás mechanikájának tanulmányozása során – Newton (kb. 1620) vetette fel, és Euler, Lagrange, Laplace (kb. 1750) munkáiban bontakozott ki. Lagrange hozott új szemléletet a stabilitásvizsgálatban, mert nem a differenciálegyenlet megoldásának alapján kívánta vizsgálni a megoldás *korlátos* voltát, hanem a matematikai modell *szerkezetéből* akarta eldönteni a stabilitást. Maxwell (kb. 1880) a Watt (kb. 1750) által már a gyakorlatban alkalmazott centrifugális ingával szabályozott gőzgép stabilitásvizsgálatát a matematikai modell alapján végezte el. Poincaré (kb. 1900) Lagrange energiaelméletét vitte tovább, az égitestek mozgásának

⁵⁵ Az állapottrajektória az állapottérben ábrázolt $x(t)=[x_1(t) \ x_2(t) \ \dots \ x_n(t)]^T$ állapotvektor végpontjának (időben paraméterezett) mértani helye, miközben az $u(t)=[u_1(t) \ u_2(t) \ \dots \ u_j(t)]^T$ gerjesztésvektor és az $x(0)$ kezdeti feltétel hatásának kített rendszer mozgásának van. *Másodrendű* rendszerek esetében az állapottér *állapotsíkra*, vagy *fázissíkra* („út-sebesség” diagramra) egyszerűsödik.

⁵⁶ Miután a nemlineáris rendszernek több egyensúlyi pontja is lehet, a teljes állapottér az ezeket magába foglaló résztartományokra osztható. A stabilis tartományból induló trajektória a tartomány stabilis egyensúlyi pontjába fut, a labilis tartományból induló állapotvektor vagy a végtelenbe tart, vagy a labilis egyensúlyi pont körül periodikus mozgást végez. Az is előfordulhat azonban, hogy labilis egyensúlyi pontok mellett az állapotvektor *korlátos* marad, de nem mutat periodikus ismétlődést, és az állapottér egy adott tartományát sem hagyja el. Ez a jelenség a nemlineáris rendszer *kaotikus* viselkedése (lásd pl. Lorenz egyenlet, MATLAB demo függvénye).

vizsgálatát egyéb, másodrendű rendszerekre alkalmazva. A stabilitásvizsgálat elméletét – magasabb rendszámú lineáris és nemlineáris rendszerekre is kiterjesztve – Ljapunov (kb. 1900) általánosította.

A lineáris SISO rendszert *gerjesztés(G)–válasz(V) stabilis* (röviden **GV stabilis**) rendszernek nevezik, ha *bármely korlátos* $u(t)$ gerjesztésre *korlátos* $y(t)$ választ ad (**BIBO – bounded input implies bounded output** – stabilitás). A **GV** stabilitásból nem következik a rendszer aszimptotikus stabilitása, mivel az $y(t)$ kimenő jelben nem szükségszerűen van jelen a dinamikus rendszer minden állapotváltozója ($y(t)=Cx(t)+Du(t)$, C sorvektor, amelynek egyes elemei zérus értékek is lehetnek, így az ezekhez tartozó állapotváltozók létezésük ellenére a kimenőjelben nem játszanak szerepet). Márpedig ha ezek valamelyike labilis (vagyis minden határon túlmenően növekszik), a **GV** stabilitás ellenére a rendszer labilis (lásd az állapotmegfigyelhetőség és az állapotirányíthatóság témaköreit). Ettől ellentétesen az aszimptotikusan stabilis rendszerek természetesen teljesítik a **GV** stabilitás feltételét is, mivel mindegyik állapotváltozójának *sajátmozgása* zérushoz tart.

A nemlineáris rendszer valamely egyensúlyi pontjának stabilis-, vagy labilis tulajdonságát Ljapunov első (közvetett) stabilitási tétele alapján lehet eldönteni. E tétel szerint:

Ha a P egyensúlyi pont környezetében a nemlineáris rendszer mozgását egy **linearizált modellel** írjuk le, akkor a linearizált modell **A állapotmátrixának λ_i sajátérték eloszlása** alapján dönthető el a P pont stabilitása. Nevezetesen, **ha a linearizált modell A állapotmátrixának minden sajátértéke negatív valós részű ($\text{real}(\lambda_i) < 0$), akkor a P_S pontból ennek kis környezetébe kimozdított, majd magára hagyott rendszer a P_S egyensúlyi pontjába visszatér (ekkor P_S stabilis egyensúlyi pont).**

Ha viszont a sajátértékeknek *legalább az egyike pozitív valós* résszel rendelkezik, a P_L munkapont *labilis*, az innen kimozdított (majd magára hagyott) rendszer, *nem tér vissza* oda. Ha a sajátértékek valamelyike *zérus*, a kritérium nem használható. Az LTI rendszernek egyetlen (az $x(0)$ kezdeti feltételtől *nem függő*) egyensúlyi pontja van. Ez az egyensúlyi pont akkor stabilis, ha A állapotmátrixának mindegyik sajátértéke *negatív valós* részű. Ilyen esetben a rendszer $x_s(t)$ sajátmozgása *aperiodikus*, vagy *csillapított lengő* jelleggel az állapotér *origójába*, az u_0 =*állandó* gerjesztés hatására kiváltott $x_g(t)$ gerjesztett mozgás az állapottér $x_0=x(\infty)=-A^{-1}Bu_0$ állapotkoordinátákkal rendelkező P_S *stabilis* egyensúlyi pontjába tart. A kimenőjel $t=\infty$ –ban felvett értéke ekkor szintén állandó, $y_0=Cx_0+Du_0=(-CA^{-1}B+D)u_0=ku_0$ (lásd 21. ábra).

Megjegyzés

Ljapunov második (közvetlen) stabilitásvizsgálati módszere a globális állapotérben egy alkalmasan megválasztott, és a potenciális energiához hasonló $V(x)$ függvény (Ljapunov függvény) alapján teremti lehetőséget a stabilitás tartományának meghatározására. Elméleti jelentőségű módszer, lineáris rendszerek esetében történő alkalmazására – miután itt egyszerűbb stabilitásvizsgálati eljárások is rendelkezésre állnak – ritkán kerül sor.

Az állapotirányíthatóság és az állapotmegfigyelhetőség fogalmai

Az LTI rendszer állapotegyenlet reprezentációjának $dx(t)/dt=Ax(t)+Bu(t)$ matematikai kifejezéséből láthatóan az $x_i(t)$ állapotváltozók időbeli lefolyásának alakításában a rendszer saját tulajdonságait képviselő A állapotmátrixnak, és a $u(t)$ bemenőjel hatásvonalában lévő B bemeneti mátrixnak meghatározó szerepe van. Az állapotirányíthatóság alapkérdése, hogy *létezik-e* a dinamikus rendszernek olyan korlátos és szakaszonként folytonos $u(t)$ bemenőjele, amelynek segítségével egy *előírt* $t_v-t_0>0$ véges idő alatt az $x(t_0)$ állapotvektort egy szintén *előírt* $x(t_v)$ állapotvektorral megadott új állapotába átvihessük? Nyilvánvaló, hogy abban az esetben, ha egy tetszőleges $x_i(t)$ állapotváltozót az $u(t)$ bemenőjellel közvetlenül, vagy más

állapotváltozók közvetítésével befolyásolni nem tudunk, a feladat nem megoldható, a folyamat *állapotvektora* ilyen esetben **nem irányítható**. Triviális eset a $B=0$ érték, amikor is egyetlen állapotváltozóra sincs az $u(t)$ bemenő jelnek befolyása.

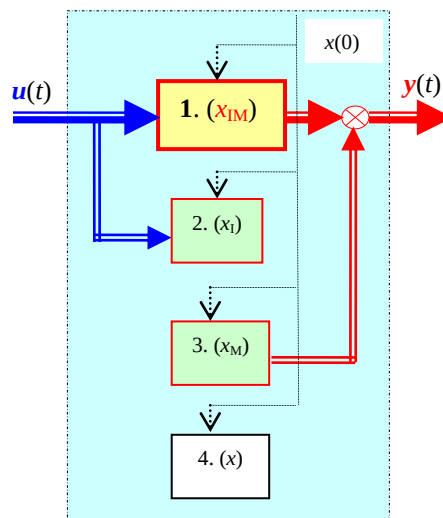
Hasonlóan felmerülő kérdés lehet, hogy a rendszer $u(t)$ gerjesztésének és $y(t)=Cx(t)+Du(t)$ kimenő jelének egy $t_0 < t < t_v$ időintervallumban rendelkezésre álló $y(t)$ és $u(t)$ ismert (pl. mérési) adataiból az állapotvektor $x(t_0)$ értéke meghatározható-e? Nyilvánvalóan, hogy az A és C paramétermátrixoknak ebben meghatározó szerepe van, mert pl. ha $C=0$ az $x(t)$ állapotvektor a kimenőjelben nincs is jelen, ezért $x(t_0)$ az $y(t)$ és $u(t)$ megfigyeléséből bizonyosan nem határozható meg. Ekkor a folyamat *állapotvektora* **nem megfigyelhető**.

Az állapotirányíthatóság (**controllability**) és állapotmegfigyelhetőség (**observability**) kérdéskörét Kalman⁵⁷ doldozta fel. Levezetés nélkül adjuk meg az állapotirányíthatóság és az állapotmegfigyelhetőség teljesülésének feltételeit. Az A , B , C , D paramétermátrixaival jellemzett lineáris folyamat állapotváltozói *irányíthatóak* és *megfigyelhetőek*, ha az

$$C_{co} = [B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B]$$

$$O_{ob} = [C^T \ A^T C^T \ \dots \ (A^T)^{n-1} C^T]$$

A , B mátrixokból képzett $C_{co}(A,B)$ irányíthatósági-, és az A^T , C^T mátrixokból képzett $O_{ob}(A^T, C^T)$ megfigyelhetőségi mátrixaik rangja **megegyezik** a dinamikus rendszer n rendszámával (A^T és C^T az A és C mátrixok transzponáltjai). Az általános lineáris rendszer Kalman nyomán négy olyan alrendszerre bontható, amelyeknek állapotváltozói: 1.) **irányíthatók és megfigyelhetőek** (x_{IM}), 2.) **irányíthatók de nem megfigyelhetőek** (x_I), 3.) **nem irányíthatók de megfigyelhetőek** (x_M), 4.) **nem irányíthatók és nem megfigyelhetőek** (x), (lásd 22. ábrát).



22. ábra Dinamikus rendszer alrendszerei

Fontos tulajdonság, hogy egyrészt sem az irányíthatóság, sem a megfigyelhetőség teljesülése nem igényli a rendszer *stabilitását*, másrészt az **átviteli függvény** kizárólag a dinamikus tag **irányítható és megfigyelhető** 1. alrendszerét (amelynek x_{IM} állapotváltozójára az u

⁵⁷ Kalman, R. E–Ho, Y. C.–Narendra, K. S. : Controllability of Linear Dynamical Systems. Contributions to Differential Equations. Interscience Publishers Inc. New York 1962.

bemenőjelnek *befolyása* van és az y kimenőjelben is *jelen* van) definiálja. A részletkérdésekkel a korábbiakban foglalkoztunk.

Példa

Egy negyedrendű (négy alrendszerből állónak tekinthető) **SISO** dinamikus tag állapotegyenlete ($a_{11} \neq a_{22} \neq a_{33} \neq a_{44}$, $b_1 \neq b_2 \neq 0$, $c_2 \neq c_4 \neq 0$ paraméterek mellett):

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{dx_1(t)}{dt} \\ \frac{dx_2(t)}{dt} \\ \frac{dx_3(t)}{dt} \\ \frac{dx_4(t)}{dt} \end{bmatrix}}_{dx(t)/dt} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix}}_{x(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_B u(t)$$

$$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & c_2 & 0 & c_4 \end{bmatrix}}_C \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix}}_{x(t)}$$

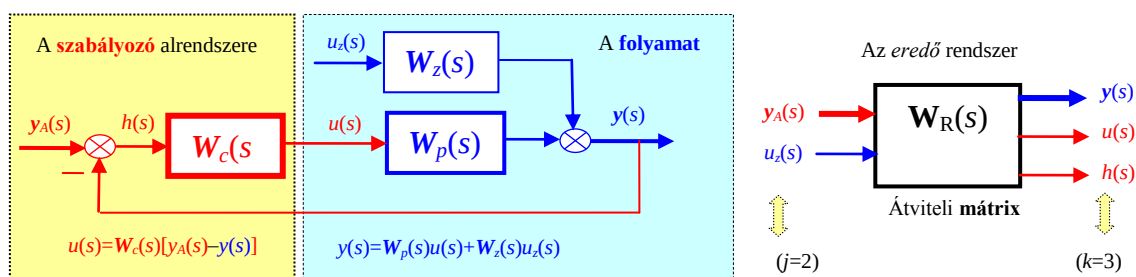
Az állapotegyenletekből közvetlenül leolvasható, hogy $x_1(t)$ irányítható ($b_1 \neq 0$) de megfigyelhetetlen ($c_1=0$), $x_2(t)$ **irányítható** ($b_2 \neq 0$) és **megfigyelhető** ($c_2 \neq 0$), $x_3(t)$ irányíthatatlan ($b_3=0$) és megfigyelhetetlen ($c_3=0$), $x_4(t)$ irányíthatatlan ($b_4=0$) de megfigyelhető ($c_4 \neq 0$). Hasonló eredményt ad a C_{co} irányíthatósági és az O_{ob} megfigyelhetőségi mátrix vizsgálata is. A

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & c_2 & 0 & c_4 \end{bmatrix}}_C \underbrace{\begin{bmatrix} s-a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s-a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s-a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s-a_{44} \end{bmatrix}^{-1}}_{sI-A} \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_B = \frac{c_2 b_2}{s-a_{22}} = \frac{y(s)}{u(s)}$$

átviteli függvényből az olvasható le, hogy $W(s)$ az A , B , C , D paramétermátrixok adott értékei mellett csupán az S_{IM} **irányítható és megfigyelhető** részrendszerről tájékoztat. Ha például az $a_{11} = \lambda_1 > 0$ sajátérték miatt a teljes rendszer labilis, ez a tulajdonság az átviteli függvényben nem jelenik meg.

A szabályozási rendszer matematikai modellje

A szabályozási rendszer esetében mind a **folyamatot** (*process, plant*), mint pedig a **szabályozó berendezést**⁵⁸ (*controller, regulator, control algorithm*) egy-egy **linearizált** matematikai **modellel** (rendszeregyenlet, állapotegyenlet vagy átviteli függvény, átviteli mátrix) jellemezhetjük, és ezek felhasználásával tudjuk az *egyensúlyi pont környezetében* lejátszódó jelenségeket tanulmányozni. Minkét alrendszer – és ennek alapján az eredő, zárt hatásláncú visszacsatolt szabályozási rendszer is – a differenciálegyenleteikkel írhatók le, de egyszerűbben tárgyalhatjuk a lineáris szabályozási rendszer alapvető tulajdonságait, ha az alrendszereket a differenciálegyenleteik helyett az **átviteli függvényeikkel** és az ehhez rendelhető hatásvázlattal jellemezzük (lásd a 23. ábrát). A szabályzó berendezés esetében ez az $y_A(s)$ alapértéket (*set point*) valamint az $y(s)$ szabályozott jellemző tényleges értékét (*controlled variable*), mint bemenőjeleket és az $u(s)$ irányító jelet (*control signal*), mint kimenőjelet tartalmazó alrendszert (amikor is $u(s)=W_c(s)[y_A(s)-y(s)]$), a folyamat esetében pedig az $u(s)$ irányító jelet valamint az $u_z(s)$ zavaró jelet (*disturbance, noise*), mint bemenőjeleket és az $y(s)$ szabályozott jellemzőt, mint kimenőjelet tartalmazó alrendszert [ahol is $y(s)=W_p(s)u(s)+W_z(s)u_z(s)$] jelenti. Az alrendszerek az $u(s)$ irányító jel és az $y(s)$ szabályozott jellemző közvetítésével, egymással szoros csatolásban vannak (*negatív visszacsatolású zárt hatáslánc*). A rendszerint magas rendszámú, állandó együtthatójú, lineáris *differenciálegyenlet-rendszerek* helyett az s operátor tartományban *algebrai* egyenletekkel dolgozhatunk, de ennek ára, hogy az állapotváltozók alakulásáról közvetlenül nem tájékozódhatunk, illetve a megoldásokat is az operátor tartományban kapjuk (sok gyakorlati esetben az állapotváltozók ismeretére egyébként nincs is szükség, és az operátor tartományban kapott megoldásokból is több következtetés levonására van lehetőség).



23. ábra A klasszikus, soros kompenzációs, **lineáris** szabályozási rendszer hatásvázlatai

Jelentős gyakorisággal a folyamat $W_p(s)$ és $W_z(s)$ átviteli függvényei *önbeálló, aszimptotikusan stabilis* tagokat definiálnak, aminek jelentése szerint az ugrásszerűen változó $u_0\mathbf{1}(t)$, $u_{z0}\mathbf{1}(t)$ állandó bemenő jelekre olyan $y(t)$ válasz keletkezik, amely $t \rightarrow \infty$ mellett y_0 állandó értékhez tart. A szabályozó tulajdonságai ettől ellentétesen általában *integráló* jellegűek, amit a maradó szabályozási eltérés megszüntetésének követelménye igényel. Ennek jelentősége az, hogy a szabályozó mindaddig változtatja az $u(t)$ jelet, amíg a $h(t)$ hibajel zérussá nem válik. Az *eredő rendszer bemenőjelei* az y_A és u_z jelek (külső jelek, *excitation*), *kimenőjeleknek* pedig *vegyük fel* az üzemtani szempontból lényeges szerepet betöltő y szabályozott jellemzőt, az u irányító jelet és $h=y_A-y$ hibajelet (belső jelek, *internal signals*). A hatásvázlaton szereplő tagok – az összegző tagokat kivéve – mindegyike ugyan **SISO** tag, az eredő rendszert azonban két bemenő jellel (y_A , u_z), három kimenő jellel (y , u , h) rendelkező és a $W_R(s)$ átviteli mátrixal reprezentált **MIMO** tag írja le. A hatásvázlat alapján – a jelek

⁵⁸ Folyamat alatt most a szabályozó $u(t)$ irányító jele és az érzékelő szerv $y(t)$ kimenőjele között hatásirányban elhelyezkedő fizikai rendszereket tekintjük (teljesítményerősítő, helyzetbeállító, végrehajtó szerv, beavatkozó szerv, technológiai folyamat, érzékelő szerv, távadó), a szabályozó berendezést pedig a különbségképző szerv és a szabályozási algoritmust realizáló szabályozó jelenti.

közötti függvénykapcsolatokat az s Laplace operátor tartományban értelmezve – az alrendszerek matematikai modelljei:

$$\begin{aligned} y(s) &= W_p(s)u(s) + W_z(s)u_z(s) \quad (a) \\ u(s) &= W_c(s)h(s) \\ h(s) &= y_A(s) - y(s) \end{aligned}$$

A folyamatot leíró (a) egyenletben a $W_p(s)$ és $W_z(s)$ átviteli függvények azt mutatják, hogy az $y(s)$ szabályozott jellemzőt miként befolyásolja az $u(s)$ irányítójel és az $u_z(s)$ zavarójel, a szabályozási algoritmust reprezentáló $W_c(s)$ pedig azt fejezi ki, hogy az $u(s)$ irányítójel miként függ a $h(s)$ hibajeltől, ami viszont az $y_A(s)$ *alapérték* és az $y(s)$ *tényleges* érték különbsége⁵⁹. Az (a) egyenlet $(\Delta y(s))_N = W_z(s)u_z(s)$ tényezője annak mértékét jelenti, hogy az $u_z(s)$ zavaró jel (nemkívánatosan) *milyen* és *mekkora* befolyást gyakorol az $y(s)$ szabályozott jellemzőre akkor, ha a szabályozó **nem** változtatná meg az $u(s)$ irányító jelet. Ezt a nemkívánatos hatást (az u irányítójel megfelelő mértékben történő szándékolt megváltoztatásával) a szabályozó közömbösíteni igyekszik, és jól méretezett rendszer esetében – legalább is a **stabilis rendszer egyensúlyi állapotában** – a teljes mértékű zavarelhárítást végre is hajtja⁶⁰. A hatásvázlatot felépítő tagokat leíró egyenletek alapján egyszerű algebrai átalakítással kaphatjuk, hogy a *zárt* szabályozás mellett az $y(t)$, $u(t)$ és $h(t)$ belső jelek (pontosabban ezek $y(s)$, $u(s)$ és $h(s)$ Laplace transzformáltjai) miként függnek az $y_A(s)$ és $u_z(s)$ külső gerjesztések transzformáltjaitól. A visszacsatolt eredő rendszer eredő matematikai modelljét – a $W_R(s)$ átviteli mátrix alakjában – is előállíthatjuk.

Megjegyzés

Ha az *alrendszereket* az időtartományban felírható differenciálegyenleteikkel (vagy az ennek megfelelő állapotegyenleteikkel) modelleznénk, az *eredő visszacsatolt rendszer differenciálegyenlet rendszerének meghatározása* és ennek az adott $y_A(t)$ és $u_z(t)$ gerjesztésekre történő időtartománybeli *megoldása* körülményes eljárást igényelne. A Laplace transzformáció alkalmazásának előnye abban mutatkozik meg a legjobban, hogy az s operátor tartományban a *differenciálegyenlet rendszerek* helyett *algebrai egyenletekkel* dolgozhatunk, de ennek ára, hogy a keresett $y(s)$, $u(s)$, $h(s)$ megoldásokat is az s operátor tartományban kapjuk. Az időtartományba való visszatérés eszköze az $y(t) = L^{-1}\{y(s)\}$, $u(t) = L^{-1}\{u(s)\}$, $h(t) = L^{-1}\{h(s)\}$ inverz transzformáció. A rendszeranalízis során az $y_A(t)$ alapértéket és az $u_z(t)$ zavaró jellemzőt rendszerint egységugrás ($1(t) \rightarrow 1/s$), egység sebességugrás ($t \rightarrow 1/s^2$), vagy harmonikus ($\sin(\omega t) \rightarrow \omega/(s^2 + \omega^2)$) determinisztikus vizsgáló jeleknek választjuk. A folyamat alrendszerét leíró $y(s) = W_p(s)u(s) + W_z(s)u_z(s)$ függvénykapcsolatban a $W_p(s)$ és $W_z(s)$ átviteli függvények ismerete kiemelt jelentőségű, mivel ennek alapján lehet számszerűsíteni azt, hogy az u_z zavarójel keltette és az y -ra gyakorolt $W_z(s)u_z(s)$ nemkívánatos hatást az u irányító jel *milyen* és *mekkora* módosításával lehet hatástalanítani. Ha az $u_z(s)$ zavarás a folyamat bemenetén (az u irányító jel hatásvonalán) támadná a zárt hatásláncot, akkor ennek az y szabályozott jellemző hatásvonalára történő egyenértékű áthelyezése esetében $W_z(s) = W_p(s)$ helyettesítést igényelne (ez esetben az u és u_z azonos hatást fejtene ki az y -ra).

⁵⁹ Ne feledkezzünk meg arról, hogy az átviteli függvények lényegüket tekintve egy tetszőleges rendszámú, állandó együtthatójú, lineáris differenciálegyenleteknek (a rendszeregyenleteknek) egy „más alakjai”. A $W_c(s)$ és a $W_p(s)$, $W_z(s)$ átviteli függvények labilis tagokat is definiálhatnak. A rendszeregyenletekben a visszacsatolás azzal jelenik meg, hogy egyrészt a szabályozó $u(s)$ kimenőjele (az irányítójel) befolyásolja a folyamat $y(s)$ kimenőjelét (a szabályozott jellemzőt), másrészt folyamat $y(s)$ kimenőjének szintén befolyása van az $u(t)$ irányítójelre: $y = y(u, u_z)$, $u = u(y, y_A)$. Ezt a struktúrát *egyváltozós rendszernek* is nevezik, ami arra utal, hogy egyetlen $y(t)$ szabályozott jellemzőről, és ennek megfelelően egyetlen $y_A(t)$ alapértékről van szó.

⁶⁰ Ideális körülmények között az u_z zavarás y szabályozott jellemzőre kifejtett $(\Delta y(s))_N = W_z(s)u_z(s)$ nemkívánatos hatását (stabilis $W_p(s)$ és $W_z(s)$ esetében) az u irányító jel $\Delta u(s) = -[W_z(s)/W_p(s)]u_z(s)$ mértékű megváltoztatása tudná hatástalanítani. A zárt hatásláncú szabályozási rendszer létesítésének *egyik* célja, hogy a zavarásnak a szabályozott jellemzőre gyakorolt nemkívánatos hatását mérsékelje, vagy megszüntesse.

Az $y(s)$, $u(s)$, és $h(s)$ belső jelek (mint ahogy az a szabályozási rendszer hatásvázlatából is kiolvasható) az $y_A(s)$ és $u_z(s)$ külső jelek (a gerjesztések) függvényei. Bevezetve a $W_0(s) = W_c(s)W_p(s)$ jelöléssel a „nyitott hurok” eredő átviteli függvényét⁶¹, az operátor tartományban felírt rendszeregyenletek alapján kaphatjuk, hogy:

$$\begin{bmatrix} y(s) \\ u(s) \\ h(s) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{W_0(s)}{1+W_0(s)} & \frac{W_z(s)}{1+W_0(s)} \\ \frac{W_c(s)}{1+W_0(s)} & -\frac{W_z(s)W_c(s)}{1+W_0(s)} \\ \frac{1}{1+W_0(s)} & -\frac{W_z(s)}{1+W_0(s)} \end{bmatrix}}_{W_R(s): \text{átviteli mátrix}} \begin{bmatrix} y_A(s) \\ u_z(s) \end{bmatrix}$$

vagy a $W_0(s)/[1+W_0(s)]$ tényezőt (a zárt rendszer $y_A(s)$ alapértékre vonatkozó $W_R(s) = y(s)/y_A(s)$ eredő átviteli függvényét) kiemelve egy másik alakban:

$$\begin{bmatrix} y(s) \\ u(s) \\ h(s) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{W_0(s)}{1+W_0(s)} & \frac{W_z(s)}{1+W_0(s)} \\ \frac{W_c(s)}{1+W_0(s)} & -\frac{W_z(s)W_c(s)}{1+W_0(s)} \\ \frac{1}{1+W_0(s)} & -\frac{W_z(s)}{1+W_0(s)} \end{bmatrix}}_{W_R(s)} \begin{bmatrix} y_A(s) \\ u_z(s) \end{bmatrix}$$

Ez a képlet szemléletesen és tömören mutatja a *két* bemenő-, és *három* kimenő jelű eredő szabályozási rendszer **MIMO** taggal leírt *átviteli mátrixát*, ezen belül például azt, hogy a *zárt* rendszer matematikai modelljében a szabályozott jellemző *tényleges* $y(s)$ értéke miként függ az $y_A(s)$ alapértéktől (az $y(s)$ *előírt* értékétől) és az $u_z(s)$ zavaró jeltől:

$$\begin{aligned} y(s) &= \frac{W_0(s)}{1+W_0(s)} y_A(s) + \frac{W_z(s)}{1+W_0(s)} u_z(s) = \\ &= \frac{W_0(s)}{1+W_0(s)} \left[y_A(s) + \frac{W_z(s)}{W_0(s)} u_z(s) \right] \end{aligned}$$

Ebben a kifejezésben a $(\Delta y(s))_N = W_z(s)u_z(s)$ tényező mutatja azt, hogy a zavaró jel milyen mértékű befolyást gyakorol a szabályozott jellemzőre *szabályozás nélkül*, illetve hogy ezt a nemkívánatos hatást az aszimptotikusan *stabilis* szabályozás *zárt* hatáslánca

$$\Delta y(s) = \frac{W_z(s)u_z(s)}{1+W_0(s)} = \frac{(\Delta y(s))_N}{1+W_0(s)}$$

mértékben – a $W_0(s)$ nyitott körű átviteli függvény célirányos és megfelelő megválasztása esetében – *csökkenteni* (a rendszer állandósult állapotában *megszüntetni*) képes. Miután $W_0(s) = W_c(s)W_p(s)$, és ebben a szabályozó $W_c(s)$ átviteli függvénye a tervező által szabadon

⁶¹ Pontosabban a nyitott hurok eredő átviteli függvénye (a hatáslánc *negatív* visszacsatolását is figyelembe véve) $-W_c(s)W_p(s)$ lenne, ezért $W_0(s)$ helyesebb definíciója az egymással soros kapcsolást alkotó $W_c(s)$ és $W_p(s)$ átviteli függvényű tagok $W_0(s) = W_c(s)W_p(s)$ eredő átviteli függvénye. A szabályozó rendszertechnikai méretezése a szabályozási algoritmust reprezentáló $W_c(s)$ átviteli függvény meghatározására irányul.

(de a *realizálhatóság* feltételeit betartva) *megválasztható*, a zavarelhárítás mértékére meghatározó befolyásunk lehet. A szabályozás rendszerteknikai *méretezése* is a $W_c(s)$ meghatározására irányul. *Ideális* esetben a szabályozott jellemző tényleges $y(s)$ értéke azonos az $y_A(s)$ alapértékével és *független* az $u_z(s)$ zavaró jeltől, vagyis $y(s)=y_A(s)$. Ez akkor lenne teljesíthető, ha $W_0(s)/[1+W_0(s)]=1$, illetve $W_z(s)/[1+W_0(s)]=0$ lehetne (ideális követés és értéktartás). Ennek megvalósítása $W_0(s)=k=\infty$ értéket igényelne, ami – az alrendszerek fizikailag realizált léte és dinamikus tulajdonságai miatt – nyilvánvalóan **nem** lehetséges⁶². Az aszimptotikusan stabilis szabályozás keretei között – az $i \geq 1$ típuszám⁶³ megfelelő megválasztásával – legfeljebb azt lehet elérni, hogy valamely determinisztikus bemenő jelekre (például az $y_A(t)=y_{A0}1(t)$ valamint $u_z(t)=u_{z0}1(t)$ ugrásjelekre, y_{A0} és u_{z0} állandók) és a rendszer *állandósult állapotára* jöjjön létre az $y(t)_{t \rightarrow \infty}=y(\infty)=y_{A0}$ hibamentes állapot. Ehhez – mint ahogy azt a korábbiakban már részleteztük – az szükséges, hogy a $W_0(s)$ nyitott köri átviteli függvény $i \geq 1$ típuszám mellett (egyszeresen vagy többszörösen) *integráló* tulajdonsággal rendelkezzen⁶⁴ (pl. az önbeálló folyamathoz választott PID szabályozó integráló csatornája a nyitott körnek $i=1$ típuszámot biztosít), valamint a $u_z(s)$ zavaró jel aszimptotikusan stabilis $W_z(s)$ átviteli függvényű tagon keresztül „támadja” a zárt szabályozási hatásláncot.

A szabályozási rendszer tanulmányozása során felmerülő fontosabb kérdések:

- milyen *matematikai modellekkel* írhatók le a szabályozási hatásláncban szereplő fizikai objektumok, milyen tartományokra terjed ki a matematikai modell érvényessége, a paraméterváltozások milyen mértékben érintik ezt az érvényességet (**modellalkotás**),
- a folyamat– és a szabályozó *ismert* matematikai modelljei mellett, célszerűen megválasztott determinisztikus $y_A(t)$, $u_z(t)$ gerjesztésekre a zárt rendszer milyen $y(t)$, $u(t)$, $h(t)$ *válaszokat* ad (**rendszeranalízis** determinisztikus vizsgálo jelekre),
- adott folyamat–, és szabályozó matematikai modellek mellett, $y_{A0}1(t)$, $u_{z0}1(t)$ ugrásalakú determinisztikus gerjesztésekre a zárt rendszer $y(t)$, $u(t)$, $h(t)$ válaszainak $t \rightarrow \infty$ mellett létre jön-e az y_0 , u_0 , h_0 állandósult *egyensúlyi értéke* (**stabilitásvizsgálat**),
- ismert folyamatmodell esetében milyen lehetőség van arra, hogy a folyamat $u(t)$ bemenőjelének *túlvezérlésével* a tranzienseket lerövidítsük, a túlvezérléssel történő gyorsításnak milyen *korlátai* vannak (a tranziensek befolyásolása az irányító jel **túlvezérlésével**),
- használható-e a rendszer analízisére a munkaponti linearizálás, és a méretezésre a vizsgálatok „frekvencia módszere” (a rendszer **linearitási tartományának** vizsgálata),

⁶² A szabályozástechnikus (eljátszva a gondolattal, és mintegy elvi lehetőségként) a szabályozó átviteli függvényét *formálisan* $W_c(s)=k_c/W_p(s)$ szerint is megválaszthatná, és ekkor a nyitott hurok átviteli függvénye: $W_0(s)=W_c(s)W_p(s)=k_c$ lehetne (algebrai hurok). Ekkor $k_c \rightarrow \infty$ mellett az ideális állapot közelíthető meg. Ez azért nem tekinthető reális alternatívának, mert egyrészt $W_p(s)$ pólustöbblete és $\exp(-sT_h)$ holtidős tényezője miatt az $1/W_p(s)$ inverz átviteli függvény (a ritkán előforduló kivételektől eltekintve) általában *nem realizálható*, másrészt az igen nagy k_c átviteli tényező az u irányító jel jelentős *túlvezérlését* is eredményezné. Mindezek miatt a $W_c(s)=G_c(s)/H_c(s)$ megválasztásának általános alapeve, hogy a számlálójában lévő $G_c(s)$ polinom gyökeivel (a $W_c(s)$ z_i zérusaival) kompenzáljuk a $W_p(s)=G_p(s)/H_p(s)$ pólusainak (a $H_p(s)$ p_i gyökeinek) *kopenzálható* (negatív valós résszel rendelkező és a **lassú** tranzienseket eredményező) *részét*, amivel a nyitott kör átviteli függvényét kívánságainknak és *lehetőségeinknek* megfelelően alakíthatjuk (lásd később, a $W_c(s)$ rendszerteknikai méretezését).

⁶³ Típuszám: a felnyitott hurokban lévő ún. szabad (visszacsatolatlan) integrátorok száma, ami egyébként azonos a $W_0(s)$ nyitottköri átviteli függvénynek az s komplex sík *origójában* lévő pólusainak számával.

⁶⁴ Általánosabban: az $y_A(t)$ alapérték (kvázistacioner állapotbeli) hibamentes követéséhez szükséges, hogy az $y_A(s)$ *pólusait* a $W_0(s)$ *pólusai* is tartalmazzák. Ez $W_c(s)$ megfelelő megválasztásával biztosítható (pl. az $y_A(s)=1/s$ (egységugrás), vagy $y_A(s)=1/s^2$ (sebességugrás) jelek hibamentes követéséhez $W_0(s)$ típuszámának $i=1$ -nek, vagy $i=2$ -nek kell lennie, stb.).

- adott folyamatmodell mellett hogyan kell megválasztani a szabályozó matematikai modelljével reprezentált **szabályozási algoritmust**, hogy az eredő **zárt** rendszerben az alapérték **követésére** és a zavaró jeleknek a szabályozott jellemzőre gyakorolt nemkívánatos hatásának mérséklésére (a **zavarelhárításra**) vonatkozó követelmények teljesüljenek (a szabályozó **rendszertechnikai – modell alapú – méretezése**),
- milyen hatása van a folyamat **paraméterváltozásainak** a zárt rendszer statikus és dinamikus tulajdonságaira, a szabályozó paramétereinek üzem közben történő módosításával hogyan lehet a paraméterváltozásokat figyelembe venni (**érzékenység, robosztusság analízise, adaptivitás tervezése**),
- milyen legyen a rendszertechnikailag megtervezett és a szabályozási algoritmust realizáló fizikai objektum (a szabályozó berendezés **hardware** tervezése⁶⁵), stb.?

A zárt szabályozási rendszerrel szemben támasztott stabilitási igény és a megfelelő mértékű **stabilitási tartalék**⁶⁶ kielégítése **alapkövetelmény**. A lineáris, zárt hatásláncú rendszer stabilitásának feltétele, hogy az eredő A_R állapotmátrixának sajátértékeit meghatározó $\det(\lambda I - A_R)$ karakterisztikus polinomjának minden λ_{Ri} gyöke negatív valós résszel rendelkezzen⁶⁷. Vagy ezzel egyenértékűen a $W_0(s) = G_0(s)/H_0(s)$ **nyitott** körű átviteli függvényből képezhető és a **zárt** kör stabilitását meghatározó $H_R(s) = H_0(s) + G_0(s) = 0$ karakterisztikus egyenlet gyökei (a zárt rendszer $W_R(s) = G_R(s)/H_R(s) = G_0(s)/[G_0(s) + H_0(s)]$ eredő átviteli függvényének $p_{Ri} = \lambda_{Ri}$ **pólusai**) negatív valós részüek legyenek (lásd Hurwitz⁶⁸ vagy Nyquist stabilitási kritériumokat és Evans gyökhelygörbe⁶⁹ módszerét).

Az aszimptotikus stabilitás a zárt szabályozási rendszerrel szemben megfogalmazott elsődleges alapkövetelmény, amit akkor is teljesíteni kell, ha a szabályozó vagy a folyamat alrendszerei önmagukban labilis tulajdonsággal rendelkeznek.

A szabályozó alrendszerének vonatkozásában a labilitás rendszerint fennáll, mivel a szabályozó általában **visszacsatolatlan integráló** fokozatot is tartalmaz (pl. **I, PI, PID** szabályozók). Ez azt jelenti, hogy állandó hibajel mellett az integráló fokozatot tartalmazó szabályozó kimenő jele minden határon túlmenően **növekszik**. Ettől eltérően a folyamatok

⁶⁵ A szabályozási rendszerek analízise és szintézise során a folyamat *fizikai* objektumához kell találnunk egy ezt megfelelően leíró *matematikai modellt* (pl. a $W_p(s)$ és $W_z(s)$ átviteli függvényeket), majd ezek, és a zárt rendszerre előírt követelmények ismeretében kell terveznünk egy olyan matematikai modellt (pl. a szabályozó $W_c(s)$ átviteli függvényével reprezentált szabályozási algoritmust), amely a folyamatmodellel „együttműködve” alakítja az eredő rendszermodell tulajdonságait. Ennek a *modellalapú működésnek* az **ellenőrzése** után következhet a modellalkotás *fordított* feladata, nevezetesen a $W_c(s)$ algoritmust megvalósító hardware (pl. egy digitális számítógépen futó program) létrehozása, és ennek a folyamat fizikai objektumával történő együttműködésének kialakítása, valamint a zárthurkú fizikai rendszer beüzemelése és tesztelése.

⁶⁶ A megfelelően megválasztott *stabilitási tartalék* ad biztosítékot arra, hogy a paraméterváltozások egy adott mértéke ne veszélyeztesse a zárt rendszer stabilitását.

⁶⁷ Az állapotegyenleteikkel leírt alrendszerek (szabályozó: A_c, B_c, C_c, D_c , folyamat: A_p, B_p, C_p, D_p valamint A_z, B_z, C_z, D_z) paramétermátrixainak ismeretében az eredő visszacsatolt rendszer A_R, B_R, C_R, D_R paramétermátrixainak meghatározása nehézkes és komplikált mátrixműveleteket igényel.

⁶⁸ A Hurwitz stabilitási kritérium akkor alkalmazható, ha $W_0(s) = G_0(s)/H_0(s)$ algebrai tört, vagyis $\exp(-sT_h)$ transzcendens tényezőt **nem** tartalmaz ($T_h = 0$). Ha az $\exp(-sT_h)$ tényezőt *Pade*, vagy *Strejc* polinomokkal közelítjük, a Hurwitz stabilitási kritériumot holtidős rendszerek stabilitásának vizsgálatára is kiterjeszthetjük.

⁶⁹ A zárt rendszer $G_0(s) + H_0(s) = 0$ karakterisztikus egyenlete p_{Ri} gyökeinek vándorlása a komplex számsíkon valamely paraméter (rendszerint a k körerősítés) függvényében, a szabályozási rendszer *gyökhelygörbéje*. Ha ennek valamelyik ága a képzetes tengelyt metszve a *pozitív valós* részre átmegy, a zárt rendszer labilissá válik.

jelentős részben önbeálló tulajdonsággal rendelkeznek (vagyis aszimptotikusan stabilisak), de általános érvényűnek tekinteni ezt sem lehet.

Megjegyzés

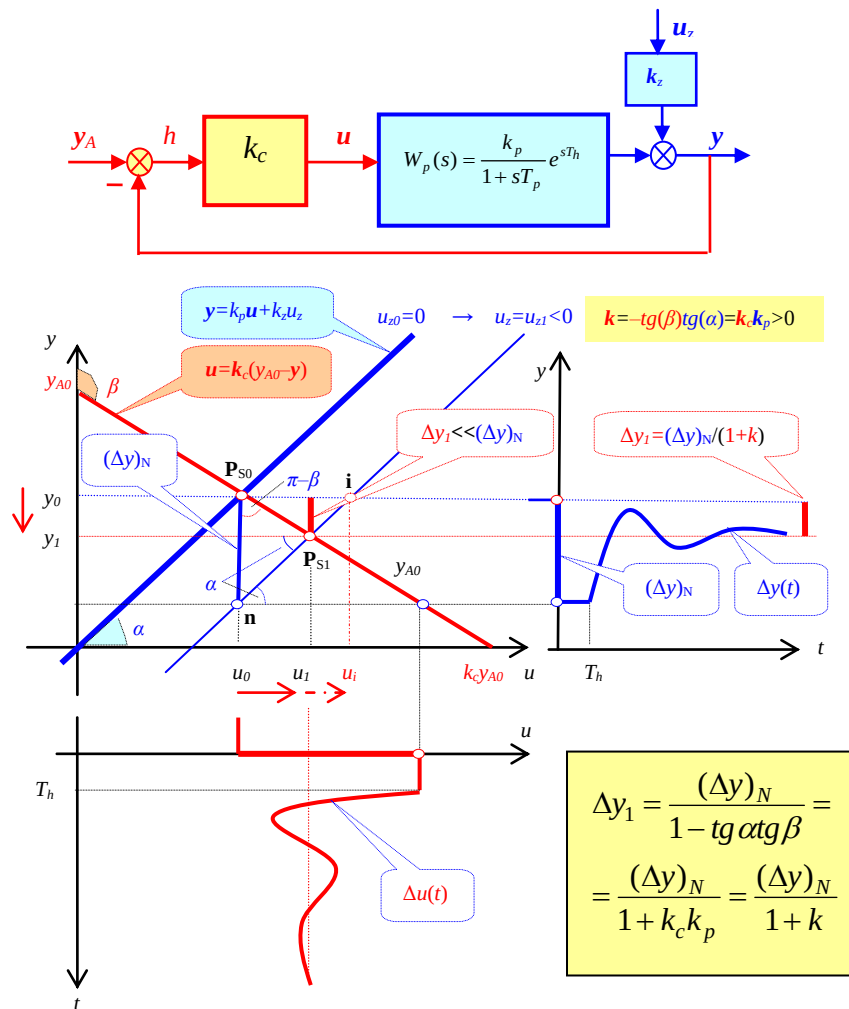
Valamely tetszőleges $y_A(t)$ és $u_z(t)$ determinisztikus vizsgáló jelekre adott $y(t)$, $u(t)$, $h(t)$ válaszokat inverz transzformációval határozhatjuk meg:

$$\begin{bmatrix} y(t) \\ u(t) \\ h(t) \end{bmatrix} = L^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} y(s) \\ u(s) \\ h(s) \end{bmatrix} \right\} = L^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} \frac{W_0(s)}{1+W_0(s)} y_A(s) + \frac{W_z(s)}{1+W_0(s)} u_z(s) \\ \frac{W_c(s)}{1+W_0(s)} y_A(s) - \frac{W_z(s)W_c(s)}{1+W_0(s)} u_z(s) \\ \frac{1}{1+W_0(s)} y_A(s) - \frac{W_z(s)}{1+W_0(s)} u_z(s) \end{bmatrix} \right\}$$

Az itt kijelölt műveletek „kézi” számításokkal történő elvégzése – néhány egyszerű, alacsony rendszámú esettől eltekintve – igencsak fárasztó és hosszadalmas lenne. A **MATLAB** felhasználása azonban az inverz transzformációhoz is jelentős támogatást nyújt. Ha $y_A(t)=y_{A0}\mathbf{1}(t)$ és $u_z(t)=u_{z0}\mathbf{1}(t)$, valamint a zavarójel *stabilis* $W_z(s)$ átviteli függvényű tagon keresztül „támadja” a zárt hatásláncot (lásd 16. ábra), az aszimptotikusan stabilis lineáris zárt rendszer $y(t)$, $u(t)$, $h(t)$ jeleinek $y(\infty)=y_0$, $u(\infty)=u_0$, $h(\infty)=h_0$ egyensúlyi értékei – mellőzve az inverz transzformációval járó nehézkes számításokat – a *Laplace* transzformáció *végérték* tétel alapján is meghatározhatók:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} y(t) \\ u(t) \\ h(t) \end{bmatrix} = \lim_{s \rightarrow 0} \begin{bmatrix} sy(s) \\ su(s) \\ sh(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ u_0 \\ h_0 \end{bmatrix} = \lim_{s \rightarrow 0} \begin{bmatrix} s \frac{W_0(s)}{1+W_0(s)} \frac{y_{A0}}{s} + s \frac{W_z(s)}{1+W_0(s)} \frac{u_{z0}}{s} \\ s \frac{W_c(s)}{1+W_0(s)} \frac{y_{A0}}{s} - s \frac{W_z(s)W_c(s)}{1+W_0(s)} \frac{u_{z0}}{s} \\ s \frac{1}{1+W_0(s)} \frac{y_{A0}}{s} - s \frac{W_z(s)}{1+W_0(s)} \frac{u_{z0}}{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{W_0(0)}{1+W_0(0)} y_{A0} + \frac{W_z(0)}{1+W_0(0)} u_{z0} \\ \frac{W_c(0)}{1+W_0(0)} y_{A0} - \frac{W_z(0)W_c(0)}{1+W_0(0)} u_{z0} \\ \frac{1}{1+W_0(0)} y_{A0} - \frac{W_z(0)}{1+W_0(0)} u_{z0} \end{bmatrix}$$

Egy kizárólag elméleti jelentőségű *idealizált* eset, amikor is $W_p(s)=k_p$, $W_z(s)=k_z$ és $W_c(s)=k_c$, vagyis a folyamat és a szabályozó időkésettetés nélküli arányos (**P**) tagokkal jellemezhetők (a 24. ábra hatásvázlatán szereplő folyamat esetében ez a $T_p=T_h=0$ paramétereknek felelne meg). Ez a memóriamentes hurok a gyakorlatban ugyan **nem** fordul elő, mivel valamilyen mértékben inercia-, illetve holtidős késleltetés mindegyik alrendszerben szükségszerűen jelen van, de a *stabilis* rendszer *statikus viszonyainak* leírására ez a feltételezés felhasználható. Tehát ha a jelátviteli késleltetésektől eltekintünk, és figyelembe vesszük hogy ekkor $W_0(s)=W_c(s)W_p(s)=k_c k_p=k$ a **nyitott kör körerősítése**, a hatásvázlat egy ún. *algebrai hurkot* alkot (a zárt hatásláncban a hatásterjedési sebesség ekkor végtelen nagy). A rendszeregyenletek most algebrai kifejezések, vagyis $y=k_p u+k_z u_z$, $u=k_c h$, illetve $h=y_A-y$. A folyamat és a szabályozó u - y síkon ábrázolható $y=k_p u+k_z u_z$ és $u=k_c(y_A-y)$ statikus jelleggörbéit – paraméternek tekintve az u_{z0} és y_{A0} változókat – a 24. ábrán szemléltettük.

24. ábra A folyamat $y=y(u, u_z)$ és a szabályozó $u=u(y_{A0}, y)$ statikus karakterisztikái

A folyamat statikus karakterisztikája $u_{z0}=0$ mellett az $u \sim y$ sík origóján átmenő, $k_p = \tan(\alpha) > 0$ ($0 < \alpha < \pi/2$) meredekségű egyenes, amely $u_{z1} = \text{állandó}$ mellett önmagával párhuzamosan $k_z u_{z1}$ értékkel tolódik el (a 24. ábra $u_{z1} < 0$ negatív értékére vonatkozik, és a folyamat esetében u a független és y a függő változó). A szabályozó berendezés statikus jelleggörbéje $-k_c = \tan(\beta)$ ($\pi/2 < \beta < \pi$, $\tan(\beta) < 0$) negatív meredekségű, y_{A0} -ban paraméterezett egyenes, amely y_{A0} és $k_c y_{A0}$ helyeken metszi az y és u koordináta tengelyeket. A rendszer y_{A0} alapérték és $u_{z0}=0$ zavaró jel mellett az $u \sim y$ sík (u_0, y_0) koordinátájú P_{S0} pontjában (ahol is az $y = k_p u + k_z u_{z0} = k_p u$ és $u = k_c (y_{A0} - y)$ karakterisztikák **metszik** egymást) egyensúlyi helyzetben van. Ha a zavarójel ugrásszerűen $u_{z0}=0$ -ról $u_z = u_{z1} < 0$ értékre változik, az új egyensúlyi pont az (u_1, y_1) koordinátájú P_{S1} helyen (ahol is az $y = k_p u + k_z u_{z1}$ és $u = k_c (y_{A0} - y)$ karakterisztikák **metszik** egymást) jön létre, vagyis az u_{z1} hatására az y szabályozott jellemző y_0 -ról y_1 -re csökken ($u_{z1} < 0$!). Ez a szabályozás nélküli $(\Delta y)_N$ változástól lényegesen kisebb is lehet (ha *nem* lenne szabályozás, vagyis az u_{z1} zavarás fellépésének ellenére az u_0 irányító jel változatlan maradna, a munkapont az **n** jelű pontban jönne létre). Az y megváltozásának Δy_1 mértékére a szabályozó $-k_c = \tan(\beta)$ meredekségének alapvető befolyása van, mivel $\beta \rightarrow \pi/2$ mellett $k_c \rightarrow \infty$ és $\Delta y_1 \rightarrow 0$. Mindezek a tulajdonságok a zárt szabályozás y szabályozott jellemzőjének, az u irányító jelének és a h hibajelének az y_{A0} alapértéktől és az u_z zavarójeltől való függését meghatározó – és a rendszeregyenletekből felírható – függvénykapcsolatokból is kiolvasható. Az y_{A0} és $u_{z0}=0$ gerjesztésekhez tartozó belső jelek y_0 , u_0 , h_0 egyensúlyi értékei:

$$\begin{bmatrix} y(t) \\ u(t) \\ h(t) \end{bmatrix} = \frac{k}{1+k} \begin{bmatrix} 1 & \frac{k_z}{k} \\ \frac{1}{k_p} & -\frac{k_z}{k_p} \\ \frac{1}{k} & -\frac{k_z}{k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_A(t) \\ u_z(t) \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} y_0(y_{A0}, u_{z0}) &= \frac{k}{1+k} (y_{A0} + \frac{k_z}{k} u_{z0}) = \frac{k}{1+k} y_{A0} \\ u_0(y_{A0}, u_{z0}) &= \frac{k}{1+k} (\frac{1}{k_p} y_{A0} - \frac{k_z}{k_p} u_{z0}) = \frac{k_c}{1+k} y_{A0} \\ h_0(y_{A0}, u_{z0}) &= \frac{k}{1+k} (\frac{1}{k} y_{A0} - \frac{k_z}{k} u_{z0}) = \frac{1}{1+k} y_{A0} \end{aligned}$$

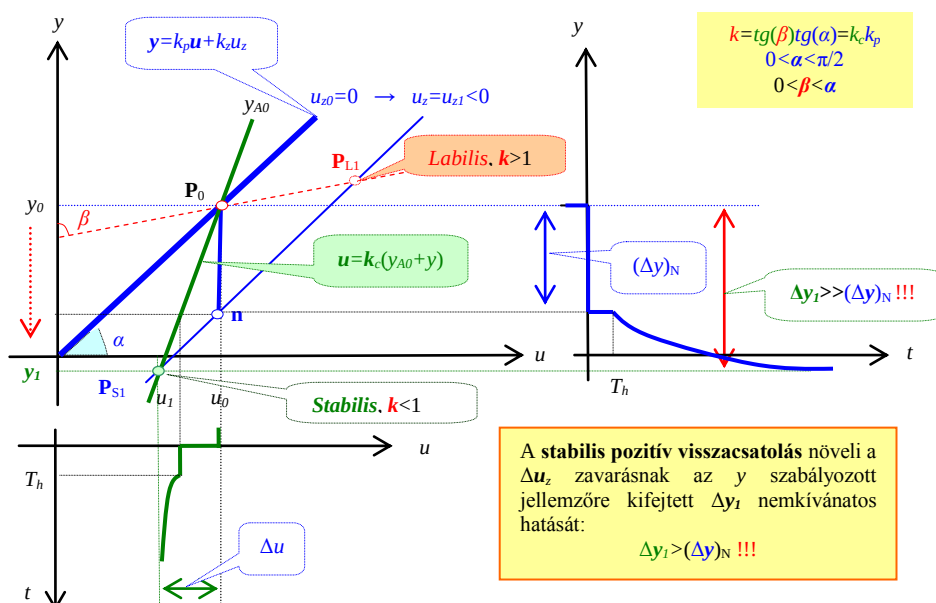
Az ilyen szabályozást – utalva a hatásláncban szereplő, késleltetés nélküli arányos tagokra – arányos (0–típusú) szabályozásnak hívjuk. Jellemző tulajdonsága, hogy a $k=k_c k_p > 0$ körerősítés a k_c átviteli tényezővel tetszőleges $0 < k < \infty$ értékre beállítható. Az y kifejezése és a 24. ábra szemléletesen mutatja, hogy k növelésével y egyre kevésbé függ a zavaró jeltől, és elméleti határesetként $k \rightarrow \infty$ mellett $k/(1+k) \rightarrow 1$, $k_z/k \rightarrow 0$, és ezért $y_0 \rightarrow y_{A0}$, $u_0 \rightarrow y_{A0}/k_p$, $h_0 \rightarrow 0$. A **negatív visszacsatolású** ($0 < \alpha < \pi/2$, $\tan(\alpha) > 0$, $\pi/2 < \beta < \pi$, $\tan(\beta) < 0 \rightarrow \tan(\alpha)\tan(\beta) < 0$!) **arányos szabályozás zárt szabályozási hatáslánca** a $k=k_c k_p = -\tan(\alpha)\tan(\beta)$ **körerősítés** növelésével (vagyis ha $\beta \rightarrow \pi/2$) a zavarás hatását jelentős mértékben mérsékelni képes: $\Delta y_1 = k_z u_{z1}/(1+k) = (\Delta y)_N/(1+k)$. Ez a tulajdonság az arányos szabályozás körerősítésének növelésére – ami a szabályozó k_c átviteli tényezőjének növelésével (ismételten hangsúlyozva $\beta \rightarrow \pi/2$ mellett) érhető el – inspirálhatja a tervezőt.

Mivel a valóságban mindkét alrendszerben (de elsősorban a **folyamatban**) a **jelkésleltetések** is jelen vannak, a körerősítés növelése a zárt rendszer labilitásra való hajlamát is fokozza, vagy esetlegesen magát a **labilitását** is előidézheti. Ezért k megválasztásának a stabilitás követelményei **korlátot** szabnak. Folyamatszabályozásokban az arányos szabályozás $k \approx 50$ körerősítése már igen jó adatnak értékelhető, mivel ez a zavarás hatását a szabályozás nélküli $(\Delta y)_N$ érték 51-ed részére lenne képes lecsökkenteni. Itt jegyezzük meg, hogy abban az esetben, ha a folyamatot a $W_p(s) = k_p$ átviteli tényezőjű időkésleltetés nélküli arányos tag helyett pl. a $W_p(s) = k_p/(1+sT_p)^3$ átviteli függvényű önbeálló tag modelleznél, $k_{krt} \geq 8$ hurokerősítés mellett – a $T_p > 0$ bármekkora értéke esetében – a rendszer **labilis** lenne, és stabilis egyensúlyi pontok $k \geq k_{krt} = 8$ esetében **nem** is tudnának kialakulni, vagy hasonlóan a $W_p(s) = k_p \exp(-sT_h)/(1+sT_p)$ átviteli függvényű önbeálló folyamat mellett a k_{krt} stabilitási határhelyzetet a folyamat T_h/T_p viszonyszáma határozná meg⁷⁰. Ez utóbbi esetben és $T_h/T_p = 1$ viszonyszám mellett a kritikus körerősítés $k_{krt} \approx 1.9$.

Az algebrai hurokban ($T_p = T_h = 0$ mellett) a Δu_z által kiváltott hatásterjedés végtelenül gyorsan jön létre, a rendszer a **P_{S0}** stabilis egyensúlyi pontjából **azonnal** a **P_{S1}** stabilis pontjába kerülne. A valóságban azonban ez az átmeneti folyamat – az időállandók és a holtidő $T_p > 0$, $T_h > 0$ jelenléte miatt, de egyébként **stabilis** rendszert feltételezve – nem történhet meg zérus idő alatt, a **P_{S0}** pontból a **P_{S1}** pontba történő átmenet egy tranziens folyamat $t \rightarrow \infty$ melletti határértékeként jöhet létre. Megfelelően megválasztott szabályozó esetében ezek a határértékek léteznek, ekkor a zárt rendszer **aszimptotikusan stabilis**. A 24. ábrán az $y(t)$ szabályozott jellemzőnek és az $u(t)$ irányító jelnek egy lehetséges időbeli grafikonját is feltüntettük, a késleltetések hasonló tranzienseket okoznak a $h(t)$ hibajelben is. Ha azonban a körerősítés értéke $\beta \rightarrow \pi/2$ következményeként egy $k \geq k_{krt}$ kritikus értéket meghaladna, a rendszer egyensúlyi helyzete nem tudna kialakulni. Ilyen esetben labilis rendszerről lenne szó, ami a szabályozási feladatok ellátására nyilvánvalóan alkalmatlan, és a lengési amplitúdók minden határon túl történő növekedése miatt **veszélyhelyzet** is létrejöhetne. A tárgyalt – algebrai hurkot feltételező eset – abban az értelemben is **idealizált**, hogy a valóságban a **folyamatok** nemlineárisak, vagyis az $y = k_p u + k_z u_z$ lineáris függvénykapcsolat általában egy $y = y(u, u_z)$ nemlineáris függvény linearizálásának eredménye. A szabályozó rendszertechnikai tervezésének egyébként éppen az a célja, hogy az ismert folyamatmodell alapján olyan szabályozási algoritmust realizáljunk, amely az alrendszerek dinamikus tulajdonsága mellett is az idealizált (gyors és hibamentes) viszonyok **megközelítését** célozza.

A szabályozó **$u = k_c(y_A - y)$** statikus karakterisztikájának értelmezésekor **független** változó (a **bemenőjel**) az y szabályozott jellemző, a **függő** változó (a **kimenőjel**) az u irányító jel, vagyis az y bemenőjel befolyásolja az u kimenő jelet. Ezért a $\beta = \pi/2$ egy elfajuló ($k_c = \pm \infty$) eset lenne, ami csak egy szakadásos függvény realizálhatna. (Az arányos szabályozó statikus karakterisztikájának $\tan(\beta)$ meredeksége negatív, és $|1/\tan(\beta)|$ reciproka a **statizmus**. Ennek alacsony értéke növeli a rendszer lengési hajlamát). A szabályozó esetében a $0 < \beta < \pi/2$ tulajdonságú karakterisztika ugyan megvalósítható lenne, de ez **pozitív** meredekségű statikus karakterisztikát jelentene. Ennek alkalmazása nem lehetséges, mert a zárt hurok **pozitív** visszacsatolása miatt a zavarellhárítás és a stabilitás követelményének **nem felel meg** (lásd 25. ábra). A **P_{S1}** pontban kialakuló egyensúlyi helyzetben a zavarásnak az y kimenőjelre való hatása – a visszacsatolás nélküli állapothoz képest – rosszabb helyzetet okozna, mivel $\Delta y_1 \gg (\Delta y)_N$ lenne. Mindebből is az következik, hogy a pozitív visszacsatolás a szabályozás alapfeladatának ellátására nem alkalmas.

⁷⁰ $W_0(s) = k \exp(-sT_h)/(1+sT_p)$ nyitott hurok mellett a zárt hurok karakterisztikus egyenlete $(1+sT_p) + k \exp(-sT_h) = 0$. A stabilitás határát jelentő k_{krt} kritikus körerősítés meghatározása a Nyquist stabilitási kritérium alapján lehetséges.



25. ábra A stabilis, pozitív visszacsatolású hurok tulajdonságai

A 24. ábrán bemutatott eredményekből az is látszik, hogy az $u_z=0$ értékről $u_{z1}<0$ értékre változó zavarás felléptének hatására a zárt rendszer a P_0 egyensúlyi pontjából a P_{s1} egyensúlyi pontjába „megy át”, és mindeközben a szabályozott jellemző y_0 -ról y_1 -re csökken, és az u irányító jel (mintegy kompenzálva a zavarás y -ra kifejtett hatásának egy részét) u_0 -ról u_1 -re növekszik meg. Elvileg annak sem lenne akadálya, hogy az irányító jelet u_1 helyett $u_i > u_1$ -re növeljük (ha kézi irányítás mellett egy gépkezelő végezné a szabályozást, Ő egyébként ezt is tenné), mivel ekkor teljes mértékű zavarelhárítás valósulhatna meg, és az új egyensúlyi pont az i -vel jelölt helyen jöhetne létre. Az arányos szabályozás ezt az üzemmódot nem teszi lehetővé (mert az egyensúlyi helyzetek kizárólag a statikus karakterisztikák metszéspontjainak megfelelő koordináták mellett jöhetnek csak létre). De ha a szabályozó **integráló** tulajdonsággal rendelkezne (pl. a $h = y_A - y$ hibajel az u irányító jelet nem a vele arányos $u = k_c h$ függvénykapcsolatnak, hanem az $u(t) = k_i \int h(t) dt$ integrálegyenletnek megfelelő függvénykapcsolat szerint a h hibajel integráljaként állítaná elő), a szabályozó képes mindaddig változtatni az u irányító jelet, amíg a $h = y_A - y$ hibajel zérussá nem válik. Ez viszont akkor következik be, ha $y = y_A$, bármekkora is az állandó zavarójel értéke. Ilyen esetben (algebrai hurok nélküli) **integrálszabályozásról** van szó.

A szabályozó rendszertechnikai méretezése

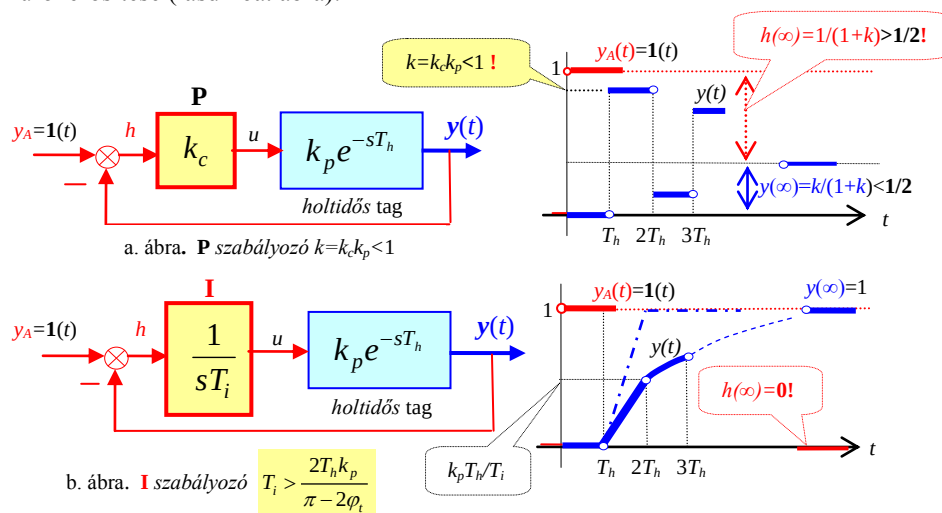
A szabályozás **rendszertechnikai méretezésének** során az ismert dinamikus tulajdonságokkal rendelkező és a $W_p(s)$ átviteli függvényével leírt folyamathoz olyan, $W_c(s)$ átviteli függvénnyel jellemzett szabályozási algoritmust kell meghatározni, amelynek alkalmazásával a zárt rendszerre megfogalmazott követelmények, minőségi előírások teljesülnek. Ezeket a követelményeket rendszerint a zárt szabályozás $y_A(t) = \mathbf{1}(t)$ alapértékre vonatkozó eredő $y(t) = v_R(t)$ átmeneti függvénye alapján, vagy a $W_R(s) = W_0(s) / [1 + W_0(s)]$ alapjelre vonatkozó eredő átviteli függvény⁷¹ $p_{Ri} < 0$ domináns pólusainak eloszlására vonatkozó előírások teljesítése szerint fogalmazhatjuk meg. (Ne feledkezzünk meg arról, hogy a zárt rendszer átmeneti függvénye $v_R(t) = L^{-1}\{W_R(s)/s\}$ és $W_R(s)$ domináns p_{Ri} pólusai határozzák meg a $v_R(t)$ időbeli lefolyását). Általános követelmény, hogy a zárt szabályozási rendszer $y(t)$ szabályozott jellemzőjének a lehető legkisebb $h(t)$ hibával kell követnie az $u_a(t)$ alapjellel definiált $y_A(t)$ alapértéket (**követés**), és a lehető legnagyobb mértékben és gyorsan kell

⁷¹ A zárt rendszer $W_R(s) = W_0(s) / [1 + W_0(s)] = y(s) / y_A(s)$ szabályozott jellemzőre vonatkozó eredő átviteli függvényét kiegészítő érzékenységi függvénynek, az $E(s) = 1 / [1 + W_0(s)] = h(s) / y_A(s)$ hibajelre vonatkozó eredő átviteli függvényét érzékenységi függvénynek is nevezik. Jellegzetes tulajdonságuk, hogy $W_R(s) + E(s) = W_0(s) / [1 + W_0(s)] + 1 / [1 + W_0(s)] = 1$.

elhárítani az $u_z(t)$ zavaró jellemzőnek a szabályozott jellemzőre gyakorolt *nemkívánatos* hatását (**zavarelhárítás**). Egy más – ritkábban alkalmazott – lehetséges méretezési eljárás olyan kritériumokat tartalmaz, amelyek teljesítésével egy $J[x(t),u(t)]$, vagy $J[y(t),u(t)]$ költségfüggvény *minimalizálása* a célkitűzés (**LQR** szabályozás, $x(t)$ a folyamat állapotvektora, $u(t)$ a folyamat bemenő – irányító – jele). **Bármilyen követelmény teljesítése is az előírás, ezek azáltal valósulhatnak meg, hogy a folyamat $u(t)$ irányító (bemenő) jelét – a célszerűen megválasztott szabályozási algoritmus segítségével – a kívánalmaknak megfelelő célok elérése szerint tervezzük.** A folyamat tulajdonságainak alapvető sajátossága, hogy az irányító jellel létesített beavatkozás hatása a szabályozott jellemzőben inercia (jellemzői a tehetetlenséget kifejező $T_{pi}>0$ időállandók)–, és a jelterjedés véges sebessége miatti (jellemzője a $T_h>0$ holtidő) *késleltetéssel* juthat érvényre. Az inercia típusú késleltetések az $u(t)$ irányítójel egy *megengedett mértékű*, és adott ideig tartó *túlvezérlésével csökkenthetők*, a **holtidő** okozta késleltetés azonban semmilyen szabályozástechnikai eljárással **nem befolyásolható**. A szabályozó tervezőjének számára a folyamat holtideje egyébként is egy igencsak kellemetlen és nemkívánatos tulajdonság, miután az u irányító jel megváltoztatásának hatására a folyamat kimenetén T_h ideig „nem történik semmi”, ami az u irányító jel megtervezésében és a rendszer stabilitásának biztosításában komoly gondokat okoz.

Megjegyzés

Gondoljunk arra az igen egyszerű szabályozási struktúrára, mikor is a felnyitott kör átviteli függvénye a $k=k_c k_p > 0$ átviteli tényezőjű, ideális holtidős tag, vagyis $W_0(s) = k \exp(-sT_h)$, és k az $i=0$ típusszámú *arányos* szabályozás hurokerősítése (lásd 26a. ábra).

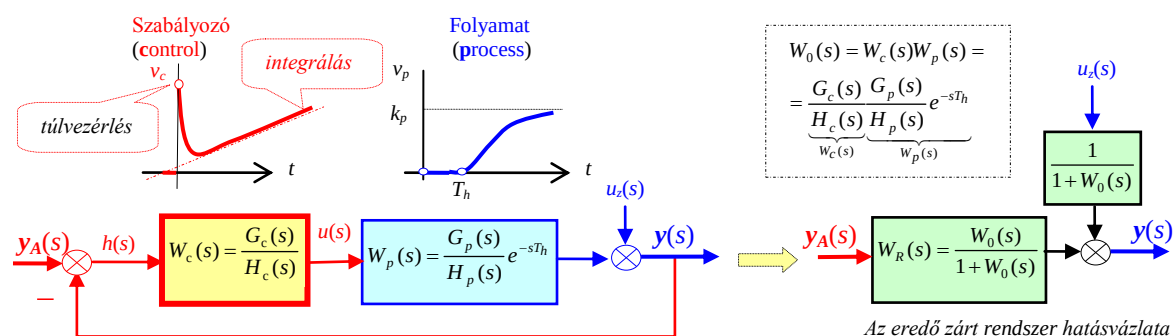


26. ábra Holtidős folyamat szabályozása **P** és **I** szabályozóval

A 26a. ábra alapján egy gondolat kísérettel könnyen belátható, hogy ez a szabályozási rendszer $k_{krt} \geq 1$ hurokerősítés esetében *labilis*, bármekkora is a $T_h > 0$ holtidő értéke. Ez azt jelenti, hogy az olyan folyamat, amelynek inercia típusú időállandói a holtidőhöz képest elhanyagolhatóak, arányos (**P**) szabályozóval gyakorlatilag nem szabályozhatók. Ekkor ugyanis a zavaró jelnek a szabályozott jellemzőre gyakorolt $\Delta y = (\Delta y)_N / (1 + k_{meg})$ állandósult állapotbeli hatása – a megengedett körerősítés $k_{meg} \approx k_{krt} / 2 = 1/2$ alacsony értéke miatt – alig mérsékelhető [$\Delta y = (\Delta y)_N / (1 + 1/2) = 2(\Delta y)_N / 3$]. Ilyen esetben az integráló (**I**) szabályozó alkalmazása a célravezető, mivel a T_i integrálási idő *megfelelően nagy* értékű beállítása mellett ez a szabályozó a hibajel felléptének hatására képes „lassú adagolással” változtatni az u irányító jelet, és ebből kifolyólag biztosítani a rendszer stabilitását és az állandósult állapotbeli *teljes mértékű* zavarelhárítást (lásd 26b. ábra). Az **I** szabályozó – mint már korábban is láttuk – mindaddig változtatja az $u(t)$ irányító jelet, amíg a $h(t) = y_{A0} 1(t) - y(t)$ bemenőjele (a hibajel) zérus értéket nem vesz fel, ami $y(t)_{t \rightarrow \infty} = y_{A0}$ mellett jöhet csak létre. Figyeljük meg, hogy $T_i = k_p T_h$ választás mellett az y szabályozott jellemző $2T_h$ idő alatt az $y(2T_h) = y_A = 1$ *végértékére* áll be, de ha a T_i integrálási idő $T_i \leq 2k_p T_h / \pi$ érték, ez a rendszer is *labilissá* válik.

A rendszerteknikai méretezés frekvencia módszere

A **zárt** szabályozási hurokban az $y_A(t)$ *előírt*-, és a folyamat $y(t)$ *tényleges* értékeinek $h(t)=y_A(t)-y(t)$ különbsége (a hibajel) generálja az $u(t)$ irányító jelet. Ennek segítségével kell elérni a **zárt** szabályozási rendszer olyan tulajdonságait, amely biztosítja a rendszer aszimptotikus *stabilitását*, a stacionárius vagy a kvázistacionárius *hiba zérus* értékét, valamint azt a tulajdonságot, hogy az alapjel illetve a zavarójel változásakor a tranziens folyamatok időtartamai lehetőleg *gyorsan* a zérushoz tartsanak. Például az $y_A(t)=y_{A0}\mathbf{1}(t)$ állandó alapérték esetében (az értéktartó szabályozásoknál, amikor is az elsődleges feladat a zavarelhárítás) követelmény, hogy az $y(t)$ szabályozott jellemző lehetőleg *rövid idő alatt* vegye fel az alapértéknek megfelelő $y(\infty)=y_{A0}$ állandósult értékét, vagyis egyensúlyi helyzetben a hibajel – az állandó u_{z0} zavarójel értékétől függetlenül – legyen *zérus*. Ennek eléréséhez az irányító jel megfelelő mértékű **túlvezérlését** kell létrehozni, valamint a szabályozónak **integráló** fokozatot kell tartalmaznia. A túlvezérléssel biztosítható, hogy a tranziensek gyorsan „lecsengjenek”, az integráló fokozat azt teszi lehetővé, hogy a *zérus hibajel is fenn tudjon tartani egy állandó értékű u_0 irányító jelet* (a szabályozó mindaddig „dolgozik”, amíg a hibajel *zérus* nem lesz). A tananyagban tárgyalt különféle szabályozási struktúrák leggyakrabban előforduló, és ezért meghatározó jelentőségű típusa a *soros kompenzáció*⁷² tartalmazó zárthurkú hatáslánc (lásd 27. ábra). Ennek alapvető sajátossága, hogy a folyamattal soros kapcsolást alkotó szabályozó tulajdonságaival úgy alakítjuk a $W_0(s)=W_c(s)W_p(s)$ nyitott körű eredő átviteli függvényt, hogy a $W_R(s)=W_0(s)/[1+W_0(s)]$ átviteli függvényvel definiált zárt rendszerre megfogalmazott követelmények teljesüljenek.



27. ábra Soros kompenzáció hatásvázlata

Ebben a struktúrában $W_c(s)=G_c(s)/H_c(s)$ a lineáris szabályozási algoritmust megjelenítő átviteli függvény, a $W_p(s)=G_p(s)\exp(-sT_h)/H_p(s)$ a tágabban értelmezett (a hatáslánc u irányító jele és az ellenőrző jel közötti részét tartalmazó) folyamat munkapontra linearizált átviteli függvénye. A $G_c(s)$, $H_c(s)$, $G_p(s)$, $H_p(s)$ tényezők az s komplex operátor *polinomjai*, a folyamat átviteli függvényének $\exp(-sT_h)$ transzcendens tényezője a *holtidő* okozta késleltetést szimbolizálja⁷³. A $W_c(s)$, $W_p(s)$ és $W_0(s)$ átviteli függvényeknek nagy gyakorisággal előforduló *tipikus* kifejezései:

⁷² A *kompenzáció* kifejezése arra utalás, hogy a szabályozó átviteli függvényének számlálójában lévő $G_c(s)$ polinom gyökeivel (a $W_c(s)$ zérusaival) közömbösítjük (zérus-pólus egyszerűsítéssel *kiejtjük*) a folyamat $H_p(s)$ polinomjának gyökeivel (a $W_p(s)$ *negatív valós részü* pólusaival) reprezentált inercia típusú időkéseleltetések egy részét.

⁷³ A szabályozó $W_c(s)$ átviteli függvényének méretezése szempontjából feltételezhetjük, hogy a zavaró jel $W_z(s)=1$ átviteli függvényen keresztül a szabályozott jellemző hatásvonalán „támadja” a zárt szabályozási hatásláncot. A folyamat $\exp(-sT_h)$ holtidős tényezője miatt a zárt rendszer $W_R(s)=W_0(s)/[1+W_0(s)]$ eredő átviteli függvénye transzcendens kifejezés is lehet.

$$W_p(s) = \frac{G_p(s)}{H_p(s)} e^{-sT_h} \cong \frac{k_p}{(1+sT_{p1})(1+sT_{p2})} e^{-sT_h}$$

$$W_c(s) = \frac{G_c(s)}{H_c(s)} = K_c \underbrace{\left(1 + \frac{1}{sT_I} + \frac{sT_D}{1+sT}\right)}_{\text{PID}} = k_c \underbrace{\left(\frac{1+sT_i}{sT_i}\right)}_{\text{PI}} \underbrace{\left(\frac{1+sT_d}{1+sT}\right)}_{\text{PD}}$$

$$W_0(s) = W_c(s)W_p(s) = k_c \frac{(1+sT_i)(1+sT_d)}{sT_i(1+sT)} \frac{k_p}{(1+sT_{p1})(1+sT_{p2})} e^{-sT_h}$$

($W_p(s)$: kéttárolós, holtidős, *önbeálló* folyamat, $k_p > 0$ átviteli tényező, $T_{p1} > T_{p2} > 0$ időállandók, $T_h > 0$ holtidő, $W_c(s)$: **PID**, vagy **PIPD** szabályozó, $K_c, k_c > 0$ átviteli tényezők, T_I, T_i integrálási-, T_D, T_d differenciálási idők, T a **PD** fokozat időállandója, és $T_i > T_d > T > 0$). A szabályozó rendszertechnikai méretezését – a k_c, T_i, T_d és T paraméterek meghatározását – a **PIPD** időállandós normálalakjának⁷⁴ alapján lehetett egyszerűen végrehajtani, felhasználva a nyitott kör $W_0(j\omega) = W_c(j\omega)W_p(j\omega)$ frekvencia függvényére alapozott un. „**frekvencia módszer**” eljárását⁷⁵.

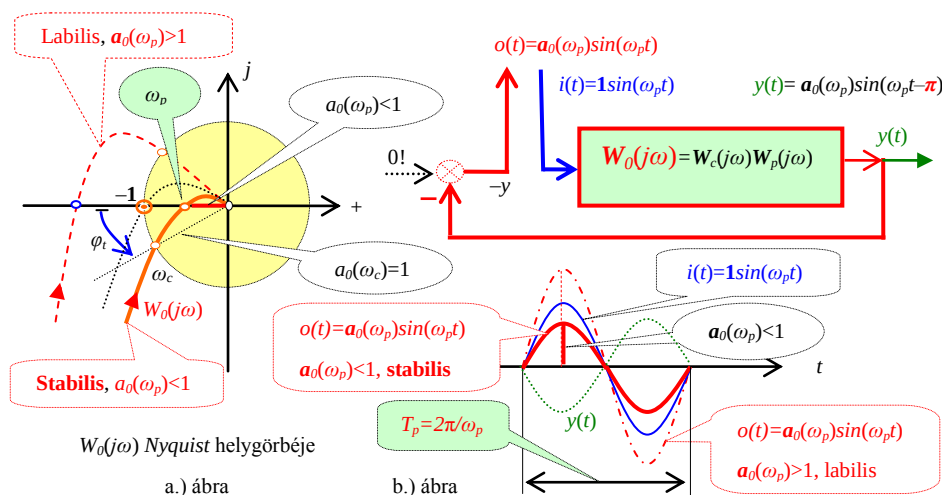
Megjegyzés

A szabályozó $W_c(s)$ átviteli függvényének rendszertechnikai méretezése a *Nyquist stabilitási kritériumon* alapszik. Ennek elvi lényege, hogy stabilis, vagy legfeljebb az origóban lévő pólust (integráló tulajdonságot megjelenítő tényezőt) tartalmazó $W_0(s)_{s=j\omega} = W_0(j\omega) = W_c(j\omega)W_p(j\omega) = a_0(\omega)\exp[j\varphi_0(\omega)]$ **nyitott kör**i frekvencia függvény alapján dönthető el a $W_R(s) = W_0(s)/[1+W_0(s)]$ átviteli függvényű **zárt rendszer** aszimptotikus stabilitása ($a_0(\omega) = \text{abs}W_0(j\omega)$, $\varphi_0(\omega) = \text{arc}W_0(j\omega)$ a $W_0(j\omega)$ frekvencia függvény amplitúdó menete és fázismenete). *E kritérium szerint stabilis a zárt szabályozási rendszer, ha a nyitott kör $W_0(j\omega)$ frekvenciafüggvényének helygörbéje (a Nyquist diagramja) – miközben a ω körfrekvencia befutja a $0 < \omega < \infty$ intervallumot – nem fogja körül a komplex számsík $-1+j0$ pontját* (egyszerűsített Nyquist stabilitási kritérium⁷⁶, lásd 28. ábrát). Ez – mellőzve a komplikált matematikai levezetéseket – igen egyszerűen belátható. A $W_0(j\omega)$ frekvencia függvény ugyanis azt mutatja meg, hogy a stabilis nyitott kör bemenetére kapcsolt $i(t) = 1\sin(\omega t)$ egységnyi amplitúdójú, ω körfrekvenciájú, harmonikus bemenőjelre, kvázistacioner állapotban, a $W_0(s)$ átviteli függvényű tag $y(t)$ kimenetén olyan $y(t) = a_0(\omega)\sin[\omega t + \varphi_0(\omega)]$ harmonikus kimenőjel válasz keletkezik, amelynek ω körfrekvenciája azonos a bemenőjel körfrekvenciájával, amplitúdója $a_0(\omega) = \text{abs}W_0(j\omega)$, és a bemenőjelhez képesti fáziseltolása $\varphi_0(\omega) = \text{arc}W_0(j\omega)$. A $W_0(j\omega)$ frekvenciafüggvény ábrán történő megjelenítésére a komplex síkon ábrázolt Nyquist helygörbe (lásd 28a. ábra) vagy a Bode diagramok szolgálnak.

⁷⁴ A **PIPD** (lényegében gyöktényezős alakú) átviteli függvény k_c, T_i, T_d, T paraméterei a **PID** (párhuzamos kapcsolásnak megfelelő alak) átviteli függvény K_c, T_I, T_D, T paramétereire átszámíthatók.

⁷⁵ A „frekvencia módszer” Nyquist és Bode tételein alapszik. Lényege, hogy a **zárt** szabályozási rendszer eredő $v_R(t)$ átmeneti függvényének Δv_{Rmax} **túllövését** a **felnyitott** kör $W_0(j\omega)$ frekvenciafüggvényének $\varphi_c(\omega_c)$ **fázistöbblete** szabja meg (ha $\varphi_c(\omega_c) = \pi + \text{arc}W_0(j\omega_c) \approx \pi/3$ (60°), akkor $\Delta v_{Rmax} \leq 0.1$). A $\varphi_c(\omega_c) > 0$ fázistöbbletre vonatkozó *méretezési előírás* betartásával a zárt rendszer stabilitása mellett a $v_R(t)$ átmeneti függvény túllendülése is „kézen tartható”.

⁷⁶ A Nyquist kritérium – a komplex függvénytan argumentum elve alapján – *labilis nyitott kör*i átviteli függvényekkel rendelkező szabályozásokra is kiterjeszthető (általános Nyquist stabilitási kritérium). Ennek részleteivel a megelőző fejezetekben foglalkoztunk.



28. ábra Az egyszerűsített Nyquist stabilitási kritérium szemléltetése

A nyitott kör – $W_0(j\omega) = a_0(\omega) \exp[j\varphi_0(\omega)]$ frekvencia függvény által leírt – frekvencia-átviteli tulajdonságaira az *aluláteresztő szűrő* jelleg (a nagyfrekvenciás harmonikus jelek elnyomása) érvényes, ezért a $W_0(j\omega)$ helygörbe $\omega \rightarrow \infty$ mellett a komplex sík origójába tart, és így általában $a_0(\omega) \rightarrow 0$ és $\varphi_0(\omega) \rightarrow -\infty$. Mindezekből az is következik, hogy az ω körfrekvenciának van olyan ω_p értéke, amikor a $W_0(j\omega)$ frekvencia függvényű önbeálló tag $y(t)$ kimenő jele az $i(t)$ bemenő jelhez képest $-\pi$ szöggel (-180 fokkal) *késik*, vagyis a $i(t)$ bemenő jellel *ellenfázisban* van, és amplitúdója $a_0(\omega_p)$ (lásd 28b. ábra). Ezt az $y(t)$ jelet a különbségképzés önmagához képest ismételtelen ellenfázisúvá fordítja ($o = -y$), vagyis a nyitott kör kimenetén az $i(t) = 1 \sin(\omega_p t)$ bemenőjellel **azonos fázisban** lévő, $a_0(\omega_p)$ amplitúdóval rendelkező $o(t) = a_0(\omega_p) \sin(\omega_p t)$ harmonikus jel keletkezik. A stabilitás szempontjából az $a_0(\omega_p)$ amplitúdónak meghatározó szerepe van. (A 28a. ábra mutatja, hogy az ω_p körfrekvenciánál a $W_0(j\omega)$ helygörbe metszi a *negatív valós* tengelyt és ebben a metszéspontban $abs W_0(j\omega_p) = a_0(\omega_p)$ és $arc W_0(j\omega_p) = \varphi_0(\omega_p) = -\pi$ (-180°). Ha ugyanis az $i = 1 \sin(\omega_p t)$ bemenetet a külső jelforrásról lekapszoljuk, és ezzel egyidejűleg az o kimenetre tesszük (vagyis létrehozuk a *zárt* hatásláncot), akkor $a_0(\omega_p) < 1$ mellett a jelek **zérushoz** (stabilis rendszer) –, $a_0(\omega_p) > 1$ mellett a végtelenhez (labilis rendszer) tartanak. Az $a_0(\omega_p) = 1$ mellett a rendszerben az egységnyi amplitúdójú kvázistacioner lengés **fennmarad**, hiszen a $W_0(j\omega)$ frekvencia függvényű tag „nem tudja” hogy a bemenő jelét nem külső jelforrásból, hanem lényegében saját kimenetéről kapja (stabilitási határhelyzet). Ha a $W_0(j\omega)$ helygörbe az 28a. ábrán látható módon az $\omega_c < \omega_p$ *vágási körfrekvenciánál* lép be az egységsugarú körbe (itt $abs W_0(j\omega_c) = a_0(\omega_c) = 1$, $arc W_0(j\omega_c) = \varphi_0(\omega_c) > -\pi$), akkor $\omega_p > \omega_c$ miatt $a_0(\omega_p) < 1$, tehát a zárt rendszer *aszimptotikusan stabilis*. Annak egyik mértéke, hogy a $W_0(j\omega)$ frekvencia függvény mennyire (milyen mértékben) kerül el a stabilitási határhelyzetet jelentő $-1+j0$ pontot a $\varphi_0(\omega_c) = \pi + arc W_0(j\omega_c) = \pi + \varphi_0(\omega_c) > 0$ **fázistöbblet**. Gyakorlati tapasztalat, hogy $\varphi_0(\omega_c) \geq \pi/3$ (60°) fázistöbblet (amikor is $\varphi_0(\omega_c) > -2\pi/3$ (-120°)) a zárt szabályozási rendszernek is megfelelő üzemtani tulajdonságot biztosít. A Nyquist kritériumra épülő méretezési eljárásnak jelentős előnye, hogy *holidős* tényezőt tartalmazó $W_0(j\omega)$ esetében is használható. Mindezek a tulajdonságok a frekvencia függvény Bode diagrammjain is megfogalmazhatók. Ez ahhoz az „ököl szabályhoz” vezetett, hogy úgy kell kialakítani a **nyitott kör frekvencia függvényének** $20 \log[abs W_0(j\omega)] = 20 \log[a_0(\omega)] = a_{0dB}(\omega)$ **amplitúdómenetét**, hogy az egy megfelelően nagy hosszúságú $-20 \text{ dB/dekád meredekségű szakaszán}$ (vagyis az ω_c vágási körfrekvencia értékénél) **messe a 0 dB-es tengelyt**. A $W_0(j\omega)$ frekvencia függvény menetének alakulása láthatóan az ω_c vágási körfrekvencia környezetében kritikus. A zárt rendszer minőségi tulajdonságainak megítélésére a fázistöbblet mellett a helygörbe és a $-1+j0$ pont közötti legkisebb ρ_m távolságot is felhasználhatjuk, amelyet egyébként Nyquist *stabilitási tartaléknak* és *modulus tartaléknak* is neveznek. Ajánlott értéke $\rho_m \approx 0.5$. Ennek jelentése: a komplex sík $-1+j0$ pontjában (mint középpontban) húzott $\rho_m = 0.5$ sugarú kört a $W_0(j\omega)$ helygörbe *legfeljebb* érintheti.

Végző soron a frekvencia módszer vezetett arra, hogy a **PIPD szabályozó** átviteli függvényében a T_i és T_d paraméterek $T_i = T_{p1}$, $T_d = T_{p2}$ megválasztásával kompenzálni lehet a *folyamat* T_{p1} és T_{p2} időállandóival jellemzett késleltetéseit, a k_c és T megfelelően megválasztott értékeivel pedig be lehet állítani a nyitott kör $\varphi_0(\omega_c)$ fázistöbbletét⁷⁷ és az u

⁷⁷ Ez a $\varphi_0(\omega_c)$ fázistöbblet határozza meg a zárt szabályozás $v_R(t)$ eredő átmeneti függvényének

$$\sigma(\%) = 100[v_{Rmax} - v_R(\infty)]/v_R(\infty)$$

irányító jel $u_i = u(0)/u(\infty) = k_c k_p T_{p2}/T$ túlvezérlési arányát. A szabályozó integráló fokozatának köszönhetően az $y_A(t) = \mathbf{1}(t)$ egységugrás alapértékre adott $y(t) = v_R(t)$ válasz végértéke is azonosan az egység, miután a szabályozó csak akkor tud nyugalmi állapotot felvenni, ha a hibajel állandósult értéke zérus: $h(\infty) = y_A(\infty) - y(\infty) = 1 - y(\infty) = 0 \rightarrow y(\infty) = 1$ ($i=1$ típusú integrálszabályozás⁷⁸). Az ilyen módon végrehajtott méretezés úgy is felfogható, hogy a folyamat $p_1 = -1/T_{p1} < 0$, $p_2 = -1/T_{p2} < 0$ **stabilis pólusait** a szabályozó $z_1 = -1/T_i < 0$, $z_2 = -1/T_d < 0$ **zérusaival** a nyitott kör $W_0(s)$ átviteli függvényéből látszólag „eltüntetjük” (egyszerűsítéssel kiejtjük, vagy más megfogalmazással $p_1^* = 0$, $p_2^* = -1/T$ pólusokra „cseréljük”). Ezek eredményeként a *nyitott kör* átviteli függvénye a

$$W_0(s) = W_c(s)W_p(s) = k_c \frac{1+sT_i}{sT_i} \frac{1+sT_d}{1+sT} \bigg|_{\substack{T_i=T_{p1} \\ T_d=T_{p2}}} \frac{k_p}{(1+sT_{p1})(1+sT_{p2})} e^{-sT_h} =$$

$$= \frac{k_c k_p}{sT_{p1}(1+sT)} e^{-sT_h} = \frac{k_i}{s(1+sT)} e^{-sT_h}$$

kifejezésnek megfelelő alakra egyszerűsödik ($W_0(s)$ egy energiatárolós, holtidős, integráló tag, amelynek *integrálási hurokerősítése* $k_i = k_c k_p / T_{p1}$, időállandója T , holtideje T_h).

Megjegyzés.

A folyamat $p_1 = -1/T_{p1} < 0$, $p_2 = -1/T_{p2} < 0$ stabilis pólusainak a nyitott kör átviteli függvényéből való látszólagos „eltüntetése” azt jelenti, hogy az ezekhez rendelhető $x_1(t)$ és $x_2(t)$ állapotváltozók irányíthatatlanná vagy megfigyelhetetlenné váltak⁷⁹. Ennek eredménye pedig az, hogy ezeket az állapotváltozókat az u irányító jellel befolyásolni nem lehet („irányíthatatlan pólus”), illetve az $y(t)$ szabályozott jellemzőben nem jelennek meg („megfigyelhetetlen pólus”). Ez a tulajdonság nem jelent problémát, ha mindkét pólus *negatív valós részű*, vagyis a folyamat alrendszere aszimptotikusan stabilis, önbeálló. Szerencsére a gyakorlati esetek jelentős részében a folyamatok általában ilyen tulajdonsággal rendelkeznek. Ha viszont valamelyik pólus labilis (például a T_{p1} vagy T_{p2} paraméter *negatív* szám) akkor ezt **a labilis (pozitív értékű) pólust a szabályozó zérusaival kiejteni nem szabad**. Ekkor ugyanis a visszacsatolás hatása erre az irányíthatatlan vagy megfigyelhetetlen állapotváltozóra nem tud érvényre jutni, ami a teljes rendszer labilitását jelenti (lásd még labilis folyamatok szabályozása). A folyamat egyes, nagy időállandókhoz tartozó, stabilis (negatív valós részű) pólusainak „eltüntetése” nem azt jelenti, hogy ezek megszűnnek létezni, hanem a szabályozó zérusaival reprezentált $u(t)$ irányító jel *túlvezérlése* kelti azt a *látszatot*, mintha a nagy időállandók hatása nem tudna érvényre jutni. Ez egyben azt is jelenti, hogy abban az esetben, ha a nyitott hurokban valamely szerkezeti elem *telítődése* miatt a túlvezérlés nem jöhet létre, a folyamat felgyorsítására való törekvés is hatástalan marad.

A $W_0(s)$ kifejezésében ismeretlen paraméterek a szabályozó **k_c** átviteli tényezője (dc erősítése) és **PD** fokozatának **T** időállandója. Ha méretezési *előírás* a nyitott kör frekvencia függvényének $\varphi_i(\omega_c)$ **fázistöbblete** (ami a zárt rendszer $v_R(t)$ átmeneti függvényének Δv_{Rmax} túllövését befolyásolja), és a zárt rendszerben az u irányító jelnek $u_i = u(0)/u(\infty)$ **túlvezérlési aránya**, akkor a méretezés során betartandó feltételek: $abs W_0(j\omega_c) = 1$, $\pi + arc W_0(j\omega_c) = \varphi_i(\omega_c)$, $k_c k_p T_{p2}/T = u_i$, ahol ω_c a **nyitott kör** $W_0(j\omega)$ frekvenciafüggvényének vágási körfrekvenciája (az ω körfrekvencia azon $\omega = \omega_c$ értéke, amelynél a $W_0(j\omega)$ helygörbe az egységsugarú körbe belép, lásd 28. ábra). A feltételezett átviteli függvényekre részletezve:

túllendülését. Ha $\varphi_i(\omega_c) \approx \pi/3$ (60°), akkor $\sigma \leq 10\%$.

⁷⁸ Zérus zavarójel mellett az $y(\infty) = 1$ jel fenntartásához (az adott folyamatmodell mellett) $u(\infty) = 1/k_p$ irányító jel szükséges. Az i típuszán növelése ugyan javítja a szabályozás követési tulajdonságait, de egyre nehezebbé teszi a zárt rendszer stabilitásának biztosítását. Ennek oka, hogy az alacsony körfrekvencia tartományában a nyitott kör frekvencia függvényének fázisszöge $arc W_0(j\omega) = \varphi_0(\omega) \approx -i\pi/2$ ($-i90^\circ$).

⁷⁹ Ez csak akkor jöhetne létre, ha *egzakt* zérus-pólus kiejtés valósulhatna meg. Ez azonban gyakorlatilag azért nem lehetséges, mert a folyamat időállandói munkapont függő mennyiségek és a zérusokat is csak egy adott pontosságon belül lehet realizálni.

$$\left| \frac{k_c k_p}{j\omega_c T_{p1}(1 + j\omega_c T)} e^{-j\omega_c T_h} \right| - 1 = 0 \quad (a)$$

$$\pi - \frac{\pi}{2} - \arctg(\omega_c T) - \omega_c T_h - \varphi_t(\omega_c) = 0 \quad (b)$$

$$\frac{k_c k_p T_{p2}}{T} - u_t = 0 \quad (c)$$

Ebből a három egyenletből álló, háromismeretlenes *nemlineáris* algebrai egyenletrendszerből – miután a $k_p > 0$, $T_{p1} > 0$, $T_{p2} > 0$, $T_h \geq 0$ a **folyamat** ismert paraméterei és a $\varphi_t(\omega_c)$ *fázistöbblet* valamint az u_t *túlvezérlési arány* méretezési **előírások** – az ω_c vágási körfrekvencia, a **PD** fokozat **T** időállandója és a szabályozó k_c átviteli tényezője meghatározható⁸⁰. Ennek egyik módszere az lehet, hogy a (b) egyenletből kifejezzük a **PD** tag T időállandóját, a (c) kifejezésből pedig a k_c átviteli tényezőt mint az ω_c vágási körfrekvencia függvényeit, és ezeket az (a) kifejezésbe helyettesítjük. Vagyis a (b) és (c) egyenletekből:

$$T = \frac{\operatorname{tg}\left[\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_t\right) - \omega_c T_h\right]}{\omega_c} = T(\omega_c)$$

$$k_c = \frac{T u_t}{k_p T_{p2}} = \frac{\operatorname{tg}\left[\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_t\right) - \omega_c T_h\right] u_t}{\omega_c k_p T_{p2}} = k_c(\omega_c)$$

A $T(\omega_c)$ és $k_c(\omega_c)$ kifejezéseket az (a) egyenletbe helyettesítve a *méretezés alapegyenletét* – az $f(\omega_c)=0$ alakjában – kapjuk:

$$f(\omega)_{\omega=\omega_c} = \frac{\operatorname{tg}\left[\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_t\right) - \omega_c T_h\right] u_t}{\omega_c^2 T_{p1} T_{p2} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\left[\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_t\right) - \omega_c T_h\right]}} - 1 = 0$$

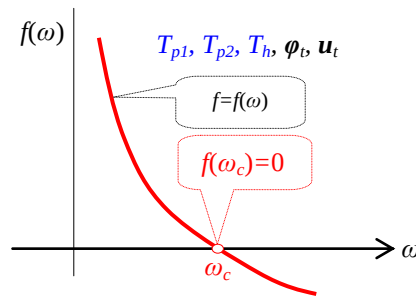
Ebben most már egyetlen ismeretlen a felnyitott hurok $W_0(j\omega)$ frekvenciafüggvényének az ω_c *vágási* körfrekvenciája, és az adott T_{p1} , T_{p2} , T_h , φ_t , u_t ismeretében a $f(\omega)$ függvény ω_c nulla helye numerikusan meghatározható⁸¹ (lásd 29. ábra).

⁸⁰ Az egyenletrendszer numerikus megoldására a korábbi részekben egy **MATLAB** programot is közreadtunk. Miután az adott átviteli függvények mellett a zárt rendszer karakterisztikus egyenlete

$$1 + W_0(s) = 0 \Rightarrow s T_p (1 + s T) + k_c k_p e^{-s T_h} = 0$$

transzcendens tényezőt tartalmazó kifejezés, a p_{Ri} pólusok meghatározása nehézkes, és a zárt rendszer stabilitásának vizsgálatára a *Hurwitz* kritérium közvetlenül nem is használható.

⁸¹ A méretezés alapegyenletének megoldást a **MATLAB fzero** eljárása támogatja, amely tetszőleges $f=f(\omega)$ nemlineáris kifejezés nulla (zérus) helyét számítja. A nulla hely keresésének indításához meg kell adni a keresés ω_{ci} indítási értékét, ennek ajánlása $\omega_{ci}=1/T_{p1}$. Egy másik eljárás az lehet, hogy az $\omega \sim f$ koordináta rendszerben ábrázoljuk a $f=f(\omega)$ függvényt és ennek alapján határozzuk meg azt az ω_c koordinátát, ahol $f(\omega_c)=0$ értéket vesz fel (lásd 29. ábra).

29. ábra Az $f(\omega)$ függvény és ennek ω_c nulla helye

Az ω_c vágási körfrekvencia kiszámítását követően a $T(\omega_c)$ és $k_c(\omega_c)$ képletekbe az ω_c behelyettesítésével T és k_c is megkapható.

7. Példa

A folyamat normalizált, relatív (dimenzió nélküli) egységekben adott $W_p(s)$ átviteli függvénye:

$$W_p(s) = \frac{k_p}{(1+sT_{p1})(1+sT_{p2})} e^{-sT_h} = \frac{2}{(1+20s)(1+10s)} e^{-5s}$$

$$k_p = 2, \quad T_{p1} = 20, \quad T_{p2} = 10, \quad T_h = 5$$

Méretezési előírások: fázistöbblet $\varphi_t(\omega_c) = \pi/4$ (45°), túlvezérlési arány $u_t = u(0)/u(\infty) = 10$. A soros kompenzációs **PIPD** szabályozó átviteli függvényének $-1/T_i$ és $-1/T_d$ zérusaival kompenzálhatók a folyamat $-1/T_{p1}$ és $-1/T_{p2}$ pólusai, ezért a zérus-pólus kiejtés elve alapján:

$$W_c(s) = \frac{k_c(1+sT_i)(1+sT_d)}{sT_i(1+sT)} = \frac{k_c(1+sT_{p1})(1+sT_{p2})}{sT_{p1}(1+sT)} =$$

$$= \frac{k_c(1+20s)(1+10s)}{20s(1+sT)}$$

$$k_c = ?, \quad T_i = T_{p1} = 20, \quad T_d = T_{p2} = 10, \quad T = ?$$

Méretezendő paraméterek a szabályozó k_c és T adatai. A méretezést végző **MATLAB** program (pipd.m fájl):

```
clear;echo on;
% PIPD szabályozó méretezése
global Tp1 Tp2 Th ft ut tg
% *****
% A folyamat paraméterei
kp=input('kp=');Th=input('Th=');
Tp1=input('Tp1=');Tp2=input('Tp2=');
% A méretezés követelményei
ft=input('ft=');ut=input('ut=');
% *****
% A méretezés
% A méretezés alapegyenletének megoldása
wcp=fzero('meretezo',1/(Tp1));
T=tg/wcp;
kc=ut*T/(kp*Tp2);Ti=Tp1;Td=Tp2;
% A méretezés eredménye
disp([kc Ti Td T wcp]);
printsys([kc*conv([Ti 1],[Td 1]),...
[conv([Ti 0],[T 1])]);
% *****
% A méretezés ellenőrzés
[Gh,Hh]=pade(Th,5);GT=kp;
HT=conv([Tp1 1],[Tp2 1]);
[Gp,Hp]=series(Gh,Hh,GT,HT);
Gc=kc*conv([Tp1 1],[Tp2 1]);
Hc=conv([Tp1 0],[T 1]);
[G0,H0]=series(Gp,Hp,Gc,Hc);
margin(G0,H0);pause;
[GR,HR]=cloop(G0,H0);
[GRu,HRu]=feedback(Gc,Hc,Gp,Hp);
grid on;
step(GR,HR);
```

```

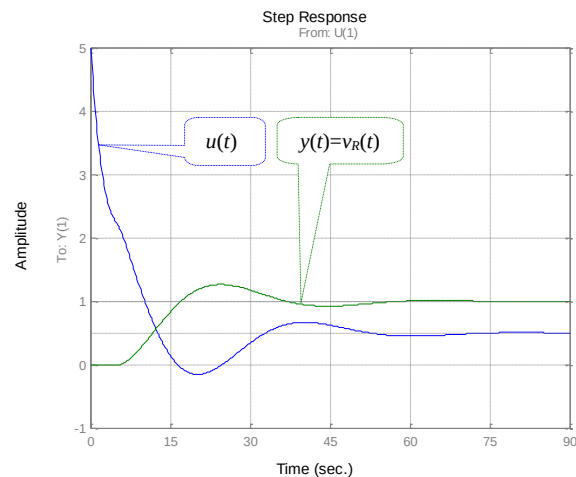
title('vR(t) átmeneti függvény');
pause;grid on;
step(GRu,HRu);hold;pause;
step(GR,HR);
title('vR(t) és u(t) időfüggvények');
pause;clf;
disp('vége');
% *****
function f=meretezo(w)
global Tp1 Tp2 Th ft ut tg
tg=tan((pi/2-ft)-w*Th);
sa=ut*tg;ne=w^2*Tp1*Tp2*sqrt(1+tg^2);
f=sa/ne-1;
end

```

A programfutás során kapott méretezési eredmények és a rendszer szimulációja a számpélda adataira (lásd 30. ábra):

[k_c T_i T_d T ω_c]
 [1.1227 20.0000 10.0000 2.2455 0.1091]

$$W_c(s) = 1.1227 \frac{(1+20s)(1+10s)}{20s(1+2.2455s)}$$



30. ábra A zárt rendszer $u(t)$ irányító jele és eredő $v_R(t)$ átmeneti függvénye

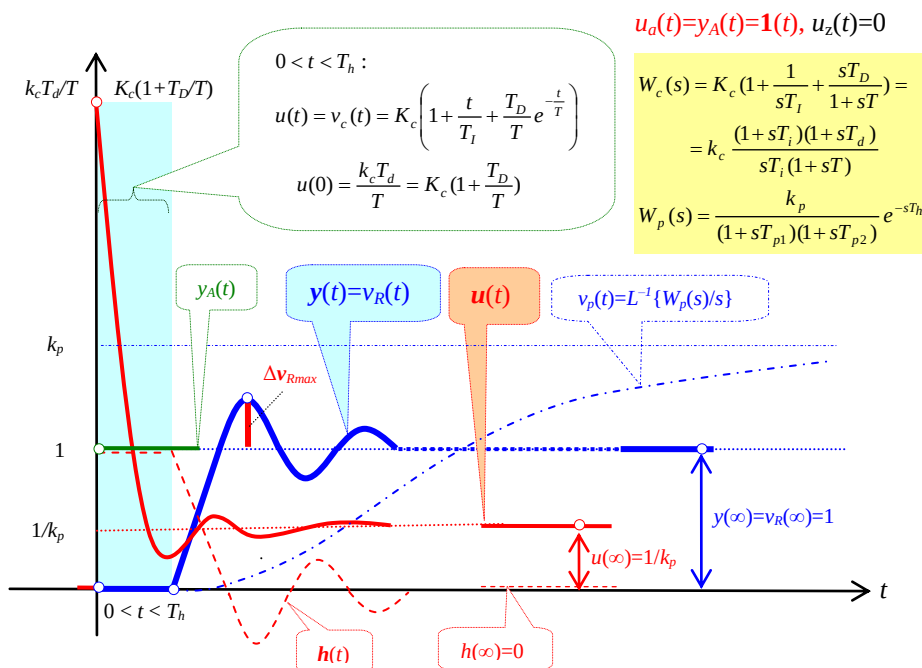
A példa során közölt **MATLAB** program tanulmányozását és rekonstruálását az olvasó figyelmébe ajánljuk. A program lényeges részei a `wcp=fzero('meretezo',1/(Tp1))`; $T=tg/wcp$; $kc=ut*T/(kp*Tp2)$; utasítások, amelyek a méretezés alapegyenletének ω_c zérushelyét (`wcp`), és ennek birtokában a szabályozó **PD** fokozatának T időállandóját és a szabályozó k_c átviteli tényezőjét számítják. Hasonlóan fontos a `margin(G0,H0)` függvény által szolgáltatott eredmények. Ennek végrehajtásával a méretezett szabályozó adatai mellett a képernyőn jelennek meg a nyitott kör *Bode* diagramjai, az ω_c vágási körfrekvencia, a $\phi_t(\omega_c)$ fázistöbblet, és ezek az adatok is a méretezés *ellenőrzését* szolgálják. Ne feledkezzünk meg arról, hogy a vázolt méretezési eljárásban a folyamat $W_p(s)$ átviteli függvényének ismert, un. névleges k_p , T_{p1} , T_{p2} , T_h adataival dolgoztunk. Ezek a paraméterek a folyamat egy adott munkapontjában érvényesek, és egy másik munkapontban, de egyéb okok miatt is (pl. hőmérsékletfüggés, öregedési jelenségek, stb.) változhatnak. A paraméterváltozások természetesen a zárt rendszer üzemtani tulajdonságaira is kihatnak, katasztrofális helyzetben a rendszer stabilitását is előidézhetik. A folyamat jelkésleltetésében a T_h holtidő jelenléte a $W_p(s)$ átviteli függvényben egy $\exp(-sT_h)$ transzcendens tényezőt eredményez. Ha a számítások egyszerűsítése céljából $W_p(s)$ *algebrai tört* jellegét meg kívánjuk tartani, az $\exp(-sT_h)$ tényezőt is polinomok hányadosával lehet közelíteni. Ennek szokásos alakjai a *Strej*c és a *Pade* algebrai törttel történő közelítés. Tipikus kifejezéseik:

$$\begin{aligned}
\text{Strejc} \quad e^{-sT_h} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + s \frac{T_h}{N}\right)^N} \cong \frac{1}{\left(1 + s \frac{T_h}{N}\right)^N} \\
e^{-sT_h} &\cong \frac{1}{\left(1 + s \frac{T_h}{2}\right)^2} \quad N=2 \quad \text{másodfokú} \quad e^{-sT_h} \cong \frac{1}{\left(1 + s \frac{T_h}{6}\right)^6} \quad N=6 \quad \text{hatodfokú} \\
\text{Pade} \quad e^{-sT_h} &\cong \frac{2-sT_h}{2+sT_h} = \frac{1-s\frac{T_h}{2}}{1+s\frac{T_h}{2}} \quad \text{elsőfokú} \\
e^{-sT_h} &\cong \frac{120-60sT_h+12(sT_h)^2-(sT_h)^3}{120+60sT_h+12(sT_h)^2+(sT_h)^3} \quad \text{harmadfokú}
\end{aligned}$$

A *Strejc* közelítés N számú $T_h/N > 0$ időállandóval rendelkező *egytárolós arányos tag soros kapcsolását* jelenti, a *Pade* közelítés olyan *nem minimum* fázisú *önbeálló* taggal közelít, melynek zérusai csupán előjelben különböznek a *stabilis* fésíkon elhelyezkedő pólusaitól (mindent áteresztő szűrő). A szabályozó méretezése során a folyamat holtidős tényezőjének figyelembevétele is szükséges, ennek amplitúdómenete $a_h(\omega)=1$, fázismenete $\varphi_h(\omega)=-\omega T_h$. A stabilizálási nehézségeket a holtidős tag $\varphi_h(\omega)$ negatív (a fázistöbbletet csökkentő) fázistolása okozza, amit a másodfokú *Strejc* polinom és az elsőfokú *Pade* polinom egyaránt $\varphi_{h\text{Strejc}}(\omega)=\varphi_{h\text{Pade}}(\omega)=-2\arctg(\omega T_h/2)$ szerint közelít. A közelítések amplitúdómenetei $a_{h\text{Strejc}}(\omega)=1/[1+(\omega T_h/2)^2]$, $a_{h\text{Pade}}(\omega)=1$, vagyis a *Pade* közelítés amplitúdómenete azonos a holtidős tag amplitúdómenetével. A gyakorlati alkalmazásokban a $N=6$ fokszámú *Strejc* és a *harmadfokú Pade* közelítések már kielégítő eredményt adnak. Miután a *Strejc* közelítés az *időtartományban*, a *Pade* közelítés a *frekvencia tartományban* ad elfogadható eredményt, a T_h holtidő αT_h és $(1-\alpha)T_h$ részekre bontásával $\exp(-sT_h)=\exp(-s\alpha T_h)\exp[-s(1-\alpha)T_h]$, így az egyik tényezőre a *Strejc*, a másikra a *Pade* közelítéseket használhatjuk. A holtidős tag *eredeti* jelátviteli tulajdonságait (pl. $v(t)=1(t-T_h)$ *átmeneti* függvény, $W(j\omega)=\exp(-j\omega T_h)=a(\omega)\exp(j\varphi(\omega))$ Nyquist helygörbe (*frekvencia* függvény), $a_{dB}(\omega)=20\log(a(\omega))=0$, $\varphi(\omega)=-\omega T_h$ *Bode* diagramok) célszerű összehasonlítani a közelítések jelátviteli tulajdonságaival, ezeket azonban az olvasóra bizzuk és figyelmébe ajánljuk. A *Strejc* közelítés $N=\infty$ számú $T=0$ időállandóval rendelkező (és egymással soros kapcsolást alkotó) *egytárolós arányos taggal* adná a pontos holtidős tagot, így ennek alapján tekinthetjük a holtidős tag *rendszámát* mitegy végtelen nagynak. A **MATLAB** programban – a méretezést ellenőrző részben – a folyamat holtidős tényezőjét ötödfokú *Pade* polinommal közelítettük⁸².

A 31. ábrán a zárt szabályozási rendszer egységugrás alapjelre vonatkozó $v_R(t)$ eredő átmeneti függvényét, az $u(t)$ irányító jelét és a $h(t)$ hibajelet ábráztuk, azt az esetet feltételezve, hogy a folyamat *holtidős* és *önbeálló*, a szabályozási algoritmust pedig **PID** vagy **PIPD** szabályozó realizálja. Az ábrán feltüntettük a folyamat $v_p(t)$ átmeneti függvényét is. Itt jegyezzük meg, hogy a $0 < t < T_h$ időintervallumban az $y(t)$ jel a holtidő miatt zérus (ezért ekkor még nem tud érvényre jutni a szabályozott jellemző negatív visszacsatolása), a hibajel tehát az alapértéknek megfelelő egységugrás, ezért ebben az időszakban az $u(t)$ a *szabályozó* $v_c(t)$ *átmeneti függvénye szerint* alakul. A $t=T_h$ idő elteltét követően a hibajelet (a visszacsatolás hatásának érvényre jutásának eredményeként) az $y(t)$ szabályozott jellemző már befolyásolni képes, és ennek megfelelően az egyensúlyi helyzet kialakulásának irányába változtatja. Az ábra azt is érzékelteti, hogy a folyamat T_h holtidő okozta késleltetése a zárt szabályozási rendszer $y(t)=v_R(t)$ *átmeneti* függvényében megmarad, ez a késleltetés az $u(t)$ irányító jel túlvezérlésével **nem mérsékelhető**.

⁸² **MATLAB** támogatás a holtidős tag N fokszámú *Pade* polinommal történő közelítésére: $[G_h, H_h] = \text{pade}(T_h, N)$; .



31. ábra A stabilis zárt szabályozási rendszer jellegzetes időfüggvényei.

Az ábra szemléletesen mutatja az irányító jel túlvezérlését [$u(0)=k_c T_d/T=K_c(1+T_d/T)$] és ennek alkalmas módon történő visszavételét [$u(\infty)=1/k_p < u(0)$], aminek eredményeként az inercia típusú jelkésleltetések jelentősen mérséklődtek (lásd a folyamat $v_p(t)$ és a zárt rendszer $v_R(t)$ átmeneti függvényeinek grafikonjait). Az $y(t)$ grafikonja csillapított lengő jellegű transziens folyamatot mutat, de ha nem tartjuk be a fázistöbbletre vonatkozó előírást, a zárt rendszer $\varphi_t(\omega_c) \leq 0$ esetben **labilissá** válik. A fázistöbblet megfelelően nagy (kb. 75°) értékre való megválasztásával a $v_R(t)$ átmeneti függvénynek lengésmentes beállása is biztosítható.

Ha a folyamat $W_p(s)$ átviteli függvényének egyszerűsítésére lehetőség kínálkozik, a szabályozástechnikus a szabályozó rendszertechnikai méretezésekor ezt messzemenően ki is használja. Ez ugyanis a méretezést is jelentősen *leegyszerűsíti*. Ennek tipikus esete, mikor a folyamat $v_p(t)$ átmeneti függvénye az *egy energiatárolós holtidős* tag átmeneti függvényével *közelíthető*. A folyamat $W_p(s)$ átviteli függvényének paraméterei most $k_p > 0$ (átviteli tényező), $T_{p1}=T_p > 0$ (időállandó), $T_h > 0$ (holtidő). Ebben az esetben $W_c(s)$ célszerűen **PI** algoritmust jelenít meg, miután a **PD** fokozat alkalmazása a $T_{p2}=0$ paraméter következményeként értelmét veszti. A folyamat és a szabályozó átviteli függvényei ekkor:

$$W_p(s) = \frac{G_p(s)}{H_p(s)} e^{-sT_h} = \frac{k_p}{(1+sT_p)} e^{-sT_h}$$

$$W_c(s) = \frac{G_c(s)}{H_c(s)} = \underbrace{K_c \left(1 + \frac{1}{sT_i}\right)}_{\text{PI}} = k_c \underbrace{\frac{1+sT_i}{sT_i}}_{\text{PI}}$$

($W_p(s)$: egytárolós, holtidős, önbeálló folyamat, $W_c(s)$: **PI** szabályozó, $k_c > 0$ átviteli tényező, $T_i > 0$ integrálási idő). A szabályozó méretezését – a k_c és T_i paraméterek meghatározását – most igen egyszerűen végrehajthatjuk. Az integrálási időnek $T_i=T_p$ értékre történő beállításával kompenzálni lehet a folyamat T_p időállandójával jellemzett késleltetését, a k_c átviteli tényező megfelelő megválasztásával pedig be lehetett állítani a nyitott kör $\varphi_t(\omega_c)$ fázistöbbletét. Az $y_A(t)=1(t)$ egységugrás alapértékre adott $y(t)=v_R(t)$ válasz végértéke most is

azonosan az egység, miután a szabályozó csak akkor tud nyugalmi állapotot felvenni, ha a hibajel állandósult értéke zérus ($i=1$ típusú integrálszabályozás). Az ilyen módon végrehajtott méretezés úgy is felfogható, hogy a folyamat $p_1=-1/T_p<0$ **stabilis pólusát** a szabályozó $z_1=-1/T_i<0$ **zérusával** a nyitott kör $W_0(s)$ átviteli függvényéből mintegy „eltüntetjük” (egyszerűsítéssel kiejtjük), aminek eredményeként a nyitott kör átviteli függvénye

$$W_0(s) = W_c(s)W_p(s) = k_c \frac{1+sT_i}{sT_i} \bigg|_{T_i=T_p} \frac{k_p}{(1+sT_p)} e^{-sT_h} = \frac{k_c k_p}{sT_p} e^{-sT_h} = \frac{k_i}{s} e^{-sT_h}$$

Ez a kifejezés $k_i=k_c k_p/T_p$ integrálási átviteli tényezővel (integrálási hurokerősítéssel) rendelkező T_h holtidős, integráló tag. A szabályozó méretezése most analitikusan, és igen egyszerűen elvégezhető, mivel $T_i=T_p$ felvételével a méretezés kizárólag a k_c átviteli tényező megválasztására korlátozódik. A „frekvencia módszer” felhasználásával méretezzünk most is egy előírt $\varphi_t(\omega_c)$ fázistöbbletre. Ekkor a *méretezés alapegyenlete* is leegyszerűsödik:

$$\text{abs}W_0(j\omega_c) - 1 = \left| \frac{k_c k_p}{j\omega_c T_p} e^{-j\omega_c T_h} \right| - 1 = 0 \quad (\text{a})$$

$$\pi + \text{arc}W_0(j\omega_c) - \varphi_t(\omega_c) = \pi - \frac{\pi}{2} - \omega_c T_h - \varphi_t(\omega_c) = 0 \quad (\text{b})$$

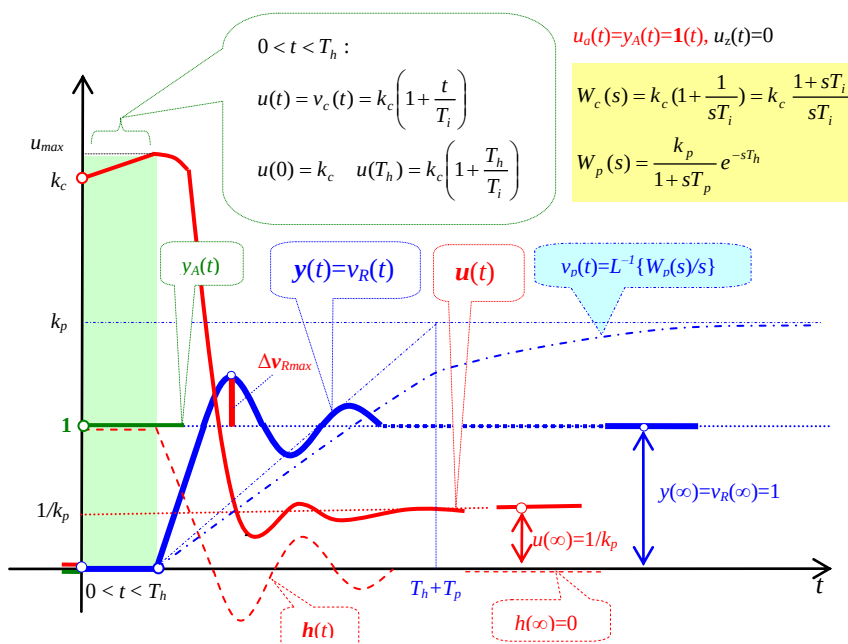
Ezekből a nyitott kör ω_c vágási körfrekvenciája és a szabályozó k_c átviteli tényezője (az adott k_p , T_p , T_h folyamatparaméterek és az előírt φ_t fázistöbblet mellett) közvetlenül meghatározható:

$$\omega_c = \frac{k_c k_p}{T_p}$$

$$k_c = \frac{\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_t\right) T_p}{k_p T_h}$$

Az aszimptotikusan stabilis rendszer esetére vonatkozó időfüggvények alakulását a 32. ábra szemlélteti. Vegyük észre, hogy most az irányító jel u_{max} maximális értéke nem a $t=0$ időpontban lép fel, de végértéke most is $u(\infty)=1/k_p$. A szabályozó integráló fokozata miatt az állandósult hiba most is **zérus**. Az $y(t)$ csillapodó lengőmozgással vesz fel az $y(\infty)=1$ végértékét. A rendszer a szabályozó átviteli tényezőjének $k_{ckrt} \geq \pi T_p/(2k_p T_h)$ értéke esetében *labilissá* válna, mivel ekkor a $\varphi_t(\omega_c)$ fázistöbblete zérus, vagy negatív érték lenne. Az $u_t=u_{max}/u(\infty)$ túlvezérlési arány közelítő értéke aszimptotikusan stabilis rendszer mellett:

$$u_t = \frac{u_{max}}{u(\infty)} \cong \frac{k_c \left(1 + \frac{t}{T_p}\right) \bigg|_{t=T_h}}{\frac{1}{k_p}} = \frac{\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_t\right) \frac{T_p}{k_p} \left(1 + \frac{T_h}{T_p}\right)}{\frac{1}{k_p}} = \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_t\right) \left(1 + \frac{T_p}{T_h}\right)$$

32. ábra A zárt szabályozási rendszer jellegzetes időfüggvényei **PI** szabályozó esetében.

Ismételten erősítsük meg, hogy a folyamatban jelenlévő T_h holtidővel jellemzett késleltetés *nem mérsékelhető*, ez a szabályozott jellemző $v_R(t)$ átmeneti függvényében mindenképpen jelen marad. Az előírt $\varphi_t(\omega_c)$ fázistöbblet növelésével a Δv_{max} túllövés csökkenthető, és ha ez szükséges, az aperiodikus (lengésmentes) beállítás is biztosítható.

Megjegyzés

Ha a felnyitott hurok jelátviteli tulajdonsága a $W_0(s) = k_i \exp(-sT_h)/s$ átviteli függvényű *holtidős integráló* taggal írható le, akkor a negatívan visszacsatolt zárt szabályozási rendszer aszimptotikus stabilitásának biztosíthatásához a k_i integrálási hurokerősítésnek a $0 < k_i < k_{ikrt} = \pi/(2T_h)$ intervallumban kell lennie (ennek bizonyítását az olvasóra bizzuk). A $k_{ikrt} = \pi/(2T_h)$ kritikus integrálási körerősítés mellett a zárt rendszer a stabilitás határhelyzetében üzemelne, ami nyilvánvalóan megengedhetetlen. Ennél a $k_i = k_{ikrt}$ értéknél a zárt rendszer *oszillátorként* viselkedne, és az egységugrásra adott minden válaszjele harmonikus időfüggvény lenne. $k_i > k_{ikrt}$ integrálási körerősítés mellett a lengési amplitúdók minden határon túl növekednének, vagyis a zárt szabályozás labilissá válna (*feltételelesen* stabilis integrálszabályozási rendszer). Az adott modell esetben jól bemutattható, hogy abban az esetben, ha a $W_0(s)$ átviteli függvény $\exp(-sT_h)$ transzcendens (holtidős késleltetést szimbolizáló) tényezőjének $\exp(-sT_h) \approx 1/(1+sT_h/N)^N$ Strejc polinommal történő közelítését alkalmazzuk, a $W_0(s)$ *algebrai törttel* közelíthető. Az alapkérdés: a közelítés milyen N fokszáma ad elfogadható eredményt? A kérdést abból a szempontból vizsgáljuk, hogy a pontos ($W_0(s)$, k_{ikrt}) és a közelítő ($W_0^*(s)$, k_{ikrt}^*) átviteli függvényeket tartalmazó szabályozások kritikus körerősítéseit egymással összehasonlítjuk, és a közelítést akkor tekintjük megfelelőnek, ha $k_{ikrt}^* \approx k_{ikrt}$. Legyenek tehát a pontos és a közelítő nyitott körű átviteli függvények az alábbiak:

Pontos : $W_0(s) = \frac{k_i}{s} e^{-sT_h} \Rightarrow W_0(j\omega) = \frac{k_i}{j\omega} e^{-j\omega T_h}$ $ W_0(j\omega_c) = a_0(\omega_c) = \frac{k_i}{\omega_c}$ $\arg W_0(j\omega_c) = \varphi_0(\omega_c) = -\frac{\pi}{2} - \omega_c T_h$	→	Közelítés (Strejc) : $W_0^*(s) = \frac{k_i^*}{s} \frac{1}{(1+s\frac{T_h}{N})^N} \Rightarrow W_0^*(j\omega) = \frac{k_i^*}{j\omega} \frac{1}{(1+j\omega\frac{T_h}{N})^N}$ $ W_0^*(j\omega_c) = a_0^*(\omega_c) = \frac{k_i^*}{\omega_c} \frac{1}{\left(\sqrt{1 + (\omega_c \frac{T_h}{N})^2} \right)^N}$ $\arg W_0^*(j\omega_c) = \varphi_0^*(\omega_c) = -\frac{\pi}{2} - N \arctg(\omega_c \frac{T_h}{N})$
---	---	---

A stabilitási határhelyzetben $a_0(\omega_c) = 1$ és $\varphi_0(\omega_c) = -\pi$, és ezekből a *pontos* és a *közelítő* nyitott körű frekvencia függvényekből számítható k_{ikrt} és k_{ikrt}^* kritikus integrálási körerősítések:

Pontos :

$$k_{ikrt} = \frac{\pi}{2T_h}$$

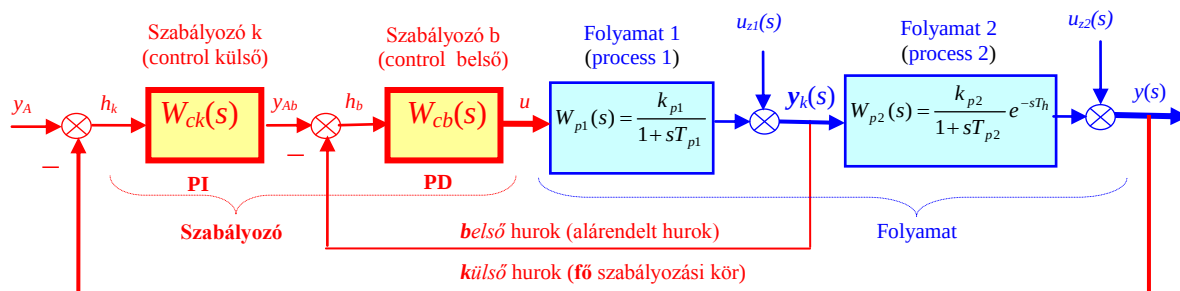
Közelítés (Strejc) :

$$k_{ikrt}^* = \frac{2N \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2N}\right) \left(\sqrt{1 + \left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2N}\right)\right]^2} \right)^N}{2T_h}$$

A kapott eredmények alapján az N fokszámot kell úgy megválasztani, hogy a k_{ikrt}^* számlálója jól közelítse a π értéket. Az $N=1$ nyilvánvalóan nem választható, mert a közelítés strukturálisan stabilis szabályozást jelentene ($k_{ikrt}=\infty$), márpedig az eredeti rendszer **nem** ilyen, hanem **feltételesen** stabilis. Az $N=2$ eset igen durva közelítés, mivel $k_{ikrt}=\pi/(2T_h)$ helyett $k_{ikrt}^*\approx 8/(2T_h)$ adódik ($8\gg\pi$!). $N=10$ esetében viszont $k_{ikrt}^*=3.5854/(2T_h)$, ami elfogadható érték ($3.5854\approx\pi=3.1416$). Ez utóbbi eset jelentése az, hogy az eredeti $W_0(s)$ és a közelítő $W_0^*(s)$ nyitott körű átviteli függvényekkel leírt rendszerek kb. *azonos* integrálási körerősítés mellett kerülnek a stabilitási *határhelyzetbe* (a megengedett k_{imeg} integrálási körerősítés egyébként kb. $k_{imeg}=k_{ikrt}/2=\pi/(4T_h)$ lehetne). A közelítés pontossága N növelésével tovább javítható, $N\rightarrow\infty$ mellett k_{ikrt}^* tart $k_{ikrt}=\pi/(2T_h)$ értékhez, ami (a kritikus integrálási körerősítés szempontjából) a pontos érték. A *Strejc* – és az itt most nem részletezett *Pade* – közelítést $W_0(s)$ transzcendens tényezőjének kiküszöbölésére elterjedten alkalmazzák.

Kaszád szabályozás

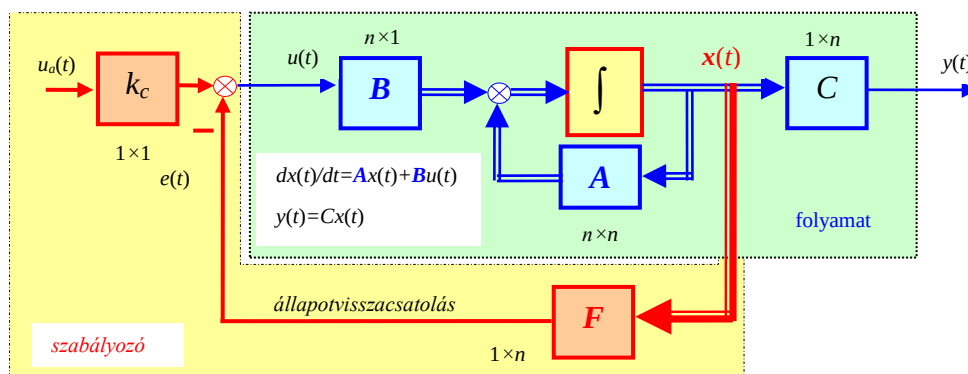
A klasszikusnak tekinthető soros kompenzáció mellett meg kell említenünk az állapotviszacsatolásnak megfelelő struktúrát, az un. *kaszkád szabályozást*. Ennek alkalmazására akkor nyílik lehetőség, ha a folyamat átviteli függvénye a 33. ábrának megfelelően olyan, egymással soros kapcsolást alkotó részekre bontható, amelyekben a $T_{p1}>0$, $T_{p2}>0$ jelkéleltetések kb. egy nagyságrendben vannak, és az $y_k(s)$ un. *kisegítő szabályozott jellemző* érzékelő szervvel **mérhető**.



33. ábra Kaszkád szabályozás hatásvázlata

Az $y_k(s)$ **kisegítő** szabályozott jellemzőről létesített negatív visszacsatolás a *belső* hurok (az *alárendelt* szabályozási kör), és az ebben szereplő **PD** szabályozó a T_{p1} időállandót $T_{p1}^* \ll T_{p1}$ értékre „cseréli”, valamint az $u_{z1}(s)$ zavarójel hatását mérsékeli. A *külső* hurok (a fő szabályozási kör) **PI** szabályozója kompenzálja a folyamat T_{p2} időállandóval jellemzett késleltetését, és integráló fokozatával megszünteti a maradó szabályozási eltérést. A $W_{ck}(s)$ átviteli függvényű tag y_{Ab} kimenő jele a *belső* hurok *alapjelenek* tekinthető, és ennek korlátozásával az $y_k(s)$ *kisegítő* szabályozott jellemző is korlátok között tartható. A méretezés a *belső* hurok szabályozójának meghatározásával kezdődik, és ennek ismeretében kerül sor a *külső* hurok méretezésére.

A **SISO** folyamat állapotviszacsatolásának struktúrája lényegében a kaszkádszabályozás általánosítása (lásd 34. ábra).



34. ábra Az állapotviszacsatolás hatásvázlata

Ez esetben nem a kiegészítő szabályozott jellemzőről létesítünk egy belső, negatív visszacsatolást, hanem az A állapotmátrixával (melynek $\lambda_i = p_i$ sajátértékei egyben a folyamat pólusai) és B bemeneti mátrixával (oszlopvektor) leírt, $dx(t)/dt = Ax(t) + Bu(t)$ matematikai modellel rendelkező folyamat $x(t)$ állapotvektorát egy F visszacsatoló sorvektoron átvezetve az $e(t) = Fx(t)$ skaláris jelet csatoljuk vissza – ha ez egyébként technikailag megtehető – a folyamat skaláris u irányító jeléhez. Ezzel a folyamat közvetlen $u(t)$ bemenőjele $u(t) = k_c u_d(t) - Fx(t)$ értékre változik, ahol $u_d(t)$ a visszacsatolt rendszer új bemenőjele, és k_c az eredő rendszer átviteli tényezőjének beállítására szolgáló ún. korrekciós átviteli tényező. Az eredő rendszer matematikai modellje ezzel a

$$\begin{aligned} dx(t)/dt &= (A - BF)x(t) + Bk_c u_d(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned}$$

állapotegyenlet lesz. Az így létrehozott struktúrával keletkeztetett állapotviszacsatolt rendszer eredő átviteli mátrixa $A_R = A - BF$, amelynek $\lambda_{Ri} = p_{Ri}$ sajátértékei a visszacsatolás F átviteli tényezőinek szabad megválasztásával tetszőleges értékekre előírhatók. A folyamat eredeti p_i pólusait (az esetlegesen előfordulható labilitást előidéző és az s komplex számsík pozitív valós – jobb oldali – félsíkján elhelyezkedőket is) tetszőlegesen megadott p_{Ri} helyekre (például az s komplex sík stabilis – negatív valós részű – tartományára) mintegy „áthelyezhetjük”, és ezzel természetesen a tranziens tulajdonságokat is befolyásolhatjuk⁸³ (pólusallokáció). A visszacsatolás átviteli tényezőit ettől eltérően olyan elvek alapján is megválaszthatjuk, hogy egy $J[x(t), u(t)]$, vagy $J[y(t), u(t)]$ költségfüggvényt (funkcionált) minimalizálunk (LQR irányítás).

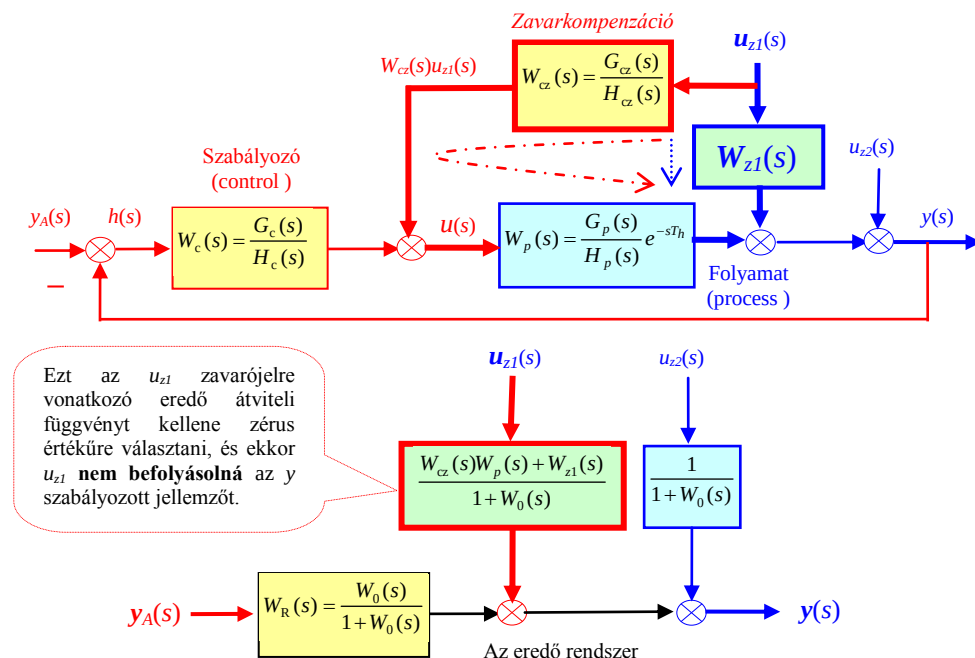
Ha a folyamat $x(t)$ tényleges állapotváltozóihoz való hozzáférés technikailag (vagy a magas költségigény miatt) nem lehetséges, a folyamattal mintegy párhuzamosan „együttfutó” modell $x^*(t)$ becsült állapotváltozóiról (az állapotmegfigyelőről) hozhatjuk létre az állapotviszacsatolást. Az állapotviszacsatolás elvén működő rendszer analízise és szintézise az időtartományban megkonstruált állapotegyenletek felhasználásával egyszerűbb, mintha most is az átviteli függvényekkel modelleznénk az alrendszereket. Vegyük észre, hogy az állapotviszacsatolás struktúrájában a szabályozó algebrai függvénykapcsolatot definiál az $u_d(t)$, $x(t)$ bemenőjelei és $u(t)$ kimenőjele között [$u(t) = k_c u_d(t) - Fx(t)$]. Az F méretezésének részletezését a korábbiakban tárgyaltuk (Ackermann képlet, Riccati egyenlet). Nyomatékosan kell hangsúlyoznunk, hogy a túlzott igényű gyorsítás, vagy irreálisan alacsony

⁸³ A soros kompenzációs, másodrendű PID szabályozó a folyamat két stabilis pólusának áthelyezését teszi lehetővé, szemben az állapotviszacsatolással, amellyel a folyamat minden pólusára tetszőleges befolyásunk lehet.

költségfüggvény az irányító jel megengedhetetlen **túlvezérléséhez** vezethet, és ez az igények megfogalmazásában mértéktartásra kell hogy ösztönözzön.

Zavarkompenzáció

A gyakorlati alkalmazások szempontjából hasonlóan lényeges az ún. *zavarkompenzáció* módszerének az alkalmazása (lásd 35. ábra).



35. ábra A zavarkompenzáció struktúrája

Ha az önbeálló folyamatot „támadó” zavaró jelek valamelyike (pl. az u_{z1}) mérhető, akkor ez a zavarójel az $u(s)$ irányító jel kialakításának koncepciójában *közvetlenül* is bevonható. A klasszikus visszacsatolás elve szerint az u_{z1} nemkívánatosan befolyásolja az y szabályozott jellemzőt, és ennek változása – a negatív visszacsatolás eredményeként – indítja el az u irányító jel olyan módosítását, hogy ez a nemkívánatos hatás mérséklődjön. A zavarkompenzációs struktúrában viszont az u_{z1} megváltozásának hatására az u irányító jel *nem csak* az y változásán keresztül, hanem *közvetlenül*, és *gyorsan* is reagál, ez utóbbinak mértéke $W_{cz}(s)u_{z1}(s)$. A $W_{cz}(s)$ átviteli függvényt úgy célszerű megválasztani, hogy az u_{z1} zavarójelnek az y szabályozott jellemzőre gyakorolt $W_{z1}(s)u_{z1}(s)$ *direkt* hatása, illetve a $W_{cz}(s)$ átviteli függvényen keresztül kifejtett, szándékoltan létrehozott $W_{cz}(s)W_p(s)u_{z1}(s)$ *közvetett* hatása egymást *közömbösítse* (kompenzálja). Ennek megfelelően a zavarkompenzáció $W_{cz}(s)$ átviteli függvényének méretezési elve, hogy

$$W_{z1}(s)u_{z1}(s) + W_{cz}(s)W_p(s)u_{z1}(s) = [W_{z1}(s) + W_{cz}(s)W_p(s)]u_{z1}(s) = 0$$

legyen, ami elvileg akkor teljesülhetne, ha

$$W_{cz}(s) = -W_{z1}(s)/W_p(s)$$

lehetne. Mivel $W_p(s)$ általában *pólustöbbséggel* rendelkező *holtidős* tagot jelent, így a $W_p(s)$ átviteli függvény $1/W_p(s)$ inverze – ritka kivételektől eltekintve – nem realizálható⁸⁴. Ezért az ideális $W_{cz}(s)$ helyett ennek közelítő realizálása jöhet csak szóba. A zavarkompenzációt

⁸⁴ A $W_{cz}(s) = 1/W_p(s)$ realizálására akkor van lehetőség, ha az önbeálló folyamat holtidő mentes, és számlálója, nevezője azonos fokszámmal rendelkezik. Ez azonban igen ritkán fordul elő.

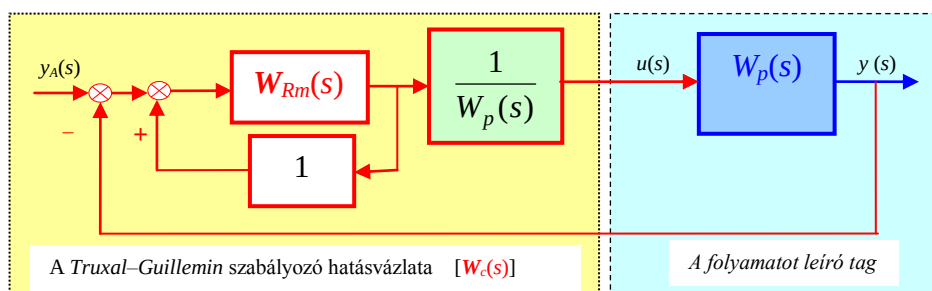
tartalmazó struktúra soros kompenzációs $W_c(s)$ átviteli függvényű szabályozójának feladata a nem mérhető zavaró jelek hatásának mérséklése, méretezése a korábban tárgyalt elvek szerint történhet. Vegyük észre, hogy a zavarkompenzáció hatáslánc *nem* alkot visszacsatolt hurkot (*open-loop control*), ezért hatásvonalán – ha $W_{cz}(s)$, $W_p(s)$ és $W_{z1}(s)$ stabilis átviteli függvények – stabilitási probléma sem keletkezik. Az $u(s) = W_c(s)h(s) + W_{cz}(s)u_{z1}(s)$ algoritmusnak megfelelő előállítását természetesen egy szerkezeti egység (a zavarkompenzációval kiegészített szabályozó berendezés) realizálja.

Truxal–Guillemin szabályozó

Elméleti jelentőségű a Truxal–Guillemin által javasolt szabályozó tervezésének eljárása. Ennek alapelve, hogy előzetesen, mintegy *méretezési követelményként előírjuk* a zárt rendszer $W_{Rm}(s)$ eredő átviteli függvényét⁸⁵. A folyamat $W_p(s) = G_p(s)\exp(-sT_h)/H_p(s)$ átviteli függvényének ismeretében a $W_c(s)$ átviteli függvényt úgy választjuk meg, hogy a zárt rendszer eredő átviteli függvénye a felvett $W_{Rm}(s)$ **rendszermodell** legyen. Mindezekre tekintettel:

$$\frac{W_c(s)W_p(s)}{1 + W_c(s)W_p(s)} = W_{Rm}(s) \rightarrow W_c(s) = \frac{W_{Rm}(s)}{1 - W_{Rm}(s)} \frac{1}{W_p(s)} = \frac{G_c(s)}{H_c(s)}$$

$W_c(s)$ realizálása során gondot jelenthet az $1/W_p(s) = H_p(s)\exp(sT_h)/G_p(s)$ tényező (a folyamat *inverz* átviteli függvénye), amelynek megvalósítására akkor van lehetőség, ha $T_h=0$, és a $H_p(s)$, $G_p(s)$ polinomok *azonos* fokszámmal rendelkeznek. Természetesen a szabályozó $W_c(s)$ átviteli függvényének realizálhatónak kell lennie (számlálójának $G_c(s)$ polinomja nem lehet a nevezőjének $H_c(s)$ polinomjától magasabb fokszámú), ami $W_{Rm}(s)$ modell felvételére is követelményeket támaszt.



36. ábra A Truxal–Guillemin szabályozás

Figyelembe véve a $W_c(s)$ átviteli függvényre kapott eredményt a szabályozási rendszer hatásvázlata a 36. ábra elrendezése szerint alakítható. A szabályozót a $W_{Rm}(s)$ egységnyi átviteli tényezővel *pozitívan* visszacsatolt tag és az $1/W_p(s)$ inverz átviteli függvényű tag soros kapcsolása alkotja, amiből az is látszik, hogy a szabályozó a $W_p(s)$ átviteli függvényű **folyamat** minden zérusát és pólusát kompenzálja. Miután a szabályozó beiktatásával a zárt rendszerből *pólust* eltüntetni elvileg nem lehet, $W_{Rm}(s)$ nevezőjének minimálisan a $H_p(s)$ nevező n fokszámával kell rendelkeznie. Ismételten hangsúlyozzuk, hogy $W_{Rm}(s)$ a **méretezési előírásként felvett** $y(s)/y_A(s)$ eredő átviteli függvény, célszerűen $k_R=1$ egységnyi átviteli tényezővel és gyorsan lecsengő tranzienseket tartalmazó stabilis p_{Ri} pólusokkal.

⁸⁵ Ennek az előírásnak természetesen realitása kell, hogy legyen. Pl. $W_{Rm}(s)=1=y(s)/y_A(s)$ bármennyire kívánatos lenne, nem reális követelmény, mivel a folyamat dinamikus rendszeréből pólust eltüntetni elvileg nem lehet.

8. Példa

Legyen az önbeálló, holtidő nélküli, két energiatárolós folyamat átviteli függvénye és a méretezési előírásként megadott $W_{Rm}(s)$ rendszermodell:

$$W_p(s) = \frac{k_p}{(1+sT_{p1})(1+sT_{p2})} = \frac{2}{(1+20s)(1+10s)}$$

$$W_{Rm}(s) = \frac{k_R}{(1+sT_R)^2} = \frac{1}{(1+s)^2}$$

A $W_{Rm}(s)$ ilyen felvétele az $y_A(t)=y_{A0}\mathbf{1}(t)$ alapérték esetében és a rendszer állandósult állapotban biztosítja az y_0 és y_{A0} azonosságát ($k_R=1$), valamint a rendszer tranzienseinek gyors „lecsengését” ($T_R=1$). A *Truxal–Guillemin* szabályozó és a nyitott kör eredő átviteli függvénye:

$$W_c(s) = \frac{W_{Rm}(s)}{1-W_{Rm}(s)} \frac{1}{W_p(s)} = \frac{\frac{1}{(1+sT_R)^2}}{1-\frac{1}{(1+sT_R)^2}} \frac{(1+sT_{p1})(1+sT_{p2})}{k_p} = \frac{(1+sT_{p1})(1+sT_{p2})}{s2T_Rk_p(1+s\frac{T_R}{2})} = \frac{(1+20s)(1+10s)}{4s(1+0.5s)}$$

$$W_0(s) = W_c(s)W_p(s) = \frac{W_{Rm}(s)}{1-W_{Rm}(s)} \frac{1}{W_p(s)} W_p(s) = \frac{\frac{k_R}{(1+sT_R)^2}}{1-\frac{k_R}{(1+sT_R)^2}} \frac{1}{1-\frac{1}{(1+s)^2}} = \frac{1}{s(s+2)}$$

A kapott eredmény egy **PIPD** szabályozó, amely kompenzálja (egyszerűsítéssel kiejti) a folyamat időállandóiból származtatható $T_{p1}=20$ és $T_{p2}=10$ késleltetéseit és a nyitott körnek *egytárolós integráló* tulajdonságot biztosít. Ez az integráló hatás eredményezi, hogy $W_{Rm}(s)$ egységnyi átviteli tényezője miatt az $y_A(t)=\mathbf{1}(t)$ egységugrásra adott válasz hatására keletkező állandósult állapotban $y_0=y_{A0}=1$ is teljesül. Ellenőrzésként – a méretezett szabályozó adatai mellett – számítsuk ki a zárt rendszer eredő átviteli függvényét:

$$W_R(s) = \frac{W_c(s)W_p(s)}{1+W_c(s)W_p(s)} = \frac{\frac{(1+sT_{p1})(1+sT_{p2})}{s2T_Rk_p(1+s\frac{T_R}{2})} \frac{k_p}{(1+sT_{p1})(1+sT_{p2})}}{1+\frac{(1+sT_{p1})(1+sT_{p2})}{s2T_Rk_p(1+s\frac{T_R}{2})} \frac{k_p}{(1+sT_{p1})(1+sT_{p2})}} = \frac{1}{(1+sT_R)^2} = \frac{1}{(1+s)^2} = W_{Rm}(s)$$

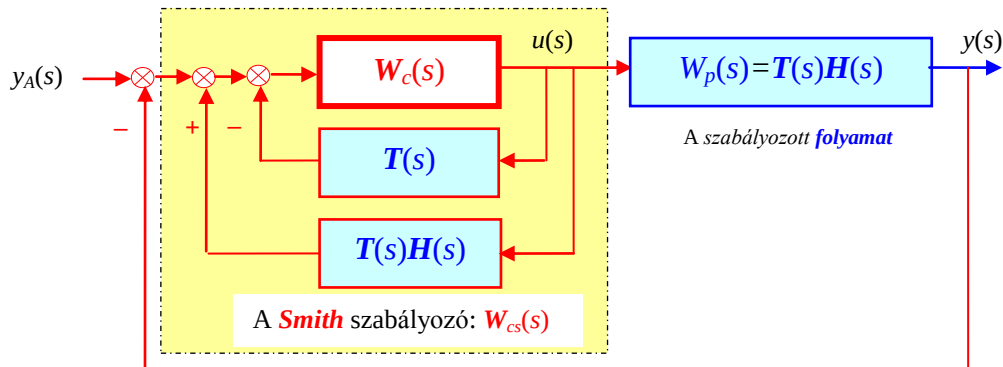
A rendszer ilyen mértékű felgyorsítása (a $T_{p1}=20$, $T_{p2}=10$ időállandóknak a $T_{R1}=T_{R2}=T_R=1$ értékre történő cseréje) jelentős mértékű túlvezérléssel jár. A túlvezérlési arány $u_t=u(0)/u(\infty)=200$.

Szabályozás *Smith* szabályozóval

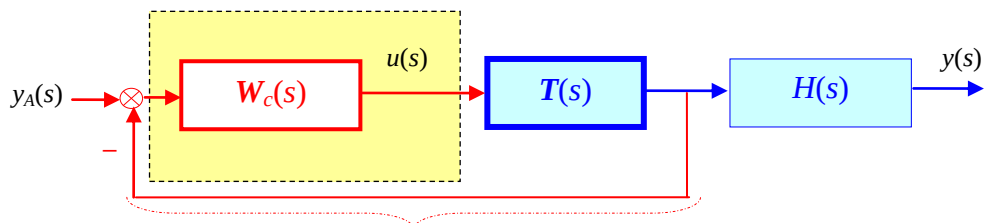
Mint már korábban láttuk, a folyamat T_h *holtideje* – a $\exp(-j\omega T_h)$ frekvencia függvényének a fázistöbbletre kifejtett, az azt **csökkentő** $\varphi_H(\omega_c)=-\omega_c T_h$ fázistolásának következményeként – a szabályozási rendszer stabilizálásában komoly nehézségeket okozhat. A szabályozott jellemzőben is megjelenő T_h késleltetés – a megengedett mértékű túlvezérlés alkalmazását is felhasználva – nem mérsékelhető. A *Smith* által javasolt struktúra arra teremt lehetőséget, hogy a szabályozó $W_c(s)$ átviteli függvényének méretezése szempontjából a holtidő hatását mintegy a szabályozás *zárt hatásláncán kívülre helyezettnek tekintsük*, és ilyen módon, a méretezési eljárásban *figyelmen kívül* hagyhatjuk. A továbbiakban feltételezzük, hogy a folyamat átviteli függvénye $W_p(s)=T(s)H(s)$ tényezőkre bontható, ahol $T(s)$ az inercia típusú, T_p időállandókkal jellemzett késleltetéseket, a $H(s)$ a T_h holtidős késleltetést szimbolizálja. Egy ilyen átviteli függvény jellemzi például a kéttárolós, holtidős, önbeálló tag jelátviteli tulajdonságait is:

$$W_p(s) = \frac{k_p}{(1+sT_{p1})(1+sT_{p2})} e^{-sT_h} \cong \underbrace{\frac{k_p}{(1+sT_{p1})(1+sT_{p2})}}_{T(s)} \underbrace{e^{-sT_h}}_{H(s)} \cong \underbrace{\frac{k_p}{(1+sT_{p1})(1+sT_{p2})}}_{T(s)} \underbrace{\frac{1}{(1+s\frac{T_h}{N})^N}}_{\approx H(s)}$$

Láthatjuk, hogy a $H(s) = \exp(-sT_h) \approx 1/(1+sT_h/N)^N$ tényező a holtidős komponenst, vagy sok kis, egymásra torlódó időállandót is megjeleníthet. A Smith által javasolt szabályozási struktúrát – némi átalakítással – a 37a. ábra mutatja. Ebben a $W_c(s)$ méretezendő átviteli függvényű tag a $T(s)$ tényezővel *negatív*an, a $T(s)H(s)$ tényezővel *pozitív*an van visszacsatolva, vagyis a $W_c(s)$ átviteli függvényű tag *negatív* visszacsatolást létesítő visszacsatoló tagjának *eredő* átviteli függvénye $T(s) - T(s)H(s) = T(s)[1 - H(s)] = T(s)[1 - \exp(-sT_h)]$.



a. ábra A Smith szabályozás hatásvázlata



b. ábra Az egyenértékű struktúra

37. ábra A Smith szabályozót tartalmazó szabályozás struktúrája

A Smith szabályozó $W_{cs}(s)$ –, a felnyitott hatáslánc $W_0(s)$ –, és a zárt hatáslánc $W_R(s) = y_A(s)/y(s)$ eredő átviteli függvényei a 37a. ábra alapján:

$$W_{cs}(s) = \frac{W_c(s)}{1 + W_c(s)T(s)[1 - H(s)]}$$

$$W_0(s) = W_{cs}(s)W_p(s) = \frac{W_c(s)T(s)H(s)}{1 + W_c(s)T(s)[1 - H(s)]}$$

$$W_R(s) = \frac{W_0(s)}{1 + W_0(s)} = \underbrace{\frac{W_c(s)T(s)}{1 + W_c(s)T(s)}}_{W_R^*(s)} H(s)$$

A $W_R(s)$ kifejezésből láthatjuk, hogy az eredeti rendszerhez egy olyan, vele *egyenértékű* hatásvázlat struktúra rendelhető, melyben a $W_c(s)$ átviteli függvényű tag a vele soros kapcsolást alkotó $T(s)$ átviteli függvényű taggal alkot egy $W_R^*(s)$ átviteli függvényű zárthurkú hatásláncot, és a $H(s)$ tényező mintegy a *zárt hurkon kívülre kerültnek tekinthető* (lásd 37b. ábra). Ez azt jelenti, hogy $W_c(s)$ a $T(s)$ ismeretében (a $H(s)$ figyelmen kívül hagyásával) a klasszikus frekvencia-módszer felhasználásával méretezhető, de a Smith szabályozó $W_{cs}(s)$ átviteli függvényének **tényleges** szerkezeti-áramköri kialakításához a 37a. ábra szerinti

struktúra alapján kell eljárni⁸⁶. Ha a $H(s)=\exp(-sT_h)$ tényező a folyamat T_h holtidő okozta késleltetését reprezentálja, $W_{cs}(s)$ folytonosidejű (analóg) eszközökkel történő megvalósításában ez nehézséget okoz, ezért a Smith szabályozó alkalmazására akkor kerülhet sor, ha a szabályozót a diszkrétidejű *digitális számítógép* realizálja. Ekkor ugyanis a holtidős tag megvalósítása – ha a T_h holtidő a T_s mintavételezési időnek egészszámu többszöröse – problémát nem jelent.

9. Példa

Legyen az egy energiatárolós, holtidős folyamat átviteli függvénye ($k_p=2$, $T_p=20$, $T_h=5$)

$$W_p(s) = \frac{k_p}{1+sT_p} e^{-sT_h} = \frac{2}{1+20s} e^{-5s} \rightarrow$$

$$T(s) = \frac{k_p}{1+sT_p} = \frac{2}{1+20s} \quad H(s) = e^{-sT_h} = e^{-5s} \cong \frac{1}{(1+0.5s)^{10}}$$

A $T(s)$ átviteli függvényhez tervezett $W_c(s)$ szabályozót válasszuk meg olyan módon, hogy az egyenértékű struktúrában a zárt hurok $W_R^*(s)$ átviteli függvénye $k_R=1$ egységnyi átviteli tényezővel és $T_R=1$ időállandóval rendelkező egytárolós arányos tag legyen (lásd Truxal–Guillemin által javasolt szabályozót). Mindezekre tekintettel:

$$W_R^*(s) = \frac{W_c(s)T(s)}{1+W_c(s)T(s)} = \frac{W_c(s) \frac{k_p}{1+sT_p}}{1+W_c(s) \frac{k_p}{1+sT_p}} = \frac{k_R}{1+sT_R}$$

innen:

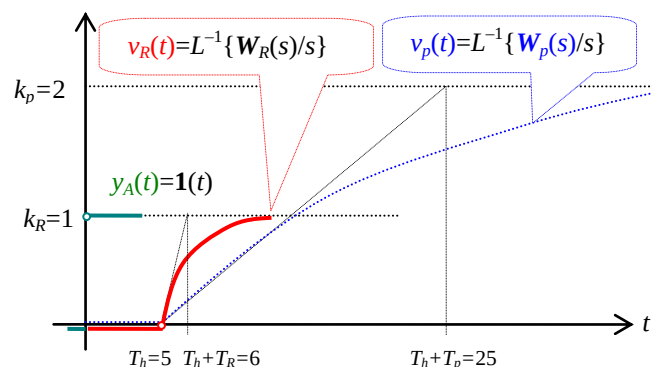
$$W_c(s) = \frac{k_R(1+sT_p)}{k_p(1+sT_R) - k_R k_p} = \frac{1+20s}{2(1+s) - 2} = \frac{1+20s}{2s}$$

A Smith szabályozó és a zárt hurkú szabályozási rendszer eredő átviteli függvényei:

$$W_{cs}(s) = \frac{W_c(s)}{1+W_c(s)T(s)[1-H(s)]} = \frac{1+20s}{2s+2(1-e^{-5s})}$$

$$W_R(s) = \frac{W_{cs}(s)T(s)H(s)}{1+W_{cs}(s)T(s)H(s)} = \frac{\frac{1+20s}{2s+2(1-e^{-5s})} \frac{2}{1+20s} e^{-5s}}{1 + \frac{1+20s}{2s+2(1-e^{-5s})} \frac{2}{1+20s} e^{-5s}} = \frac{1}{1+s} e^{-5s}$$

A folyamat és a szabályozási rendszer átmeneti függvényeit a 38. ábrán adtuk meg.



38. ábra A folyamat és a zárt rendszer átmeneti függvényei

⁸⁶ Ez azt jelenti, hogy a $T(s)$ ismeretében méretezett $W_c(s)$ átviteli függvényű szabályozót (a $W_{cs}(s)$ Smith szabályozó szerkezeti realizáláskor) a $T(s)[1-H(s)]=T(s)[1-\exp(-sT_h)]$ átviteli függvényű taggal *negatív*an vissza kell csatolni. A $T(s)[1-\exp(-sT_h)]$ átviteli függvényű visszacsatoló tag realizálása nem egyszerű feladatot jelent, folytonosidejű rendszerekben csak közelítéssel lehetséges. Ha pl. $H(s)=1/(1+sT_I)$, a visszacsatoló tag egy *differenciáló jellegű* dinamikus tagot jelent, mivel ekkor: $1-H(s)=1-1/(1+sT_I)=sT_I/(1+sT_I)$.

A $W_c(s)$ analóg eszközökkel történő realizálásának nehézségeit a nevezőben lévő $\exp(-5s)$ transzcendens tényező is mutatja. Az $u(t)$ irányító jel ábrázolását és az $u_t=u(0)/u(\infty)$ túlvezérlési arány kiszámítását az olvasóra bízuk.

A szabályozó tervezésének polinomiális módszere

A folyamatok egy részénél a $W_p(s)$ átviteli függvénynek gyöktényezős normálalakjában (a komplex számsík *labilis tartományában*, a pozitív valós részű félsíkon) labilis *pólusok* és pozitív valós részű *zérusok* is lehetnek. A labilitást okozó pozitív valós részű pólusokat a soros kompenzációs szabályozóval kiejtteni nem szabad, a paraméterek nem egzakt értékei miatt ezek kiejtése egyébként *nem* is lehetséges. Hasonló okok miatt – bár ezek nem okozzák a folyamat labilitását – a soros kompenzációval a pozitív valós részű zérusok sem „tüntethetők” el, ezek ugyanis a szabályozó átviteli függvényében labilis pólusként jelennének meg. A soros kompenzációs szabályozó tervezésekor most azzal a feltételezéssel élünk, hogy a – holtidős késleltetést *nem* tartalmazó, vagy jelenlétét algebrai tört közelítéssel figyelembevevő – folyamat polinomiális alakú átviteli függvénye

$$W_p(s) = \frac{M_p(s)}{N_p(s)} = \frac{R(s)M_k(s)}{L(s)N_k(s)} = \frac{\overbrace{(r_0s^r + r_1s^{r-1} + \dots + r_r)}^{R(s)}}{\underbrace{(s^l + l_1s^{l-1} + \dots + l_l)}_{L(s)}} \frac{\overbrace{(s^{m_k} + m_{k1}s^{m_k-1} + \dots + m_{km})}^{M_k(s)}}{\underbrace{(s^{n_k} + n_{k1}s^{n_k-1} + \dots + n_{kn})}_{N_k(s)}}$$

Ebben $R(s)$ és $L(s)$ a *nem kompenzálható*, r és l fokszámú pozitív valós részű zérusok és labilis pólusok rész polinomjai, az $M_k(s)$, $N_k(s)$ a *kompenzálható*, (és kompenzálni is kívánt, negatív valós részű) zérusok és pólusok rész polinomjai⁸⁷. A folyamat átviteli tényezője az r_0 együtthatóban van képviselve, az $M_k(s)$, $N_k(s)$ és az $L(s)$ polinomok a vezető együtthatóikra normalizáltak. Az $M_p(s)$ számláló és $N_p(s)$ nevező polinomok fokszámai $m_p=r+m_k$ és $n_p=l+n_k>m_p$. A folyamattal soros kapcsolást alkotó szabályozó $W_c(s)$ átviteli függvényével tehát a felnyitott hatáslánc $W_0(s)=W_c(s)W_p(s)$ eredő átviteli függvényéből az $M_k(s)$, $N_k(s)$ tényezők „tüntethetők” el, mivel ezek gyökei az s komplex sík *stabilis tartományban* helyezkednek el, és a nem egzakt pólus–zérus kiejtés ezért stabilitási problémát elvileg nem okoz. A $W_c(s)$ méretezésére (a szabályozási algoritmus meghatározására) az irodalomban található általános tárgyalási módszer helyett *Tuschák* által kidolgozott és jól áttekinthető eljárását alkalmazzuk. Ennek lényege, hogy a szabályozó $W_c(s)$ átviteli függvényét

$$W_c(s) = \frac{M_c(s)}{N_c(s)} = \frac{P(s)N_k(s)}{A(s)H(s)M_k(s)} = \frac{\overbrace{(p_0s^p + p_1s^{p-1} + \dots + p_p)}^{P(s)}}{\underbrace{\underbrace{s^a}_{A(s)} \overbrace{(s^h + h_1s^{h-1} + \dots + h_h)}_{H(s)}}_{A(s)H(s)}} \frac{\overbrace{(s^{n_k} + n_{k1}s^{n_k-1} + \dots + n_{kn})}^{N_k(s)}}{\underbrace{(s^{m_k} + m_{k1}s^{m_k-1} + \dots + m_{km})}_{M_k(s)}}$$

alakban keressük, ahol is a szabályozó *direkt* kompenzálja (egyszerűsítéssel kiejtí) a folyamat $M_k(s)$, $N_k(s)$ kompenzálható tényezőit, és ezen túlmenően p fokszámú $P(s)$ polinomot szerepeltet a számlálóban, illetve a és h fokszámú $A(s)$, $H(s)$ polinomokat a nevezőben⁸⁸. Az $A(s)$ polinomot *tervezési előírásnak* lehet tekinteni, mivel ennek megválasztásával állíthatjuk be azt a követelményt, hogy a *nyitott* kör pólusai tartalmazzák az $y_A(s)$ alapérték pólusait is,

⁸⁷ A polinomokat *nagybetű* (pl. $R(s)$, $L(s)$, stb.), fokszámaikat a nagybetűnek megfelelő *kisbetű* (pl. $\deg\{R(s)\}=r$, $\deg\{L(s)\}=l$, stb.), az együtthatókat pedig indexes kisbetű (pl. r_i , l_i , stb.) jelöli.

⁸⁸ $H(s)$ most *nem* a holtidős tagot szimbolizálja, hanem egy egyenlőre ismeretlen h fokszámú és a vezető együtthatóra normalizált $H(s)=s^h+h_1s^{h-1}+\dots+h_h$ polinomot jelent.

ami az alapjel hibamentes követésének feltétele⁸⁹. Nagy gyakorisággal $A(s)=s^a$ és $a=i \geq 1$, ami a szabályozónak *integráló* tulajdonságot, a nyitott kör eredő átviteli függvényének (ha egyébként a $W_p(s)$ átviteli függvénynek nincs pólusa a komplex sík origójában – i típusszámot garantál. Az $a=i$ fokszám minimális értéke ezért $a=i=1$. A szabályozó átviteli tényezőjét a $P(s)$ polinom p_0 együtthatója jeleníti meg (tehát a p fokszámú $P(s)$ polinom ismeretlen együtthatóinak száma ezért $p+1$), az $A(s)$, $H(s)$ polinomok a vezető együtthatóikra normalizáltak, ezért a $H(s)$ polinom ismeretlen együtthatóinak száma h . Mindezek alapján a nyitott hurok $W_0(s)$ és a zárt rendszer $W_R(s)$ eredő átviteli függvényei:

$$\begin{aligned} W_0(s) &= W_c(s)W_p(s) = \frac{M_c(s)}{N_c(s)} \frac{M_p(s)}{N_p(s)} = \frac{M_0(s)}{N_0(s)} = \\ &= \frac{\underbrace{P(s)N_k(s)}_{W_c(s)} \underbrace{R(s)M_k(s)}_{W_p(s)}}{\underbrace{A(s)H(s)M_k(s)}_{W_0(s)} \underbrace{L(s)N_k(s)}_{W_0(s)}} = \frac{P(s)R(s)}{A(s)H(s)L(s)} \\ W_R(s) &= \frac{M_R(s)}{N_R(s)} = \frac{W_0(s)}{1+W_0(s)} = \frac{M_0(s)}{N_0(s)+M_0(s)} = \\ &= \frac{P(s)R(s)}{A(s)H(s)L(s)+P(s)R(s)} \end{aligned}$$

A zárt rendszer $N_R(s)$ karakterisztikus polinomja ebből:

$$N_R(s)=A(s)H(s)L(s)+P(s)R(s)$$

Részletezve:

$$\begin{aligned} \underbrace{(s+p_{R1})(s+p_{R2})\dots(s+p_{Rn})}_{N_R(s)} &= \underbrace{s^{n_R} + n_{R1}s^{n_R-1} + \dots + n_{Rn}}_{N_R(s)} = \\ &= \underbrace{s^a}_{A(s)} \underbrace{(s^h + h_1s^{h-1} + \dots + h_h)}_{H(s)} \underbrace{(s^l + l_1s^{l-1} + \dots + l_l)}_{L(s)} + \\ &\quad + \underbrace{(p_0s^p + p_1s^{p-1} + \dots + p_p)}_{P(s)} \underbrace{(r_0s^r + r_1s^{r-1} + \dots + r_r)}_{R(s)} \end{aligned}$$

A szabályozó tervezésének alapelve, hogy a zárt rendszer $N_R(s)$ karakterisztikus polinomjának p_{Ri} gyökeit (az eredő $W_R(s)$ átviteli függvény *pólusait*) **méretezési előírásnak** tekintjük. Ha ezek adottak, akkor az $N_R(s)$ polinom n_{Ri} együtthatói – a polinom gyökeinek és együtthatóinak kölcsönös megfeleltetései alapján – is ismertek. Az alapprobléma, hogy a p_{Ri} gyökök n_R száma szabja meg az $N_R(s)$ polinom n_R fokszámát, amit úgy kell megállapítanunk, hogy ez azonos legyen az $A(s)H(s)L(s)+P(s)R(s)$ polinom $a+h+l$ fokszámával, vagyis $n_R=a+h+l$ (ennek oka az, hogy a nyitott kör átviteli függvényének $P(s)R(s)$ számlálója $p+r$ fokszámú, ami *legfeljebb* azonos lehet a $A(s)H(s)L(s)$ nevező $a+h+l$ fokszámával). Ha ezt a feltételt betartjuk, az $N_R(s)=A(s)H(s)L(s)+P(s)R(s)$ *Diophantosi* polinomiális egyenlet *határozott* alakú. Ennek jelentése az, hogy az együtthatók azonosságára felépített egyenletrendszerben az ismeretlenek (a h_i és p_i együtthatók) $h+p+1$ száma *azonos* a felírható egyenletek n_R számával, és ezért az ismeretlenek *egyértelműen* meghatározhatók. Ez az eset akkor áll elő, ha a $N_R(s)$ karakterisztikus polinom, illetve a szabályzó $H(s)$ és $P(s)$ részpolinomjainak fokszámai – mint ahogy ezt *Tuschák* kimutatta – rendre:

⁸⁹ Az y_A alapértékről feltételezzük, hogy létezik a Laplace transzformáltja, és $y_A(s)=B(s)/A(s)$.

$$n_R = n_p - m_p - 1 + r + l + a;$$

$$p = a + l - 1;$$

$$h = n_p - m_p - 1 + r$$

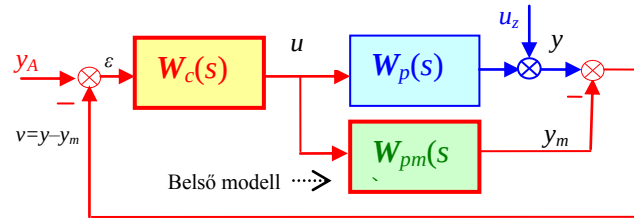
Ne feledkezzünk meg arról, hogy az $N_R(s)$ és az $A(s)$ polinomokat (ezek n_R és a fokszámaikat valamint n_{Ri} és a_i együtthatóit) a tervező **méretezési előírásként** felveszi, az $R(s)$ és az $L(s)$ polinomok a folyamat $W_p(s)$ átviteli függvényének pozitív valós részű zérusait és labilis pólusait tartalmazó ismert részpolinomjai, m_p és n_p a folyamat $W_p(s) = M_p(s)/N_p(s)$ átviteli függvényben szereplő ismert fokszámok. A méretezés tehát a $P(s)$ és $H(s)$ polinomok – vagyis a p és h fokszámok valamint a p_i és h_i ismeretlen együtthatók – meghatározására irányul. Megjegyezzük, hogy az $R(s)$ és $L(s)$ polinomok a folyamat „labilis” zérusain és labilis pólusain túlmenően olyan stabilis zérusokat és pólusokat is tartalmazhatnak, amelyeket a nyitott körből „eltüntetni” nem kívánunk. A méretezési eljárás során a zárt rendszer $W_R(s) = M_R(s)/N_R(s)$ átviteli függvényének $M_R(s) = P(s)R(s)$ számlálója kiadódik. Az $N_R(s)$ polinom p_{Ri} gyökeinek megválasztásakor számításba kell vennünk az n_R fokszámra vonatkozó kényszert, valamint a zárt rendszer tranzienseinek „lecsengésére” vonatkozó (és a p_{Ri} előírásokkal befolyásolható) igényeinket. Ha ez utóbbiak nem mértéktartóak, jelentős túlvezérlésre kell számítanunk. A polinomiális eljárás – megfelelő paraméterezéssel – PID szabályozó méretezésére is alkalmazható, de most nem a nyitott kör frekvencia függvényének a $\varphi(\omega_c)$ fázistöbblete a méretezési előírás, hanem a zárt kör előírt p_{Ri} pólusai alapján tervezzük a soros kompenzációs szabályozót. A méretezési eljárás részleteit a korábbi részekben tárgyaltuk.

Szabályozás belső modell alapján (IMC rendszer)

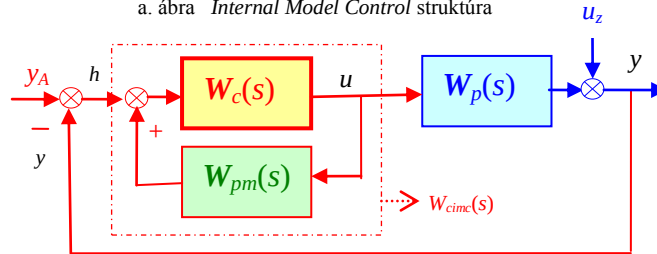
A szabályozás céljára egy olyan struktúrát is kialakíthatunk, amelyben a $W_p(s)$ átviteli függvényű folyamattal mintegy párhuzamosan működtetjük annak $W_{pm}(s)$ modelljét, és a $W_c(s)$ átviteli függvényű szabályozó bemenetére az y szabályozott jellemző és a modell y_m kimenő jelének a $v = y - y_m$ különbségét negatívan visszacsatoljuk (IMC, Internal Model Control struktúra, lásd 39a. ábra). A $W_p(s)$ és a $W_{pm}(s)$ a fizikai realizálásban elvileg nem lehet azonos, mivel $W_p(s)$ a tényleges fizikai folyamatot –, a $W_{pm}(s)$ pedig ennek elhanyagolásokat is tartalmazó matematikai modelljét szimbolizálja⁹⁰. Egyszerű hatásvázlat-algebrai átrendezéssel, az eredeti struktúrával egyenértékű olyan hatásvázlatot kaphatunk (lásd 39b. ábra), amelynek jellegzetessége, hogy a $W_c(s)$ átviteli függvénynek a $W_{pm}(s)$ folyamatmodell átviteli függvényével történő pozitív visszacsatolása alkotja a soros kompenzációs $W_{cimc}(s)$ átviteli függvényű szabályozót. A méretezés a $W_c(s)$ meghatározására irányul, mert ennek ismeretében a soros kompenzációs szabályozó $W_{cimc}(s)$ átviteli függvénye a 39b. ábra alapján:

$$W_{cimc}(s) = \frac{W_c(s)}{1 - W_c(s)W_{pm}(s)}$$

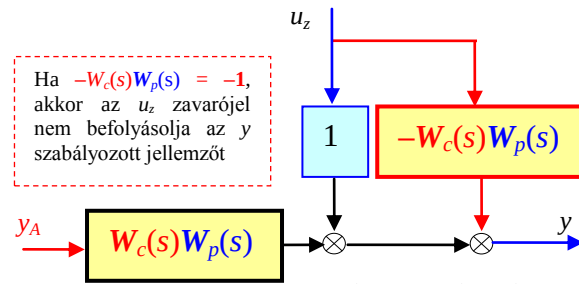
⁹⁰ Az IMC rendszer tulajdonságainak bemutatásához élhetünk azzal az egyszerűsítő feltételezéssel, hogy a folyamat $W_{pm}(s)$ matematikai modellje pontosan írja le a fizikai rendszert, ami a $W_{pm}(s) = W_p(s)$ azonosságában mutatkozik meg. Ekkor $v = y - y_m = W_p u + u_z - W_{pm} u = u_z$, vagyis a visszacsatolt $v(t)$ jel a folyamat $u_z(t)$ zavaró jele. Ez egyébként a 39a. ábra hatásvázlatából is kiolvasható. Irodalom: Garcia, C.E., and M. Morari, Internal Model Control I. A Unifying Review and Some New Results, Ind. Eng. Chem. Process Des. Dev.



a. ábra Internal Model Control struktúra



b. ábra Az egyenértékű struktúra



c. ábra Az eredő rendszer

39. ábra Az IMC rendszer különféle hatásvázlatai

A 39b. ábra egyenértékű hatásvázlata egy klasszikus soros kompenzációs hatásláncot mutat és ebben a $W_{cimc}(s)$ átviteli függvényű szabályozó bemenőjele a tényleges $h=y_A-y$ hibajelét jelenti. A nyitott és a zárt rendszer eredő átviteli függvényeit a 39b. ábra alapján számítjuk:

$$\begin{aligned}
 W_0(s) &= W_{cimc}(s)W_p(s) = \frac{W_c(s)}{1 - W_c(s)W_{pm}(s)}W_p(s) \\
 W_R(s) &= \frac{W_0(s)}{1 + W_0(s)} = \frac{\frac{W_c(s)}{1 - W_c(s)W_{pm}(s)}W_p(s)}{1 + \frac{W_c(s)}{1 - W_c(s)W_{pm}(s)}W_p(s)} = \\
 &= \frac{W_c(s)W_p(s)}{1 + W_c(s)[W_p(s) - W_{pm}(s)]}
 \end{aligned}$$

A zárt rendszer $y(s)$ szabályozott jellemzőjének függése az $y_A(s)$ alapjeltől és az $u_z(s)$ zavaró jeltől

$$\begin{aligned}
 y(s) &= \frac{W_0(s)}{1 + W_0(s)} \left[y_A(s) + \frac{1}{W_0(s)} u_z(s) \right] \\
 &= \frac{W_c(s)W_p(s)}{1 + W_c(s)[W_p(s) - W_{pm}(s)]} \left[y_A(s) + \frac{1 - W_c(s)W_{pm}(s)}{W_c(s)W_p(s)} u_z(s) \right]
 \end{aligned}$$

Ha a $W_{pm}(s)$ modell *pontosan* írja le a $W_p(s)$ átviteli függvényű folyamatot, akkor $W_{pm}(s)=W_p(s)$ feltételezéssel élhetünk. Ekkor $W_p(s)-W_{pm}(s)=0$, és ezért

$$y(s) = W_c(s)W_p(s) \left[y_A(s) + \left(-1 + \frac{1}{W_c(s)W_p(s)} \right) u_z(s) \right] = W_cW_p y_A(s) + (1 - W_cW_p)u_z(s)$$

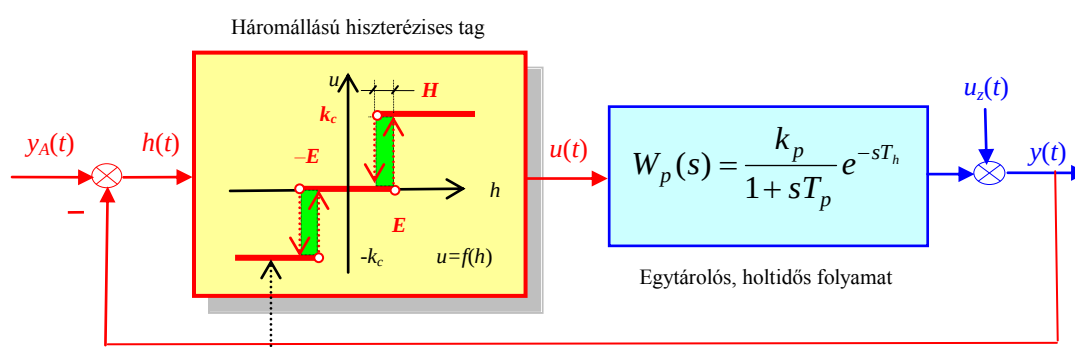
Az **IMC** struktúra az y_A alapértéknek az y -ra gyakorolt hatásának szempontjából *felnyitja a zárt hatásláncot*, a zárt rendszert direkt módon „támadó” u_z zavarójel hatásvonalába pedig $1 - W_c(s)W_p(s)$ átviteli függvényű tagot iktat (lásd 39c. ábra). Ez az eredő rendszer tulajdonságait leíró kifejezés támpontot ad a szabályozó $W_c(s)$ átviteli függvényének megválasztására: $W_c(s)=1/W_p(s)$ alkalmazásával ugyanis

$$y(s) = y_A(s) + (1-1)u_z(s) = y_A(s)$$

lehetne. Ennek jelentése, hogy az y szabályozott jellemző *azonos* az y_A alapértékével és *független* az u_z zavaró jeltől. A megvalósítás nehézségeit most is a folyamat $1/W_p(s)$ inverz átviteli függvényének realizálása jelenti, vagyis csak olyan stabilis, holtidő nélküli folyamatokról lehet szó, amelyeknek átviteli függvényeiben a számláló és nevező polinomok fokszámai azonosak. A $W_{cimc}(s)$ realizálásának ezen túlmenően az is akadály, hogy a szabályozó realizálásában a $W_c(s)=1/W_p(s)$ és a $W_{pm}(s)=W_p(s)$ átviteli függvényű tagok *pozitív visszacsatolású*, egységnyi *körerősítésű* (eredőben egy végtelenül nagy erősítési tényezőt jelentő) *algebrai hurkot* alkotnak.

Állásos szabályozás

Meg kell említeni az egyszerűségénél és költségigényénél fogva igen nagy gyakorisággal alkalmazott *állásos szabályozás* struktúráját és tulajdonságait is. Ennek egyik tipikus esete a háromállású szabályozás (lásd 41. ábra). A szabályozó h bemenő-, és u kimenő jelei között algebrai függvénykapcsolat van, amelyet az $u=f(h)$ statikus karakterisztika szemléltet. Ennek meghatározó adata a **H** hiszterézis értéke (ami azt fejezi ki, hogy az állásos tag u kimenő jelének „be”-, illetve „ki” kapcsolása nem azonos h hibajel értéknél következik be), az **E** érzéketlenségi sáv⁹¹ és a **k_c** kapcsolási érték. A zárt hurok y szabályozott jellemzőjének időbeli lefolyásában a **H** hiszterézisnek és a folyamat T_h holtidejének *meghatározó* szerepe van.



Háromállású szabályozó $u=f(h)$ statikus karakterisztikája

$E \geq 0$: érzéketlenségi sáv, $H > 0$: kapcsolási hiszterézis, $k_c > 0$: kapcsolási érték

41. ábra Háromállású szabályozás hatásvázlata

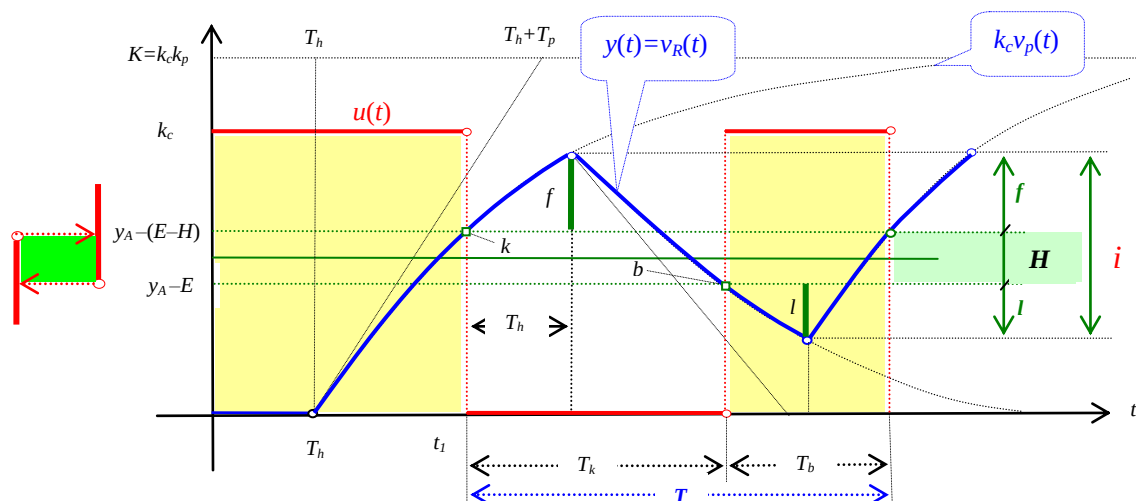
⁹¹ Ha a $h(t)$ hibajel a $-E < h < E$ érzéketlenségi sávban van, a szabályozó „nem szólal meg”, vagyis az u irányító jel ekkor zérus.

A szabályozó $u(t)$ kimenő jele kizárólag k_c , 0 és $-k_c$ értékeket vehet fel attól függően, hogy mekkora a $h(t)=y_A(t)-y(t)$ hibajel aktuális értéke (lásd a 42. ábrát). Ha a $h(t)$ hibajel a $-(E-H)$ vagy az $(E-H)$ intervallumban van, az $u(t)$ értéke 0 vagy $\pm k_c$, attól függően, hogy a hibajel *milyen irányból* közelíti meg a kapcsolási értéket. A szabályozó $u=f(h)$ statikus karakterisztikájából egyrészt az következik, hogy abban az esetben, ha a zérus értékű jelekkel nyugalomban lévő rendszerben az y_A bemenőjel növelésével a h hibajel a $-E < h < E$ intervallumban van, az u irányító jel zérus. Ez azt jelenti, hogy a szabályozó „megszólalásához” a hibajelnek ki kell lépnie az érzéketlenségi sávból. Másrészt viszont ha az y_A alapjel meghaladja a $K+(E-H)$ értéket, a $h=y_A-y$ hibajel $K+(E-H)-K=E-H$, a szabályozó $u=k_c$ értékről $u=0$ értékre *visszakapcsolni* nem tud ($K=k_c k_p$ a telítődési határ). A zárt szabályozási rendszer üzemtanának tárgyalásához a folyamatot az egytárolós, holtidős, önbeálló taggal modellezzük.

Ha zérus alapérték és zavarójel mellett a rendszer nyugalmi állapotában (mikor is $y_A=u_z=0$ és $h=u=y=0$) az y_A alapértéket $\Delta y_A \ll E$ *kis lépésekben* növeljük, akkor az u és y jelek zérus értékűek maradnak mindaddig, amíg $y_A < E$. Az u és y jelek akkor változhatnak meg, ha $y_A > E$ értéket vesz fel. Ha a kapcsolás bemenetére $y_{A0} \mathbf{1}(t)$ ugrásjelet kapcsolunk, akkor $E < y_{A0} < K+(E-H)$ alapérték mellett az irányító jel azonnal $u(t)=k_c \mathbf{1}(t)$ értékre vált, és $y(t)$ a folyamat $v_p(t)$ *átmeneti* függvényének megfelelően a

$$y(t) = \begin{cases} 0 & 0 < t \leq T_h \\ K[1(t-T_h) - e^{-\frac{t-T_h}{T_p}}] & t > T_h \end{cases}$$

$K=k_c k_p$ végértékéhez tartva növekedni, a $h(t)=y_{A0} \mathbf{1}(t)-y(t)$ hibajel pedig – a T_h holtidő elteltét követően – csökkenni kezd (a $-K < y < K$ *kivezérlés* teljes tartománya). Ez a folyamat mindaddig a t_1 időpontig tart, amíg $y(t)$ el nem éri az $y_{A0}-(E-H)$ értékét. Ha ez bekövetkezik a hibajel $h(t_1)=y_{A0}-y(t_1)=y_{A0}-[y_{A0}-(E-H)]=E-H$ értéket vesz fel és ezért a háromállású tag az $u(t_1)=k_c$ jelet zérusra veszi vissza (lásd a k kikapcsolási pontot). Az u jel zérussá válásának ellenére az $y(t)$ – a T_h holtidő miatt – tovább növekszik, és csak *f túlfutása* után kezd zérus végértéke felé tartva visszafordulni (lásd 42. ábra).



42. ábra Az állásos szabályozás $u(t)$ és $y(t)=v_R(t)$ jelei

Az ábra alapján láthatjuk, hogy állandó y_{A0} alapérték mellett a t_1 időpontot követően a hiszterézis hurok sorozatos körbejárása mellett az $u(t)$ irányító jel és az $y(t)$ szabályozott jellemző $T=T_k+T_b$ periódusidejű kvázistacioner lengése jön létre. A t_1 időpillanatban – miután y értéke $y_{A0}-(E-H)$ értéket elérte (lásd k pont) – az állásos tag az irányító jelet zérus értékre

kapcsolja vissza, de y (a holtidős késleltetés miatt) még T_h ideig tovább növekszik, és a k kikapcsolási pontot meghaladó **f túlfutása** keletkezik. Az irányító jel újabb k_c értékre történő visszakapcsolása akkor következik be, amikor az y értéke $y_A - E$ értékre csökken (lásd b pont), de y (a holtidős késleltetés miatt) még T_h ideig tovább csökken, és a b bekapcsolási pontot meghaladó **l aláfutása** jön létre. Az **f** és **l** értékeket a folyamat T_h holtideje szabja meg, és $T_h=0$ esetében az y szabályozott jellemző i ingadozási sávja ($f=l=0$ következményeként) a H hiszterézis értékére redukálódik. A 42. ábra alapján már levonható az a következtetés, hogy a folyamat T_h holtideje az **f** túlfutást és az **l** aláfutást alapvetően befolyásolja, és ha ezek az értékek a teljes kivezérlés K tartományához képest nagyok, az állásos szabályozás az **$i=f+l+H$** ingadozási sáv nagy értéke miatt használhatatlan.

Megjegyzés

Az y szabályozott jellemző $T_h \neq 0$ mellett tehát egy i ingadozási sávban periodikusan leng, az ingadozási sávjának értéke **$i=f+l+H$** , részletezve:

$$f = [K - (y_A - (E - H))](1 - e^{-\frac{t}{T_p}}) \Big|_{t=T_h} = [K - (y_A - (E - H))](1 - e^{-\frac{T_h}{T_p}})$$

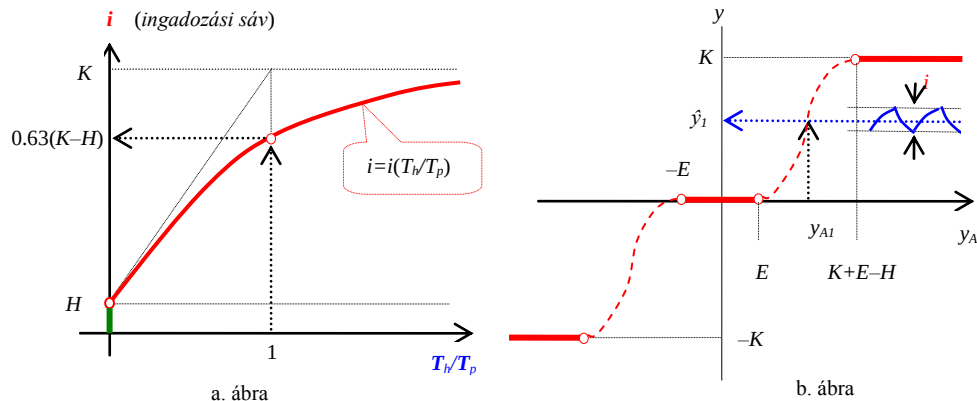
$$l = (y_A - E)(1 - e^{-\frac{t}{T_p}}) \Big|_{t=T_h} = (y_A - E)(1 - e^{-\frac{T_h}{T_p}})$$

És ezek alapján:

$$i = H + f + l = H + (K - H)(1 - e^{-\frac{T_h}{T_p}})$$

A **i** ingadozási sáv értéke az állásos szabályozó **H** hiszterézisének, a **K** kivezérlési tartománynak és a folyamat **T_h/T_p** viszonszámának a függvénye (lásd 43a. ábra). A folyamat $T_h/T_p=1$ paramétere és a szabályozó $H=0$ hiszterézise mellett az ingadozási sáv a teljes K kivezérlési tartománynak kb. 63% –a, ami *gyakorlati szempontból* labilis (csillapítatlan lengő) rendszert jelent. Mindezek miatt **T_h/T_p** viszonszámnak az egységet megközelítő értékei mellett az állásos szabályozó a feladatának ellátására *alkalmatlan*. $T_h=0$ esetében az ingadozási sáv **$i=H$** , és H tetszőlegesen **kis** értékre választható. Ez utóbbi esetben viszont a T periódusidő zérushoz, az $1/T$ kapcsolási frekvencia *végtelenhez* tart. Ha az állásos szabályozó elektromechanikus kapcsoló, a kis hiszterézis is – a kapcsoló nagy igénybevétele miatt – problémákat okozhat⁹².

⁹² Elektronikus kapcsoló esetében a nagyfrekvenciás üzemmód is megengedhető, ami lehetővé teszi a kis hiszterézisű állásos tag alkalmazását is.

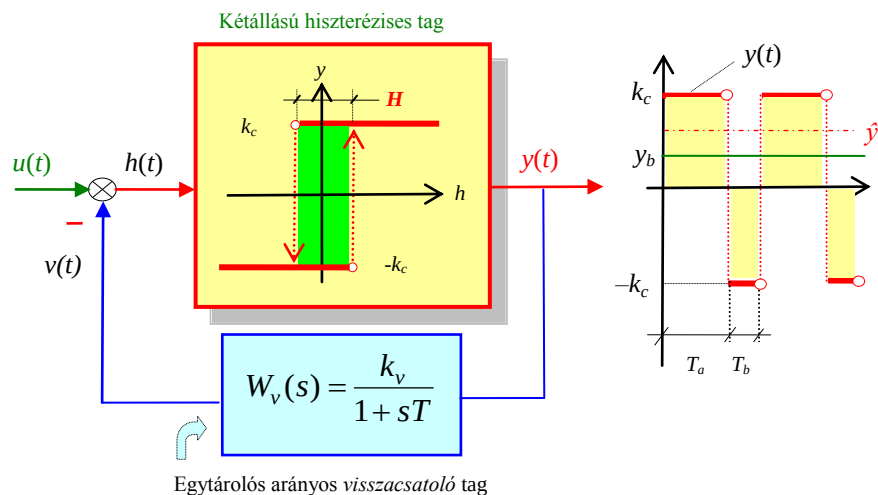


43. ábra Állásos szabályozás ingadozási sávja és statikus karakterisztikája

Miután az u irányító jel három $(0, +k_c, -k_c)$ diszkrét értékeket vehet fel, ezért az y szabályozott jellemző is kizárólag a $-K < y < K$ intervallumban változhat. Ha az y_A alapértéket kis lépésekben a zérus értékéről növeljük, az $y_A = E$ eléréséig az y kimenőjel zérus (lásd a rendszer hatásvázlatát és a szabályozó statikus karakterisztikáját). y_A további növelésével y egy $\bar{y}$ középvérték körüli i ingadozási sávban periodikusan változik. Amikor az y_A bemenő jellel meghaladjuk az $y_A = K + E - H$ értéket, a kétállású kapcsoló visszakapcsolni már nem tud, és a kimenő jel $y = K$ értéken állandó marad (lásd 43b. ábra). A pozitív y_A bemenőjel szempontjából a kétállású szabályozás működési tartománya (ahol is az y_A bemenőjel megváltozásának hatására az y kimenőjel is megváltozni képes) $E < y_A < K + E - H$. A működési tartományban a szabályozott jellemző $\bar{y}$ középvértéke y_A nemlineáris függvénye, de közelítőleg $\bar{y} = y_A$. Hasonló megfontolásokat tehetünk az u_z zavarójelre vonatkozó működési tartományra is, vagyis a zavarelhárítás is csak egy adott intervallumban lévő zavarójel esetén juthat érvényre. A zavarelhárítás szempontjából lényeges tulajdonság, hogy egy állandó y_A alapérték mellett bármekkora is a működési tartományban lévő zavarójel értéke, az y szabályozott jellemző i ingadozási sávjának helyzete és értéke *ugyanaz* marad.

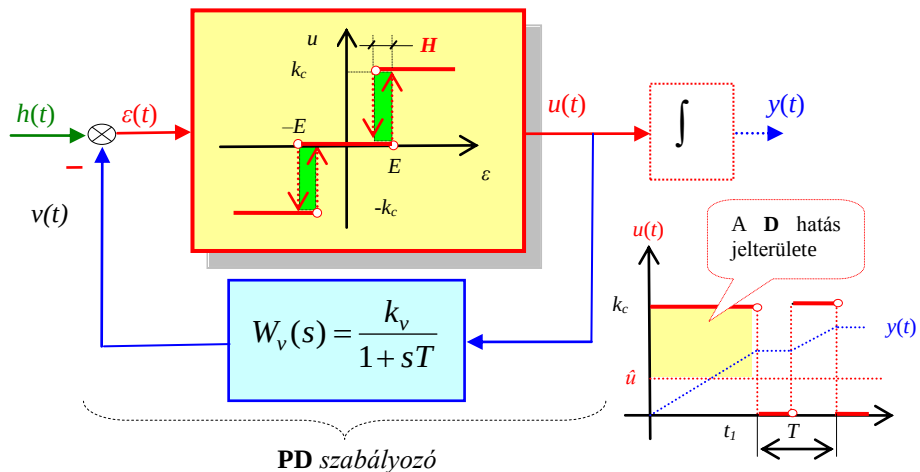
Megjegyzés

Az állásos tagot tartalmazó visszacsatolt struktúrának két egyéb alkalmazását is megemlítyük. Ezek egyike az impulzusszélesség moduláció (**PWM**), amikor is az u folytonosidejű bemenőjellel a kétállású tag y kimenőjelét változtatjuk, és a negatív visszacsatolásba egy tárolós arányos taggal leírható fizikai objektumot helyezünk (lásd 44. ábra).

44. ábra Impulzusszélesség moduláció (**PWM**)

Ez az elrendezés hasonló a 41. ábrán vázolt szabályozási struktúrához, de most az állásos tag E érzéketlenségi sávja zérus, a visszacsatolásban lévő dinamikus tag holtidő mentes ($T_h=0$), és a rendszer kimenő jelének az állásos tag $y=\pm k_c$ értékeket felvevő időfüggvényét tekintjük. Ez a jel (egy u_0 állandó bemenőjel mellett) a $+k_c$ értékeket T_a ideig, a $-k_c$ értéket T_b ideig veszi fel, és a T_a/T_b arány az u_0 jellel befolyásolható. A folytonosidejű $u(t)$ bemenő jellel a T_a és T_b idők, és ennek révén az y kimenőjel impulzusainak szélessége (a kitöltési tényező) változtatható.

Egy másik alkalmazásban (lásd 45. ábra) a háromállású tag egy tárolós arányos tagon keresztül történő negatív visszacsatolása **PD** hatás létesítésére is alkalmas. Ennek az elrendezésnek az üzemtani tulajdonságai is a 41. ábrán tárgyalt elrendezés üzemtanára vezethetők vissza.



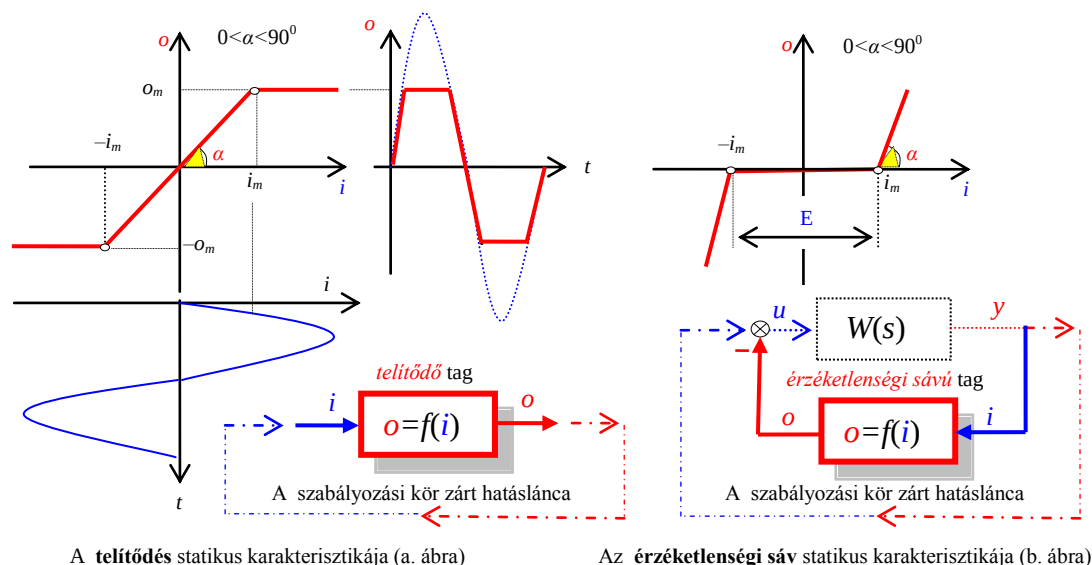
45. ábra **PD** szabályozó realizálása impulzusszélesség modulációval

Ha az elrendezést egy sorosan kapcsolt integráló taggal is kiegészítjük, **PI** szabályozót hozhatunk létre.

A hatásláncban szereplő néhány fontosabb nemlineáris tulajdonság

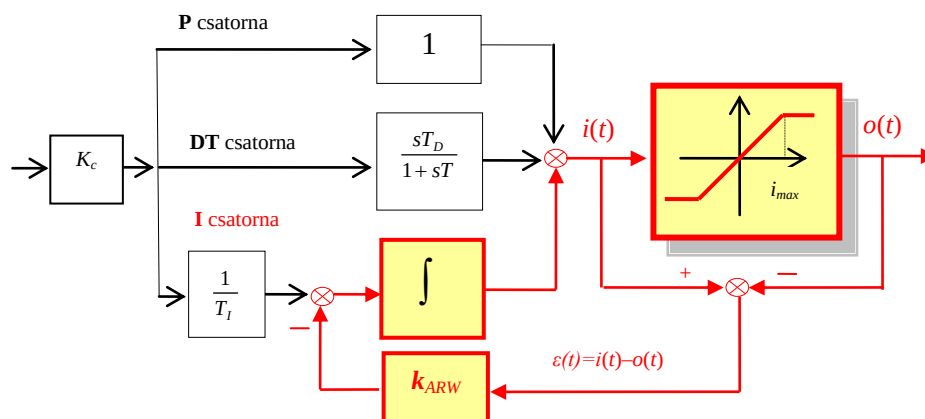
A szabályozási rendszerek működésében többféle (parazita, illetve szándékoltan létesített) nemlinearitás is szerepet játszik. Ezek egyike az általánosan jelenlévő **telítődés** jelensége, amely jelentős mértékben a beavatkozó szerv „felütközéséből” származik (pl. egy térfogatsebességet befolyásoló szelep működési tartományának határára érhet, vagy egy teljesítményerősítő kimenő feszültsége eléri a tápfeszültség értékét, stb.). Ennek hatása egy olyan algebrai tulajdonságú taggal írható le, amely a hatásláncba *sorosan* beiktatva van jelen, és i *input* (bemenő) és o *output* (kimenő) jelei közötti függvénykapcsolata az

$$o = f(i) = \begin{cases} o_{\max} & i(t) > i_{\max} \\ ki(t) & |i(t)| \leq i_{\max} \\ -o_{\max} & i(t) < -i_{\max} \end{cases}$$

46. ábra A telítődés és az érzéketlenségi sáv $o=f(i)$ statikus karakterisztikái

kifejezéssel, illetve az ennek megfelelő statikus karakterisztikával jellemezhető (lásd a 46a. ábrát). Ha a zárt rendszer üzemelésének folyamatában a telítődő tag $i(t)$ bemenő jele eléri az i_m értékét, az $o(t)$ jel tovább növekedni nem képes, a tag működésének az ún. telítődési tartományába kerül. Mivel a telítődési tartományban $o(t)=o_m=\text{állandó}$, a jelenség olyan, mintha a *zárt hurok nyitottá válna*, hiszen ebben az $|i(t)|>i_m$ tartományban a bemenőjel változásaira az $o(t)$ kimenő jel *nem reagál*, tehát a követési és zavarelhárítási hatásmechanizmus sem tud érvényre jutni. A szabályozó tervezése során a zárt rendszer eredő $v_R(t)$ átmeneti függvényének a végértékére történő gyors beállását kizárólag az u irányító jel **túlvezérlésével** lehetséges megvalósítani. Ha a túlvezérlés a telítődés miatt nem tudja a hatását kifejezteni, ez a tranziens folyamatokat is lelassítja.

Egy más jellegű probléma a zárt kör működésében a **PI**, vagy **PID** szabályozó *integráló* csatornájának a telítődés okozta „elintegrálódása”. Ez azt jelenti, hogy a beavatkozó szerv esetleges telítődése miatt a folyamat kimenő jele a saját dinamikája szerint változik, ez változtatja a szabályozó bemenő jelét (a hibajelet), ami az **I** csatorna kimenő jelét is indokolatlan mértékben növeli. A hibajel előjelváltásakor a rendszer ugyan visszakerülhet a telítődő tag lineáris szakaszára, de az *elintegrálódás* miatt ez hosszú időt igényelhet, vagy káros lengések is keletkezhetnek. A probléma megoldását az **ARW** (**Anti Reset Windup**) alkalmazása teszi kezelhetővé (lásd 47. ábra), aminek lényege, hogy az **I** csatornát a *telítődés bekövetkezésekor* a k_{ARW} átviteli tényezővel negatívan visszacsatoljuk, és ezzel az elintegrálódást megakadályozzuk. (Az egységnyi meredekségű telítődő tag $o(t)$ kimenő jele azonos az $i(t)$ bemenő jelével, ha $i(t)$ a telítődő tag karakterisztikájának lineáris szakaszán van. Ekkor $\varepsilon(t)=i(t)-o(t)=0$, és az **I** tag *nincs* visszacsatolva. Ha $|i|>i_{max}$, $|\varepsilon|>0$, és érvényesül az **I** tag negatív visszacsatolása, ami az integráló csatornát egytárolós arányos taggá alakítja).

47. ábra Az Anti **Reset Windup** hatás szemléltetése

Miután az analóg (folytonosidejű) szabályozók integráló csatornájának közvetlen bemenetéhez általában nem lehet hozzáférni, ez a technika a **DDC** (diszkrétidejű) szabályozók alkalmazásakor célravezető. A telítődés jelenségének előnyös tulajdonsága is lehet (ezért gyakran szándékoltnak is létrehozzák a zárt hatáslánc jelfolyamában), mert például a paraméterváltozások miatt esetlegesen bekövetkező labilis rendszerben nem engedi a jelek korlátok nélküli növekedésének kialakulását.

Egy másik, szintén gyakran alkalmazott nemlinearitás az **érzéketlenségi sáv** (lásd 46b. ábra). Ennek kimenetén kizárólag akkor keletkezik $o(t)$ kimenőjel, ha $|i(t)|$ bemenő jele az i_m értéket meghaladja, egyébként a kimenő jel zérus. Az $o=f(i)$ függvénykapcsolat:

$$o = f(i) = \begin{cases} 0 & |i(t)| < i_{\max} \\ k[i(t) - i_{\max}] & |i(t)| > i_{\max} \end{cases}$$

(a bemenőjel $-i_m < i < i_m$ tartománya az **E** érzéketlenségi sáv). Egyik alkalmazási példája a $W(s)$ átviteli függvényű tag *negatív* visszacsatolása érzéketlenségi sávval rendelkező taggal. Ilyen esetben védelmi célzatú a visszacsatolás, amely akkor fejt ki hatását, ha a visszacsatolt tag $|y|$ kimenő jele az $|i_m|$ értéket eléri, illetve meghaladja. A szabályozás hatáslánca a visszacsatolás működésekor nem válik nyitottá (mivel $0 < \alpha < 90^\circ$), de a hatáslánc $W(s)$ átviteli függvényű tagja helyett ennek a visszacsatolásával keletkezett tag eredő jelátviteli tulajdonságai jutnak érvényre⁹³.

Az előzőekben tárgyalt nemlineáris statikus karakterisztikák (két-, és háromállású tag, telítődő tag, érzéketlenségi sávval rendelkező tag) jellemző tulajdonságai a jelleggörbék *szakaszonkénti* lineáris tulajdonsága, ami lényegében a zárt rendszernek is szakaszonkénti lineáris jelleget biztosít. Természetesen egyéb $o=f(i)$ függvénnyel jellemzett nemlinearitások is lehetnek a zárt hatásláncban, amelyekre a szakaszonkénti linearitás nem biztosított, ezért az ilyen rendszerek jelátviteli viszonyainak vizsgálata is nehezebb eljárásokat igényel⁹⁴.

⁹³ Az érzéketlenségi sáv egyik tipikus alkalmazási területe a hajtásszabályozások áramkorlátozása, amikor is az armatúraáram adott i_m értélénél az érzéketlenségi sávval kialakított védelem „megszólal”, és a kapocsfeszültség drasztikus csökkentésével az armatúraáramot korlátok között tartja.

⁹⁴ Csáki Frigyes: Szabályozások dinamikája. Akadémiai Kiadó.

Végső következtetések

Mint a korábbiakban láthattuk a szabályozó méretezésének alapfeltétele, hogy a **folyamat differenciálegyenlete** (matematikai modellje), illetve az ennek megfelelő $W_p(s)$ **átviteli függvénye ismert** legyen. Ez az átviteli függvény az u irányító jel és az y szabályozott jellemző közötti jelátviteli tulajdonságokat írja le, és tartalmazza az egymással soros kapcsolást alkotó *előerősítő*, a *teljesítményerősítő*, a *végrehajtó szerv*, a *helyzetbeállító*, a *beavatkozó szerv*, a szabályozott technológiai **folyamat**, az *érzékelő szerv*, a *távadó* együttesének eredő dinamikus tulajdonságait. Ennek az átviteli függvénynek a meghatározása a legnehezebb feladat, nem ritkán kísérleti vizsgálat elvégzését (pl. az u bemenő-, és az y kimenőjelek közötti átmeneti függvény felvételét, és ebből a matematikai modell meghatározását) igényli. Különös gondossággal kell eljárni az **érzékelő szerv** (*sensor*) kiválasztása során, mivel ennek pontossága a rendszer pontosságát is megszabja. Az érzékelés a szabályozási hurok visszacsatolási ágában van, és az y szabályozott jellemző és az u_a alapjel közötti átviteli tényezőt az érzékelés A_E átviteli tényezője szabja meg (állandósult állapotban $y_0 \approx u_{a0}/A_E$). Hasonlóan gondos mérlegeléssel kell kiválasztani a folyamat módosított jellemzőjét (*manipulated variable*) és az ezt befolyásoló **beavatkozó szervet** (*actuator*), mivel ennek segítségével tudunk a szabályozott jellemzőre *szándékolt* befolyást gyakorolni. A beavatkozás többnyire energiaigényes feladat, ezért a beavatkozó szerv energetikai méretezést is igényel. Az érzékelő- és a beavatkozó szervek ún. *terepi* készülékek, szerkezeti-áramkörü kialakításuknak ennek kell megfelelni. A szabályozási hatáslánc problémamentes része ma már maga a szabályozó (*controller, regulator*), mivel az ezt realizáló eszköz szabadon programozható ipari kivitelben készült **digitális számítógép**, amelynek paraméterei pontosak és időállóak. A korábbi évtizedekben ez nem volt így, mivel a szabályozót is folytonosidejű jelekkel működő áramkörök, szerkezetek realizálták (elektronikus-, pneumatikus-, hidraulikus szabályozók). Magában a hatásláncban szereplő egyes szervek önmagukban is visszacsatolást tartalmazó dinamikus rendszerek (pl. a helyzetbeállító, a teljesítményerősítő, az érzékelő szerv, a tápegység, hidraulikus és pneumatikus szerkezetek, vagy az A/D átalakítók egyes típusai, stb.), ezért dinamikus tulajdonságaiknak alakításában mindazok a módszerek, amelyek a teljes szabályozási rendszer analízisében és szintézisében felhasználásra kerülnek, a részelemek tervezésében is meghatározó szerepet kapnak. A szabályozási rendszerrel szemben **követési** és **zavarelharítási** követelményeket kell támasztani, és ezek kielégítésére az u **irányító jel** megfelelő változtatása áll rendelkezésre.

Megjegyzés

A folyamatszabályozásokban a szabályozót gyakran *digitális számítógép* realizálja, de az így keletkezett hibrid rendszer tranziens jelenségei lényegében a folytonosidejű rendszerek tranzienseihez hasonlóan alakulnak. Ennek oka az, hogy a zárt rendszer legkisebb időállandójához képest is a T_s mintavételezési idő általában elhanyagolható, ezért az irányító jel „lépcsős” alakja (a megfelelő felbontású A/D és D/A átalakításnak is köszönhetően) gyakorlatilag azonos a folytonos $u(t)$ irányító jellel, és ezért az $y(t)$ szabályozott jellemzőre gyakorolt hatásukban nem mutatható ki észrevehető különbség. A diszkrét működésmód akkor kap jelentőséget, ha valamilyen különleges szabályozási algoritmus (pl. véges beállítás, időoptimalis rendszer, *Smith* szabályozó, stb.) alkalmazására kerül sor. Ez utóbbi esetekben a hibrid szabályozás **diszkrétidejű modelljével** célszerű dolgoznunk, ahol a szabályozási hatáslánc mindkét alrendszerét az állapot *differenciaegyenletével* írjuk le, illetve ezt a matematikai modellt a diszkrét idő tartományról a Z -transzformáció segítségével a z operátor tartományra képezzük le. Ez a leképezés teremti meg annak a lehetőségét, hogy a *differenciaegyenletek* helyett *algebrai* egyenletekkel dolgozzunk (a Z -transzformáció a diszkrét modell analízisében hasonló szerepet játszik, mint amilyen szerepet a folytonos rendszerek analízisében a *Laplace* transzformáció betöltött). A folyamat és a szabályozó ekkor a $W_p(z)$ illetve a $W_c(z)$ impulzusátviteli függvényekkel jellemezhető. Egyes szabályozási algoritmusok (pl. *Smith* szabályozó) igénylik a folyamat T_h holtidejének megfelelő $\exp(-sT_h)$ átviteli függvényű tagnak a szabályozóban megvalósított realizálását, ami a **folytonosidejű (FI)** szabályozó esetében csak körülményesen és közelítésekkel lenne lehetséges, a **diszkrétidejű (DI)** szabályozóban viszont nehézség nélkül megvalósítható (ha egyébként a T_h holtidő a T_s mintavételezési idő egészszámszámú többszöröse). A **DI** rendszerek

analízisének és szintézisének kérdéseit a megelőző fejezeteiben tárgyaltuk, ezért ezekre ebben az összefoglaló részben nem térünk ki. Egyetlen kivételt teszünk, ez a **folytonosidejű PID** szabályozó **diszkrétidejű** megfelelőjének egységugrás ekvivalens (SRE: **Step Response Equivalent**) szabályozási algoritmus, amelyet ennek *impulzusátviteli függvénye* reprezentál. Részletezve:

$$\begin{aligned} W_c(z) &= Z\left\{\frac{1-e^{-sT_s}}{s} K_c\left(1 + \frac{1}{sT_i} + \frac{sT_D}{1+sT}\right)\right\} = \\ &= (1-z^{-1})K_c Z\left\{\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2T_i} + \frac{T_D}{1+sT}\right)\right\} \\ &= K_c \left[1 + \frac{1}{T_i} \frac{T_s}{(z-1)} + \frac{T_D}{T} \frac{z-1}{z-e^{-\frac{T_s}{T}}}\right] = \\ &= \frac{c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2}}{1 + d_1 z^{-1} + d_2 z^{-2}} = \frac{u(z^{-1})}{h(z^{-1})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(kT_s) &= -d_1 u[(k-1)T_s] - d_2 u[(k-2)T_s] + \\ &+ c_0 h(kT_s) + c_1 h[(k-1)T_s] + c_2 h[(k-1)T_s] \end{aligned}$$

Az összefoglalásban a folytonosidejű rendszerek szabályozási struktúráit tárgyaltuk, de természetesen minden **FI** rendszer analóg szabályozója **DDC** szabályozóval is kiváltható. Az így keletkezett *hibrid* rendszernek létezik a diszkrétidejű matematikai modellje (**DI** rendszermodell), melynek analízise és a szabályozó tervezésének módszere sok *formális* hasonlóságot mutat az **FI** rendszerek analíziséhez és az analóg szabályozó tervezési módszereihez (lásd a 10. és 11. Füzetekben közölt anyagrészeket).

Az analízist, a tervezést, és a szimulációt támogató számítógépes rendszerek

A folytonosidejű, a diszkrétidejű és a hibrid szabályozási rendszerek *analízise* során – a szabályozó és a folyamat matematikai modelljeinek ismerete alapján – általában magas rendszámú differenciálegyenletek, vagy differenciaegyenletek megoldásait kell a determinisztikus vizsgálójelekre (pl. *Dirac delta*, *egységugrás*, *sebességugrás*, *harmonikus jelek*) meghatározni. Ennek során rendszerint az adott $y_A(t)$ alapjel és $u_z(t)$ zavarójel mellett a $h(t)$ hibajel, az $u(t)$ irányító jel és az $y(t)$ szabályozott jellemző *időfüggvényeinek* kiszámítása a feladat. **A szintézis esetében az ismert folyamatmodell mellett és a zárt rendszerre megfogalmazott követelmények alapján olyan szabályozási algoritmus, illetve a szabályozó alrendszerének szerkezeti-áramköri megtervezése a célkitűzés, amelynek alkalmazásával a zárt rendszer az előírt követelményeknek megfelelő tulajdonságokkal rendelkezik.** A számítógépek által nyújtott szolgáltatások megjelenése előtt mind az analízis, mint pedig a szintézis – a számítások munkaigényessége miatt – igen hosszadalmasak és fáradságosak voltak (gondoljunk csak arra az „egyszerű” esetre, amikor egy másodrendű differenciálegyenletnek adott kezdeti feltételekre és gerjesztésre vonatkozó megoldását kellene elvégeznünk). Ha a matematikai modell megfelelő pontossággal írja le a szabályozási rendszer alrendszerének (és ez által, magának a teljes zárt rendszernek is) a tulajdonságait, a paraméterváltozások hatásainak nyomon követésére a számításokat sokszor kellett megismételni. Az időtartományból az operátor tartományra történő áttérés (a *Laplace*– és *Z*–transzformációk) a lineáris rendszerek analízisében ugyan jelentős egyszerűsítést eredményeztek (az operátor tartományban a differenciálegyenletek, illetve a differenciaegyenletek helyett **algebrai** egyenletekkel dolgozhatunk), de az időtartományba való visszatérés (az inverz transzformáció) továbbra is jelentős mértékű numerikus számítás elvégzését igényli⁹⁵.

⁹⁵ A megfelelő gyakorlati tapasztalattal rendelkező szabályozástechnikus nem szorul rá az inverz transzformáció végrehajtására, mivel az átviteli függvényekből is lényeges következtetéseket tud levonni.

A szabályozási rendszerek vizsgálatához nyújtott számítógépes szolgáltatások jelentősen megkönnyítették az analízis és szintézis eljárásait⁹⁶, ezek egyike a **MATLAB**[®] programrendszer által felkínált lehetőségek felhasználása. A **MATLAB** 80386 matematikai alapverziója kb. 250 függvényt, a **Control System Toolbox** több mint 100 függvényt tartalmazott⁹⁷. Ezen függvények egy részét a tárgyalt példák során többször felhasználtuk. A gyakran használt függvények az alábbiak:

Az **FI**, **DI** és hibrid rendszerek analíziséhez használt fontosabb **MATLAB** függvények⁹⁸

FI	DI
<code>step;lsim;bode;nyquist;dcgain;</code>	<code>dstep;dlsim;dbode;dnyquist;ddcgain;</code>
<code>damp;impulse;initial;printsys(G,H,'s');</code>	<code>ddamp;dimpulse;dinitial;printsys(G,H,'z');</code>
<code>[Gz,Hz]=c2dm(Gs,Hs,Ts,'zoh');</code>	
<code>[Ad,Bd,Cd,Dd]=c2dm(A,B,C,D,Ts,'zoh');</code>	

`series,parallel,cloop,feedback,rlocus,rlocfind,residue,minreal,roots,pzmap,plot,subplot,title, xlabel,ylabel,grid,zgrid,hold,clf,logspace,linspace,conv,eig,polyval,polivalm,deconv,canon, tf2ss,tf2zp,ss2tf,ss2zp,zp2tf,zp2ss,ctrb,obsv,vander,rank,acker,place,lqr,lqry,are,ones,zeros, det,sin,cos,tan,sinh,cosh,tanh,atan,atan2,sqrt,sqrtm,abs,real,imag,angle,sign,exp,expm,log, logm, log10,ode23,ode45,fzero,fmin,fsolve,max,min,else,end,for,while,return,keyboard,help, stb.`

A **MATLAB help** utasítása segítséget nyújt az egyes függvények megismeréséhez, ismerteti szerkezetének alakját, és rendszerint példával is illusztrálja a meghívott utasítás használatát (pl. >> **help lsim** (enter) részletesen leírja az *állapotegyenletével*, vagy az *átviteli függvényével* reprezentált lineáris **FI** dinamikus rendszer adott $x(0)$ kezdeti feltétellel és $u(t)$ gerjesztésre vonatkozó $x(t)$, $y(t)$ megoldásának eljárását, a >> **help dlsim** (enter) részletesen leírja az *állapot differenciaegyenletével*, vagy az *impulzusátviteli függvényével* reprezentált **DI** lineáris dinamikus rendszer adott $x(0)$ kezdeti mintára és $u(k)$ gerjesztés mintasorozatra vonatkozó $x(k)$, $y(k)$ megoldásának eljárását, vagy a >> **help eig** (enter) leírást ad az állapotmátrix sajátértékeinek és sajátvektorainak meghatározásáról, stb.).

A **MATLAB** egy olyan programcsomag, amely alkalmas mérnöki és tudományos számítások elvégzésére, az eredmények grafikus megjelenítésére, valamint szimulációs vizsgálatokra. Utasításkészlete *toolboxok* felhasználásával különféle tudományterületekre terjeszthető ki (**Control System Toolbox**, **Nonlinear Control Design Blockset**, **Robust Control Toolbox**, **Model Predictive Control Toolbox**, **Fuzzy Logic Toolbox**, **Signal Processing Toolbox**, **Neural Network Toolbox**, **Image Processing Toolbox**, **Symbolic Math Toolbox**, stb.). A **MATLAB** un. mátrix orientált nyelv, amely soronként hajtja végre az utasításokat. Alapeleme a **MATLAB** prompt (<<) után bevitt

<< változó=kifejezés; (enter)

típusú utasítás. Például az

<< [y,x]=lsim(A,B,C,D,u,t,x0);

változó

kifejezés

⁹⁶ Az analízist és szintézist támogató különféle programcsomagok: **Mathematica**, **Maple**, **SysQuake**, **LabView**, stb.

⁹⁷ Jelenleg a 7.12 (R2011b) verzió van forgalomban, ami a használható függvényeket az alapverzióhoz képest ennek többszörösére bővítette és a felhasználhatóságot is jelentősen szélesítette.

⁹⁸ Irodalom: **MATLAB**[™] for 80386 MS-DOS Personal Computers, **Adrian Biran Moshe Breiner: MATLAB for Engineers**. Addison-Wesley. **Eva Part-Enender, Anders Sjoberg, Bo Melin, Pernilla Isaksson: THE MATLAB[®] HANDBOOK**. Addison-Wesley. **Hetthessy Jenő-Bars Ruth-Barta András: Szabályozástechnika MATLAB[®] gyakorlatok**. Műegyetemi Kiadó.

utasítás végrehajtásakor az előzetesen megadott és az A, B, C, D, u, t, x_0 változóiban tárolt adatok alapján a $0 < t$ időintervallumban megoldásra kerül az állapotegyenletével leírt lineáris rendszer adott $x(0)$ kezdeti feltételre és $u(t)$ gerjesztésre vonatkozó $y(t)$, $x(t)$ megoldása (a változók nevének *mérete* maximálisan 31 karakter lehet, de az első karakter nem lehet szám). A numerikus számítás lépésközt az A állapotmátrix sajátérték eloszlása alapján az eljárás automatikusan megválasztja. Az eredmények – a kifejezés végrehajtását követően – az y, x, t nevű változókba kerülnek elhelyezésre. Ha utasításként egy

<< kifejezés; (enter)

típusú **MATLAB** függvényt alkalmazunk, az eredmények vagy egy `ans` nevű változóba kerülnek, vagy pedig grafikus formában a képernyőn jelennek meg. Pl. az << **eig**(A); (enter) egy `ans` nevű változóba helyezi el az A mátrix sajátértékeit és innen ezek << `ans` (enter) módon hívhatók elő, az

<< **lsim**(A, B, C, D, u, t, x_0)

kifejezés

utasítás pedig a képernyőn egy y – t koordináta rendszerben ábrázolja az állapotegyenlet $y(t)$ megoldásának grafikonját⁹⁹. Ahhoz, hogy a **MATLAB** egy kifejezés eredményeit adott változókba tudjon elhelyezni, vagy grafikon alakjában tudja ábrázolni, a kifejezésben szereplő minden változónak a kifejezés végrehajtása *előtt* adott számértékekkel kell rendelkeznie¹⁰⁰.

A Folyamatszabályozás tananyagának témáit tárgyaló füzet sorozatban rendszeresen használtuk a **MATLAB** nyújtotta szolgáltatásokat, ezeket az olvasó figyelmébe ajánljuk. Reprodukálásuk révén egyszerűen megismerkedhetünk a **MATLAB** használatával, ennek előnyeivel, megkímélve magunkat a fáradságosan végezhető, jelentős mennyiségű numerikus számításoktól. Nem tekinthetünk el azonban attól, hogy ez a programrendszer – némi túlzással – lényegében egy igen hasznos, intelligens „logarléc”, ami segítségünkre van a legbonyolultabb és hosszadalmas numerikus számításokban, ezeket igen gyorsan, nagy pontossággal gépi úton végrehajtja. Bár a programozás során vétett szintaktikai hibákról hibaüzeneteket küld, gondolkozni azonban az alkalmazó helyett nem képes, ezért a **MATLAB** által szolgáltatott eredményeket csak megfelelő kritikával szabad elfogadni.

Említésre érdemes a **SIMULINK grafikus programcsomag**¹⁰¹, amely a hatásvázlatával (blokk–diagramjával) definiált dinamikus rendszer szimulációját közönséges differenciálegyenletek különféle numerikus megoldásaival végzi¹⁰². A hatásvázlat jelátvivő tagjait – mintegy a bemenő-, és kimenő jelek közötti matematikai műveleteket definiáló blokkokat – a **SIMULINK** programkönyvtárból lehet kimásolni (*Sources*–, *Sinks*–, *Discrete*–, *Linear*–, *Nonlinear*–, *Connections Block Library*). Ezek a blokkok az **FI** és **DI** alaptagokon túlmenően nagyobb rendszámú lineáris, nemlineáris tagokat, matematikai műveleteket végző tagokat, holtidős tagot, zérusrendű tartószervet, jelgenerátorokat, a jeleket regisztráló

⁹⁹ Az `[y,x]=lsim(A,B,C,D,u,t,x0)`; és az `[y,x]=lsim(Gs,Hs,u,t)` **MATLAB** függvények az analízisének talán legfontosabb eljárásai, mivel az A, B, C, D paramétermátrixaival, vagy a $W(s)=G(s)/H(s)$ átviteli függvényével leírt lineáris dinamikus rendszer állapotegyenletének, illetve rendszeregyenletének $y(t)$, $x(t)$ megoldásait számítják. Alkalmazásukkal a differenciálegyenletek megoldása egy „gombnyomásra” egyszerűsödik.

¹⁰⁰ A *Symbolic Math Toolbox* szimbolikus változókkal is eredményeket állít elő.

¹⁰¹ Irodalom: James B. Dabney, Thomas L. Harman: **Mastering SIMULINK**®2. Prentice Hall. *Hetthessy Jenő–Bars Ruth–Barta András*: Szabályozástechnika **MATLAB**® gyakorlatok. Műegyetemi Kiadó.

¹⁰² A szimuláció alapkérdése a számítás lépésköztének megválasztása. A „kis” lépésköz nagyobb pontosságot eredményez, de a számítások idejét (és költségeit) jelentősen megnövelheti.

„virtuális műszereket”, adattárolókat, stb. tartalmaznak. A könyvtárból kiválasztott blokkokat a képernyő programozási felületére lehet „vonszolni”. A blokkokat a hatásvázlatnak megfelelő elrendezésben – az egérrel húzott vonalakkal – kell „összehuzalozni”, amely az egyik blokk kimenetét egy másik blokk bemenetével történő összekapcsolását szimbolizálja. Az egyes blokkok bemeneteire más blokkok kimeneteit vagy a jelgenerátorok által szolgáltatott vizsgáló jeleket lehet „kapcsolni”, illetve a megfelelő kimeneti pontokra más blokkok bemeneteit vagy a regisztráló eszközöket lehet „rákötni”. A **SIMULINK** grafikus eszközei egyszerűvé és áttekinthetővé teszik a dinamikus rendszerben lejátszódó jelenségek nyomkövetését, a kísérletek tetszőleges számban ismételhetőek, a hatásvázlat blokkjai egyszerűen parametrizálhatók. A szimuláció eredményeit – további számításokra és jelfeldolgozásra – a **MATLAB** felületre is át lehet adni. Grafikája szemléletessé teszi a folytonos-, a diszkrét- és a hibrid rendszerekben a gerjesztések hatására kialakuló jelenségek áttekintését. Alkalmazásának jelentős előnye, hogy nemlinearitások, holtidős késleltetések, **FI**, **DI** és **hibrid** hatásvázlat-struktúrák egyaránt vizsgálhatók¹⁰³.

Megjegyzés

A dinamikus rendszerek szimulációs vizsgálatára a digitális számítógépek széleskörű alkalmazása előtt elektronikus műveleti erősítőkkel felépített és többnyire *összegzőket, integrátorokat, együththató potenciométereket, függvénygenerátorokat, szorzókat, hányados képzőket, jelforrásokat és jelregisztrálókat* tartalmazó **analóg számítógépet** használtak. Az egyes elemek bemenő- és kimenő jelei $\pm 100\text{V}$ (elektroncsöves gépek), vagy $\pm 10\text{V}$ (félvezetős gépek) tartományban változó villamos egyenfeszültségek. A programozás az egyes egységeknek egy programtáblán történő tényleges *fizikai összehuzalozását* jelentette. Az így létesített áramkör a modellezendő *fizikai rendszer* matematikai függvénykapcsolatait – a nehézkesen végrehajtható amplitúdó- és időléptékezés körülményei között – képezi le (ezért egy univerzális kismintának is tekinthető), de szintén egy *fizikailag megvalósuló*, másik, a modellezett rendszer működését szimuláló, dinamikus rendszer. Ebben a modellben lejátszódó jelenségek hasonlóak a modellezett fizikai rendszerben lejátszódó jelenségekhez, ha ennek matematikai leírása ezt megfelelően közelíti. A modellen lehetőség nyílik egy olyan kísérletsorozat lefolytatására, ami a tényleges rendszeren végzett kísérleteket helyettesítve a veszélyhelyzeteket kizárja. Az analóg számítógépek (amelyet egyébként *differentiálegyenletet* megoldó gépnek is neveztek) kapacitását integrátorainak száma jelentette, ami elérhette a 100 darabszámot is. Miután az analóg gépek **FI** jelekkel dolgoztak, pontosságukat az egyes egységek pontossága, a műveleti erősítők „driftje” szabta meg¹⁰⁴.

Mára az analóg számítógépeket – a kísérleti vizsgálatokat mintegy a „virtuális világba” helyezve – a digitális modellezés szinte teljesen kiszorította. A digitális gépeken az egyes egységeket (blokkokat) a számítógépen futó programok realizálják, így a pontosságot az alkalmazott numerikus módszerek, és ezek *számítási lépésköze* befolyásolja (a „drift” jelenségével itt nem kell számolni, viszont a helytelenül megválasztott lépésköz pontatlansághoz, szélsőséges esetben *numerikus instabilitáshoz* vezethet). A szimulációs program összeállítása kényelmesebb, a különféle blokkok parametrizálása, az amplitúdó- és időléptékezés megoldása lényegesen egyszerűbb. Tetszőleges vizsgálójelek alkalmazhatók, a struktúra bármely pontjára „virtuális” jelregisztráló (egy- és kétsugaras oszcilloszkóp, xy regisztráló, adattároló, stb.) helyezhető. A digitális szimulációnak egyetlen – de könnyen felejtendő – hátrányát lehetne megemlíteni, nevezetesen azt, hogy a problémamegoldást a valóságtól még inkább elvonatkoztatja és az absztrakció további elmélyítésének irányába tereli. A szintaktikailag helyesen összeállított **MATLAB** program vagy **SIMULINK** szimuláció a számítógépen lefut, még abban az esetben is, ha valamelyik utasítást vagy blokkot esetleg

¹⁰³ A **MATLAB** szolgáltatásaihoz hasonlóan *kiváló* lehetőséget teremt szabályozási rendszerek analízisére, szintézisére és szimulációjára a **National Instruments LabVIEW®** programcsomagja is.

¹⁰⁴ Az analóg számítógépek hazai alkalmazásainak elterjesztése többek között *Dr. Benyó Zoltán* nevéhez kapcsolható. Irodalom: *Benyó Zoltán: Villamos analóg számítógépek*. Mérnöktovábbképző Kiadó. *Zoltán Benyó, Béla Paláncz, László Szilágyi: Insights into computer science with Maple*. Scientia Publishing House.

tévesen paramétereztük (pl. egy paramétert helytelen előjellel adtunk meg, stb.). A futási eredményeket ezért minden esetben *hihetőségi vizsgálatnak* is alá kell vetnünk, ami azt jelenti, hogy a modelleztet fizikai rendszerben lejátszódó jelenségekről (a szimuláció valószínűsíthetően várható eredményeiről) elképzelésekkel kell rendelkezünk. A számítások pontosságát alapvetően befolyásolja a szimuláció numerikus módszere és ennek választható lépésköze. A kis lépésköz nagyobb pontosságot, de hosszabb számítási időt és jelentős költségtöbbletet jelent. A **SIMULINK**[®] használatával történő megismerkedést is az olvasó figyelmébe ajánljuk, mivel ennek használata a dinamikus rendszerek analízisét igen szemléletes és hatékonyra teszi. Megismerésére irodalmi hivatkozást adtunk. A szabályozás rendszertechnikai *méretezése* során is érdemes a **MATLAB** szolgáltatásainak igénybevétele. A méretezés – a folyamat ismert $W_p(s)=G_p(s)/H_p(s)$ átviteli függvényének és a méretezési előírások alapján – a szabályozó $W_c(s)=G_c(s)/H_c(s)$ átviteli függvényének meghatározását jelenti. Illusztrációként megadjuk a méretezés eredményének *ellenőrzésére* szolgáló egyik lehetséges programot. A méretezést követően a méretezett szabályozó adatai mellett célszerű kiszámítani a nyitott kör $W_0(j\omega)=W_c(j\omega)W_p(j\omega)=G_0(j\omega)/H_0(j\omega)$ frekvencia függvényének $g_m(\omega_p)$ erősítési tartalékát (*gain margin*), a $p_m(\omega_c)$ fázistartalékát (*phase margin*), a ω_p körfrekvenciát és az ω_c vágási körfrekvenciát (*cut-off*), a zárt rendszer $W_R(s)=G_R(s)/H_R(s)$ eredő átviteli függvényét és ennek p_R pólusait, valamint a zárt rendszer egységugrás alapjelre vonatkozó $h(t)$, $u(t)$, $y(t)$ időfüggvényeit. Ezeket a számításokat számítógépes szolgáltatások nélkül elvégezni igen körülményes és fáradságos lenne. A következő rövid **MATLAB** utasítás sorozat azt illusztrálja, hogy ezek a viszonylag komplikált számítások **MATLAB** támogatással igen egyszerűen elvégezhetők:

```
% analizis.m fájl
% *****
% adatbevitel
Gp=input(' Gp='); Hp=input(' Hp=');
Gc=input(' Gc='); Hc=input(' Hc=');
% -----
% a nyitott hatáslánc
[G0,H0]=series(Gc,Hc,Gp,Hp);
[G0,H0]=minreal(G0,H0);
[a0,f0,w]=bode(G0,H0);
[gm,pm,wp,wc]=margin(a0,f0,w);
% -----
% a zárt hatáslánc
[GR,HR]=cloop(G0,H0);
pR=roots(HR);
[h,x,t]=step(feedback(1,1,H0,G0)); plot(t,h);
[u,x,t]=step(feedback(Gc,Hc,Gp,Hp)); plot(t,u);
[y,x,t]=step(GR,HR); plot(t,y);
% *****
disp('az ellenőrzés vége');
```

A programot a programkönyvtárban lehet tárolni az *analizis.m* fájl néven. A **MATLAB** prompt után az *analizis* beírásával és (enter) billentyűzés után indul a program futása. Ennek során bekéri a folyamat $W_p(s)=G_p/H_p$ és a szabályozó $W_c(s)=G_c/H_c$ átviteli függvényeinek G_p , H_p , G_c , H_c polinomjainak együtthatóit (*input*), ezekből meghatározza a nyitott kör $W_0(s)=G_0/H_0$ átviteli függvényét (*series*), ennek Bode diagramjait (*bode*), amplitúdó többletét és fázistöbbletét (*margin*), a zárt kör $W_R(s)=G_R/H_R$ átviteli függvényét (*cloop*), ennek pólusait (*roots*), valamint kiszámítja és ábrázolja a zárt rendszer *egységugrás* alapértékre vonatkozó $y(t)$, $u(t)$ és $h(t)$ időfüggvényeit (*step*, *feedback*, *plot*). Az $u(t)$ grafikonjából az $u_t=u(0)/u(\infty)$ túlvezérlési arányra vonatkozó követelmény betartását ellenőrizhetjük, az $y(t)$ grafikonjából képet kapunk arról, hogy az egységugrás alapértékre a zárt rendszer milyen választ ad és mekkora a zárt rendszer átmeneti függvényének túllendülése. Ha ezt kiegészítve elkészítjük a szabályozási rendszer **SIMULINK** alapú szimulációját is, az előző eredményeket ezzel is ellenőrizhetjük, de módunk adódik arra is,

hogy a hatásláncba nemlineáris elemeket (pl. a telítést, érzéketlenségi sávot, stb.) is beiktassunk, és a kísérleti vizsgálatokat a módosított hatáslánc jelenségeire is kiterjesszük. A számítógépes szolgáltatás lehetősége nélkül ezek a számítások igen nehézkesek és fáradtságosak lennének.

Befejezőként tisztelettel kell megemlékeznünk azokról a már közülünk eltávozott, de mérnöki szemléletmódjukat tanítványaikra hátrahagyott kollégáinkról, akik a szabályozástechnika és szabályozáselmélet hazai megalapozásának úttörői voltak. **Száday Rezső** a Láng gépgyár főkonstruktőre a szabályozástechnika és a turbinaszabályozások témaköreiben írta az első, gépészmérnökök számára készült magyar nyelven megjelenő „**A szabályozáselmélet elemei**” (Műszaki Kiadó) című könyvét, amelyet a Műegyetem Gépészmérnöki Karán egyetemi tankönyvként is használtak. **Szalay József** a hidraulikus-, és a segédenergia nélkül működő szabályozók témáinak feldolgozásával jelentős mértékben keltette fel az érdeklődést a szabályozástechnika iránt. **Frigyes Andor** vezetésével alakult meg a Budapesti Műszaki Egyetem Villamosmérnöki Karán a *Folyamatszabályozási Tanszék*, ahol súlyponti tématerület az ipari folyamatok mérés-technikája, a szabályozástechnika, és a digitális technika oktatása és kutatása volt. Ezek művelésében **Török József** személyisége és széles skálán mozgó alkotásai meghatározó jelentőséggel bírtak. Szintén a Műegyetemen **Csáki Frigyes** alakította meg az *Automatizálási Tanszéket*. **Csáki Frigyes** irodalmi munkássága révén mérnökgenerációk jutottak hozzá a legkorszerűbb szabályozáselméleti és szabályozástechnikai ismeretanyaghoz, és e művek mind a mai napig a témát művelők könyvtárainak becses értékei. A **Ward–Leonard** hajtás jelentette azt a szabályozástechnikai mintarendszert, amin az elvek és a gyakorlat egysége igen szemléletesen volt bemutatható. A **Kovács Károly Pál** akadémikus vezette Villamosgépek Üzemtana Tanszéken dolgozott **Rácz István**, akinek a hajtásszabályozások területén elért nemzetközileg jegyzett tudományos eredményei általános érvényességükkel a szabályozáselmélet egészére is befolyást gyakoroltak. Jelen munka szerzői **Frigyes Andor** tanítványainak vallják magukat, remélve, hogy mesterünk szemléletmódjából, az ismeretanyag átadásának igényéből, a bonyolult elméleti kérdések igen egyszerű példákön történő bemutatásának módszertanából sikerült az olvasó számára is átörököteni valamit. A **Csáki Frigyes**, **Frigyes Andor**, **Rácz István**, **Szalay József**, **Száday Rezső**, **Török József** által hátrahagyott szakmai örökségnek méltó hazai utódai vannak. Jelenleg is számos akadémikus, a tudományok doktora, a tudományok kandidátusa, PhD fokozattal rendelkező kutató és oktató – és *legfőképpen* az ipari gyakorlatban a szabályozási rendszereket fejlesztő-üzemeltető és nap, mint nap megújító mérnökök és technikusok sokasága – műveli ezt a tudományágat. A technológiai folyamatok irányításának valóságos fizikai környezetében születnek meg azok a tapasztalatok, problémák, amelyeknek megoldásai viszik előre a szabályozástechnika tudományágának igazi fejlődését.

Az ipari folyamatok területeien jelentkező és gyakorlati orientáltságú szabályozási problémák megoldásai indították el az általános *rendszerelméleti* kutatásokat is, melynek eredményei előbb–utóbb a gyakorlati megoldásokban is megjelennek. A rendszerelméleti témák jelentős mértékben igénylik a matematika módszertanának és eredményeinek alkalmazását, nem véletlen, hogy a rendszerelmélet témaköre a matematikai kutatásokban is az érdeklődés előterébe került. A technikus körökben ez nem aratott osztatlan sikert, mivel a matematika nyelvezete, terminológiája, egzaktásra való törekvése nem mindig illeszkedik a mérnöki szemléletmódhoz és a gyakorlati problémák megoldásának módszertanához. Az azonban tagadhatatlan tény, hogy a matematikusok (és a rendszerelmélettel foglalkozók) által keltett „elméleti özönvíznek” is lett olyan hozadéka, amely valós eredményeket jelentett, és a technikusokat is az elméleti eredményeknek a gyakorlatban történő alkalmazására, és további kutatásokra inspirálta.

A műszaki területeken kialakult szabályozástechnikai és szabályozáselméleti témák feldolgozása más tudományterületekre is hatást gyakoroltak, a rendszerelmélet ma már az élettan, a biológia, gazdaságtan, a szociológia, stb. tudományokban is egyre jelentősebb szerephez jut. Felismerve, hogy az élő biológiai szervezetben lejátszódó folyamatok bonyolultsága és ebben az agy irányító szerepe milyen jelentőséggel bír, napjaink egyik legfontosabb kutatási tématerülete az élettani irányítások vizsgálata. Az élő szervezetben lejátszódó folyamatok irányításának bonyolultsága a technikai területek irányításának bonyolultságától *nagyságrendekkel* komplikáltabbak, a jelátviteli viszonyok elektrokémiai folyamatokban realizálódnak. Annak feltérképezése, és a hatásmechanizmusainak leírása, hogy az emberi agy, mint központi irányító szerv miként hajtja végre (a saját magát is magába foglaló) élő szervezetnek, mint az irányított folyamatnak az irányítását, egyelőre nem tűnik még hosszú távon sem megoldhatónak. Az az elképzelés, hogy a technikai irányításokra kidolgozott módszerek és az ezek alapján megszületett eredmények adaptálhatóak az élettani folyamatok irányításának leírására, ma még csupán reménykeltő várakozások. Hosszú távon valószínűsíthető annak a visszacsatolásnak a színrelépése, amikor az agyműködés és az élettani kutatásban születő eredmények a technikai irányításokban kerülhetnek alkalmazásra. Egyelőre az irány fordított, és nem kizárt, hogy egy *paradigmaváltásnak* kell jönnie ahhoz, hogy ez az irányultság megforduljon.

Megjegyzés

Az emberi test hőmérséklete normális körülmények között kb. $y_A=36,5$ Celsius fok, és ennek értéktartó szabályozását az agy hipotalamuszában található „hőközpont” végzi. A test aktuális y hőmérsékletét sok tényező befolyásolhatja (pl. fokozott izommunka, a környezeti hőmérséklet, stb.). Az ezek hatására *megnövekedett* vagy *lecsökkent* testhőmérséklet változás beindítja a „hőközpont” termosztátszerű működését és létrejön az izzadás, értágulás által létrehozott *hőleadás*, vagy a didergés, erősszehúzódás által létrehozott *hőtermelés*. Ha a szervezetben vírusok, sérülések, gyulladás, stb. jelennek meg, akkor ezek hatására az immunsejtekben olyan vegyületek (pirogének) szabadulnak fel, amelyek a vérkeringésen keresztül az agyba jutnak, és a „hőközpontban” a lázat kiváltó magasabb hőmérsékletet állítanak be. A hipotalamusz tehát úgy reagál, hogy a testhőmérsékletet kívánt értékét 36.5 fokról pl. 38 fokra állítja, és ezzel a szervezetet *hőtermelésre* készíti. Ez egy fontos védekezési mechanizmus, mivel a kórokozók számára a magasabb hőmérséklet nem kedvező. A láz növekedésével az immunrendszer is aktivizálódik, felvéve a „harcot” a lázat kiváltó vírusokkal, baktériumokkal szemben. Ebbe az agy által irányított védekezési mechanizmusba lázcsillapítással külsőleg beavatkozni csak akkor szabad, ha a szervezet saját hőszabályozásában zavarok mutatkoznak (pl. a testhőmérséklet a 39 fokot meghaladja). Az emberi agy a szervezet működésének globális irányítását látja el, ezen belül a hőmérsékletszabályozás egy viszonylag jól feltérképezett részfolyamat. Ennek az empirikus leírásán, és az ok-okozati viszonyainak elemzésén túlmutató modellezése azonban mind a mai napig még nem kidolgozott, és kérdéses lehet, hogy jelenlegi eszközrendszerünkkel a teljes mértékű feltérképezésig egyáltalában eljuthatunk-e?

Az élettani szabályozások kutatásának hazai elindítói *Csáki Frigyes*, *Szentágotai János* akadémikusok voltak. Az agykutató *Szentágotai* professzor az 1960-as években igényelte első ízben, hogy a műszaki területeken alkalmazott irányítástechnika rendszertanával Ő maga is megismerkedjen. *Szentágotai János* és *Szűcs Béla* együttműködésének eredményeként a sajátos élettani szabályozások feltérképezésében és modellezésében kiemelkedő eredményeket is felmutató kutatások folytak. Ezt követően kezdett a kutató orvosok egy részének a figyelme az irányításelmélet irányába fordulni, miközben az irányítástechnikával foglalkozó mérnökök is egyre nagyobb érdeklődést mutattak az orvostudományok iránt. Ez napjainkra az orvostudományi-, a természettudományi- és a műszaki egyetemek közötti szervezett együttműködéshez vezetett.

A szabályozástechnika gyakorlati és elméleti témakörének óriási hazai és külföldi irodalma van. Ezek egy részére a megfelelő helyeken többször is hivatkoztunk. A szerzők *szubjektív* véleménye, hogy a lineáris szabályozások témakörét tárgyaló, és a legjobb *elméleti-gyakorlati* áttekintést adó szakkönyvek *Benjamin C. Kuo : Automatic Control Systems*, és *Digital Control Systems* (Saunders Collage Publishing) művei. Ezekből a folytonosidejű

rendszereket tárgyaló, **Önműködő szabályozó rendszerek** (Műszaki Kiadó) könyv magyar nyelven is hozzáférhető. A szabályozási rendszerekről jó összeállítást tartalmaznak **Winfried Oppelt: Ipari szabályozások kézikönyve**. Műszaki Könyvkiadó, **Dr. Helm László: A szabályozástechnika kézikönyve** (Műszaki Kiadó) és **Hütte : A mérnöki tudományok kézikönyve** (Springer Hungarica) című munkák. Három elméleti orientáltságú kiváló munka: **Fodor György : Jelek és rendszerek** (Műegyetemi Kiadó), **Csáki Frigyes: Szabályozások dinamikája** (Akadémiai Kiadó) és **Jean–Pierre Corriou: Process Control. Theory and Applications** (Springer). A matematikai alapfogalmak figyelemreméltó összefoglalása található **I.N. Bronstein–K.A. Szemengyajev–G. Musoil–H. Mühling: Matematikai kézikönyv** (Typotex Kiadó), és **Dr.Farkas Miklós: Matematikai kislexikon** (Műszaki Könyvkiadó) művekben.

A Füzet sorozat témái a Magyar Elektronika (www.magyar-elektronika.hu) folyóirat Repeta cikksorozatában is megtalálhatók.

Budapest, 2013. szeptember 4.

Ellenőrző kérdések

1. Milyen matematikai modellekkel írjuk le a nemlineáris és a lineáris **MIMO** dinamikus rendszerek jelátviteli tulajdonságait? Mit jelentenek az alábbi képletek és mi a jelentőségük a lineáris rendszerek analizisében?

$$L\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt, \quad L^{-1}\{F(s)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st} ds = \frac{1}{2\pi j} \oint_C F(s)e^{st} ds = \sum_{i=1}^n \operatorname{res}_{p_i} [F(s)e^{pit}]$$

$$L\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = sF(s) - f(0), \quad L\{Ax(t) + Bu(t)\} = Ax(s) + Bu(s), \quad L^{-1}\{Ax(s) + Bu(s)\} = Ax(t) + Bu(t), \quad L\{f(t - T_h)\} = e^{-sT_h} F(s),$$

$$L\{1(t)\} = \frac{1}{s}, \quad L\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}, \quad L\{t\} = \frac{1}{s^2}, \quad L\{\sin(\omega t)\} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}, \quad L\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}, \quad L\{1(t - T_h)\} = e^{-sT_h} \frac{1}{s}$$

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B + D, \quad \Phi(t) = e^{At}, \quad \Phi(s) = (sI - A)^{-1}, \quad \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + h_1 \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + h_{n-1} \frac{dy(t)}{dt} + h_n y(t) = g_0 \frac{d^m u(t)}{dt^m} + g_1 \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \dots + g_{m-1} \frac{du(t)}{dt} + g_m u(t) \Leftrightarrow$$

$$y(s) = \underbrace{\frac{g_0 s^m + g_1 s^{m-1} + \dots + g_{m-1} s + g_m}{s^n + h_1 s^{n-1} + \dots + h_{n-1} s^{m-1} + h_n}}_{\text{polinomalak}} u(s) = g_0 \underbrace{\frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}}_{\text{zérus-pólusalak}} u(s) = \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n \frac{r_i}{s - p_i} \right)}_{\text{részletőrtes alak}} u(s) = W(s)u(s)$$

2. Adja meg az állapotegyenlet numerikus megoldásának *Euler* módszerét!
Oldja meg az alábbi lineáris differenciálegyenleteket és ábrátolja az $y(t)$ megoldások grafikonjait:

$$\begin{array}{ll} \frac{dx(t)}{dt} = -tx(t) + u(t) & \frac{dx(t)}{dt} = -x(t) + u(t) \\ y(t) = x(t) & y(t) = x(t) \\ \text{*****} & \text{*****} \\ x(0) = 0, \quad u(t) = 1(t) & x(0) = 0, \quad u(t) = 1(t) \\ \text{*****} & \text{*****} \\ y(t) = ? & y(t) = ? \end{array}$$

3. Adja meg a lineáris rendszer állapotegyenletének analitikus megoldó képletét!
Oldja meg az alábbi differenciálegyenlet rendszert:

$$\begin{array}{l} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 9 \\ 10 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 & 13 \\ 14 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \\ \text{*****} \\ \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 17 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1(t) \\ 1(t) \end{bmatrix} \\ \text{*****} \\ y_1(t) = ? \quad y_2(t) = ? \end{array}$$

4. Mi az átviteli mátrix, az átviteli függvény és a rendszeregyenlet?
Adja meg alábbi rendszer paramétermátrixait. Számítsa ki a **MIMO** tag átviteli mátrixát, az y_1 és u_2 jelek között értelmezett $W_{12}(s)$ átviteli függvényt és a $W_{12}(s)$ átviteli függvénynek megfelelő rendszeregyenletet:

$$\begin{array}{l} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 9 \\ 10 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 & 13 \\ 14 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \end{array}$$

5. Mit értünk a munkaponti linearizálás alatt? Mi *Ljapunov* közvetett stabilitási kritériuma?
Egy másodrendű fizikai objektum matematikai modellje:

$$\begin{array}{l} \frac{dx_1(t)}{dt} = f_1[x_1(t), x_2(t), u_1(t), u_2(t)] = \alpha \sqrt{x_1(t)} + \beta u_1(t) = f_1[x_1(t), u_1(t)] \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = f_2[x_1(t), x_2(t), u_1(t), u_2(t)] = \gamma \sqrt{x_1(t)} - \delta \sqrt{x_2(t)} + \alpha u_2(t) = f_2[x_1(t), x_2(t), u_2(t)] \\ y_1(t) = x_1(t) \\ y_2(t) = x_2(t) \end{array}$$

A rendszer u_{10} , u_{20} állandó bemenőjelek mellett az állapotokról x_{10} , x_{20} koordinátákkal rendelkező P_0 pontjában, egyensúlyi helyzetben van. Határozza meg az állapotváltozók x_{10} , x_{20} egyensúlyi koordinátáit, linearizálja a rendszert az egyensúlyi pont környezetére, vizsgálja meg az egyensúlyi pont stabilitását

($\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ állandó értékű paraméterek).

6. Mit értünk a dinamikus rendszer sajátmozgása és gerjesztett mozgása alatt?

Az a, b, c állandó paraméterek mellett egy elsőrendű lineáris **SISO** tag állapotegyenlete:

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t) + bu(t)$$

$$y(t) = cx(t)$$

$$x(0) = 1 \quad u(t) = \sin(2t)$$

Számítsa ki és ábrázolja az $x(t)$ állapotváltozó $x_s(t)$ és $x_g(t)$ mozgáskomponenseit.

7. Mi az állapotegyenletével leírt lineáris rendszer stabilitásának általános feltétele?

Egy lineáris rendszer állapotmátrixa:

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & \alpha \\ d & b & 0 \\ e & f & c \end{bmatrix}$$

Írja fej a rendszer karakterisztikus egyenletét. Adja meg az α paraméter azon értékét, amelynél a harmadrendű rendszer stabilitását a d, e , és f paraméterek nem befolyásolják.

8. Adja meg a lineáris **SISO** tag rendszerjellemező függvényeit!

Írja fel és ábrázolja az integráló (**I**) és a holtidős (**H**) alaptagok rendszerjellemező függvényeit!

Határozza meg a **P**, **PI** és **PID** szabályozók *différenciálegyenletét*, $w_c(t)$ *súlyfüggvényét*, $v_c(t)$ *átmeneti függvényét*, $W_c(s)$ *átviteli függvényét* és $W_c(j\omega)$ *frekvencia függvényét*!

9. A lineáris **SISO** tag frekvencia függvénynek milyen ábrázolási formái vannak?

Másodrendű lineáris lengő tag (T_ξ -tag) differenciálegyenlete:

$$T_0^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\xi T_0 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = ku(t)$$

$$T_0 > 0 \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad k > 0 \quad \text{állandók}$$

$T_0=1$, ξ : 0, 0.1, $1/\sqrt{2}$, 0.9, 1 és $k=1$ értékekre léptékhelyesen ábrázolja a lengő tag $v(t)$ átmeneti függvényét, Nyquist helygörbét és Bode diagramjait! Határozza meg, hogy a $v(t)$ átmeneti függvény Δv_{max} túllendülése Hogy függ a ξ csillapítási tényező értékétől [$\Delta v_{max}=f(\xi)=?$]? A t idő mekkora értékénél van a $v(t)$ átmeneti függvénynek maximuma?

10. Ábrázolja a **P**, **PI**, **PD**, **PIPD** és **PID** szabályozók átviteli függvényeinek pólus–zérus eloszlását, $v_c(t)$ átmeneti függvényeit, $w_c(t)$ súlyfüggvényeit, Nyquist helygörbéit és Bode diagramjait!

11. Mikor alkalmazható a stabilitásvizsgálatra a Hurwitz stabilitási kritérium?

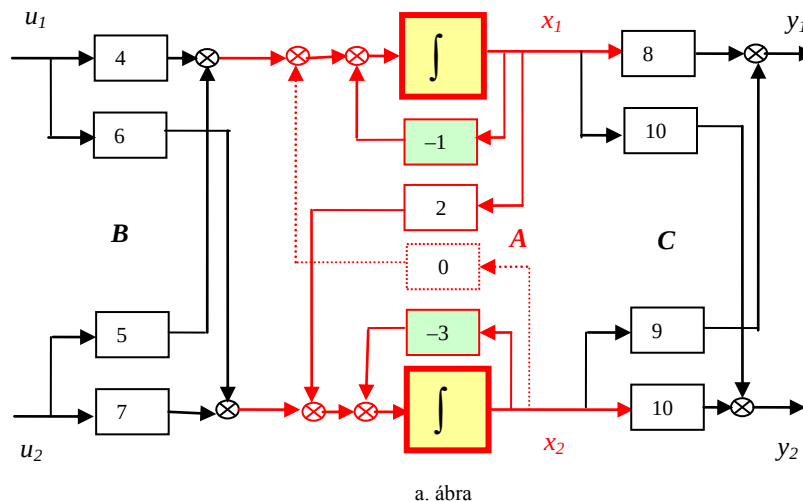
Az önbeálló taggal jellemzett harmadredű felnyitott kör eredő átviteli függvénye

$$W_0(s) = \frac{k}{(1+sT)(1+s\alpha T)(1+s\beta T)} \quad T > 0 \quad \alpha > 0 \quad \beta > 0$$

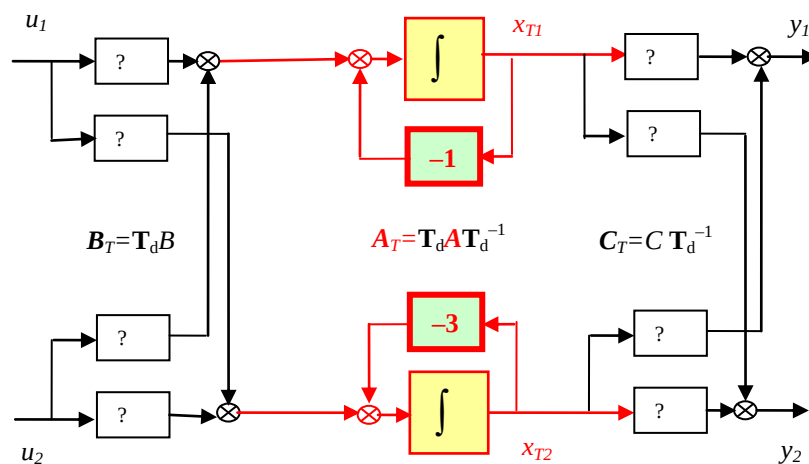
Bizonyítsuk be, hogy a negatívan visszacsatolt zárt rendszer k_{krt} kritikus körerősítése kizárólag az α és β tényezőktől függ, és a $k_{krt}=8$ lekisebb értékét az $\alpha=\beta=1$ paraméterek mellett veszi fel! $\alpha=1$, $\beta=1$, $k=8$ paraméterek mellett mekkora a nyitott kör $W_0(j\omega)$ frekvencia függvényének $\phi_c(\omega_c)$ fázistöbblete?

12. Mit értünk az állapotirányíthatóság, az állapotmegfigyelhetőség és a kimeneti irányíthatóság fogalmait alatt? Lineáris rendszer paramétermátrixai A, B, C, D . Mi az állapotirányíthatóság és az állapotmegfigyelhetőség feltétele? Labilis rendszer lehet-e állapotirányítható és megfigyelhető?

13. Állapotegyenletével leírt másodrendű lineáris **MIMO** rendszer lineáris alaptagokkal leírt hatásvázlatát az a. ábra tartalmazza. Egy T_d transzformációs mátrix alkalmazásával és az új $x_T=T_d x$ ($x=T_d^{-1} x_T$) állapotváltozók bevezetésével az eredeti rendszer állapotváltozóit a b. ábrának megfelelően szétcsatoljuk. Adja meg a T_d transzformációs mátrixot, valamint az első kanonikus alak $A_T=T_d A T_d^{-1}$, $B_T=T_d B$, $C_T=C T_d^{-1}$ paramétermátrixait!



a. ábra



b. ábra

13. Adja meg a klasszikus soros kompenzációs lineáris szabályozási rendszer rendszeregyenleteit, valamint azt a függvénykapcsolatot, amelyik leírja az $y(s)$ szabályozott jellemzőt, az $u(s)$ irányító jel, a $h(s)$ hibajel belső jeleknek az $y_A(s)$ és az $u_z(s)$ külső (gerjesztő) jelektől való függését! $y_A(s)=y_{A0}/s$ és $u_z(s)=u_{z0}/s$ bemenő jelek mellett hogy lehet meghatározni az aszimptotikusan stabilis rendszer $y(t)$ szabályozott jellemzőjének, az $u(t)$ irányító jelnek, a $h(t)$ hibajelnek az $y(0)$, $u(0)$, $h(0)$ kezdeti és az $y(\infty)$, $u(\infty)$, $h(\infty)$ végértékeit?
15. A nyitott kör átviteli függvénye $W_0(s)=G_0(s)/H_0(s)$. Mi a $W_R(s)$ átviteli függvénnyel leírt zárt szabályozási rendszer stabilitásának általános feltétele? A stabilitásban milyen szerepe van a típuszámnak? A nyitott kör jelátviteli tulajdonságait egymással soros kapcsolást alkotó n számú egytárolós arányos tagok sorozata jellemzi, átviteli függvénye ennek megfelelően:

$$W_0(s) = \frac{k}{(1+sT)^n} \quad T > 0 \quad k > 0$$

Adja meg azt a függvénykapcsolatot, amely leírja, hogy a stabilitási határt jelentő k_{krt} kritikus körerősítés miként függ az $n \geq 0$ rendszámtól [$k_{krt} = f(n) = ?$]!

14. Mi a frekvencia módszer alapján történő rendszertechnikai méretezés elve? Adott az alábbi $W_p(s)$ és $W_c(s)$ átviteli függvényekkel leírt szabályozási rendszer:

$$W_p(s) = \frac{2}{(1+20s)(1+10s)(1+s)} e^{-2s} \quad W_c(s) = k_c \frac{(1+sT_i)(1+sT_d)}{sT_i(1+sT)}$$

A frekvencia módszer alapján méretezze a $W_c(s)$ átviteli függvénnyel reprezentált szabályozási algoritmust, ha az előírt fázistöbblet $\varphi_t(\omega_c) = \pi + \arccos W_0(j\omega_c) = \pi/3$, és a túlvezérlési arány $u_t = u(0)/u(\infty) = 20$.

$k_c = ?$, $T_i = ?$, $T_d = ?$, $T = ?$. A méretezett szabályozóval üzemelő rendszer alapjele $y_A(t) = 1(t)$. Léptékhelyesen ábrázolja a zárt rendszer $u(t)$ irányító jelének és az $y(t)$ szabályozott jellemzőjének időgramjait!

17. Adja meg az egyszerűsített és az általános Nyquist stabilitási kritériumot!

18. Adottak az alábbi nyitott kör átviteli függvények:

$$W_0(s) = \frac{k}{(1+sT)^3}; \quad W_0(s) = \frac{k}{s(1+sT)^2}; \quad W_0(s) = \frac{k}{s^2(1+sT)}; \quad W_0(s) = ke^{-sT_h}; \quad W_0(s) = \frac{k}{s}e^{-sT_h}; \quad W_0(s) = \frac{k}{(1+sT)}e^{-sT_h}$$

A különféle $W_0(s)$ esetekben mekkora a szabályozási rendszer k_{krt} kritikus körerősítése ($T>0$, $T_h>0$, $k>0$)?

19. Mi a kaszkádszabályozás?

20. Mi a célja az állapotvisszacsatolással történő irányításnak? Mi a szerepe az állapotmegfigyelőnek?

Egy labilis **SISO** folyamat A állapotmátrixa és B bemeneti mátrixa:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 4 & 5 & -6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Az állapotváltozók visszacsatolásával keletkező eredő rendszer A_R állapotmátrixának előírt sajátértékei

$\lambda_{R1}=-10$, $\lambda_{R2}=-30$, $\lambda_{R3}=-60$. Határozza meg a visszacsatolás F sorvektorát!

21. Mi a polinomiális szabályozó tervezésének elve és eljárása?

22. Mi a *Truxal–Guillemin* szabályozó?

23. Mi a *Smith* szabályozás kialakításának célja és elve? Adja meg a *Smith* szabályozó átviteli függvényét!

24. Adja meg az **IMC** (*Internal Model Control*) rendszer struktúráját!

25. Ábrázolja a hibrid szabályozási rendszer blokkvázlatát! Mi a zérusrendű tartás funkcionális feladata?

26. Mit jelent a hibrid szabályozás folytonosidejű-, illetve diszkrétidejű jelekre homogenizált hatásvázlata?

27. Adja meg a diszkrétidejű tagok rendszerjellemző függvényeit! Mit értünk a **DI** alaptagok alatt?

28. Mi a Z -transzformáció és mi a szerepe a **DI** rendszer tulajdonságainak leírásában?

29. Mit jelentenek az alábbi képletek és mi a jelentőségük a lineáris **DI** rendszerek analízisében?

$$Z\{f(kT_s)\} = F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT_s)z^{-k}, \quad Z^{-1}\{F(z)\} = f(kT_s) = \frac{1}{2\pi j} \oint_R F(z)z^{k+1}dz = \sum_{i=1}^n \underset{z_{pi}}{\text{rez}}[F(z)z^{k+1}]$$

$$Z\{f(kT_s - rT_s)\} = z^{-r}F(z), \quad Z\{Ax(z) + Bu(z)\} = Ax(z) + Bu(z), \quad Z^{-1}\{Ax(z) + Bu(z)\} = Ax(kT_s) + Bu(kT_s),$$

$$L\{f(kT_s - T_s)\} = z^{-1}F(z), \quad Z\{1(kT_s)\} = \frac{z}{z-1}, \quad Z\{e^{akT_s}\} = \frac{z}{z-e^{aT_s}}, \quad L\{kT_s\} = \frac{T_s z}{(z-1)^2},$$

$$Z\{\sin(\omega kT_s)\} = \frac{z \sin(\omega T_s)}{z^2 - 2z \cos(\omega T_s) + 1}, \quad Z\{kT_s e^{akT_s}\} = \frac{zT_s e^{aT_s}}{(z - e^{aT_s})^2}, \quad L\{kT_s - T_s\} = z^{-1} \frac{z}{z-1} = \frac{1}{z-1}$$

$$W(z) = C_d(zI - A_d)^{-1}B_d + D_d, \quad \Phi(kT_s) = e^{AT_s}, \quad \Phi(z) = z(zI - A_d)^{-1}, \quad \lim_{k \rightarrow 0} f(k) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z), \quad \lim_{k \rightarrow \infty} f(k) = \lim_{z \rightarrow 0} (1-z^{-1})F(z)$$

$$y(k) + h_1 y(k-1) + \dots + h_{n-1} y[k-(n-1)] + h_n y(k-n) = g_0 u(k) + g_1 u(k-1) + \dots + g_{m-1} u[k-(m-1)] + g_m u(k-m) \Leftrightarrow$$

$$y(z) = \underbrace{\frac{g_0 z^m + g_1 z^{m-1} + \dots + g_{m-1} z + g_m}{z^n + h_1 z^{n-1} + \dots + h_{n-1} z^{m-1} + h_n}}_{\text{polinomiális}} u(z) = g_0 \underbrace{\frac{\prod_{i=1}^m (z - z_{zi})}{\prod_{i=1}^n (z - z_{pi})}}_{\text{zérus-pólus alak}} u(z) = \left(\sum_{i=1}^n \frac{r_i}{z - z_{pi}} \right) u(z) = \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n \frac{r_i}{z - z_{pi}} \right)}_{\text{részletörtes alak}} u(z) = W(z)u(z)$$

30. Adja meg a lineáris diszkrétidejű rendszer állapot-differenciaegyenletének analitikus megoldó képletét!

Oldja meg az alábbi differenciálegyenlet rendszert:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 9 \\ 10 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 & 13 \\ 14 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 17 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1(k) \\ 1(k) \end{bmatrix}$$

$$y_1(k) = ? \quad y_2(k) = ?$$

31. Adja meg a *Shannon* tételeket! Hasonlítsa össze az ideális szűrő és a zérusrendű tartó amplitúdómeneteinek frekvenciaátviteli tulajdonságait!

32. A folytonosidejű (**FI**) rendszer paramétermátrixai A , B , C , D . Az egységugrás ekvivalencia alapján T_s mintavételezési idő mellett diszkrétizált **DI** rendszer A_d , B_d , C_d , D_d paramétermátrixai milyen kapcsolatban vannak az FI rendszer paramétermátrixaival?

33. A folytonosidejű (**FI**) folyamat átviteli függvénye $W_p(s)$. Zérusrendű tartás mellett hogyan kell meghatározni a folyamat **DI** modelljének $W_p(z)$ impulzusátviteli függvényét? Mi a kapcsolat a $W_p(s)$ átviteli függvény z_i , p_i és a $W_p(z)$ impulzusátviteli függvény z_{zi} , z_{pi} zérusai és pólusai között [$z_{pi}=f(p_i)=?$]?

34. Az egy tárolós, holtidős integráló **FI** folyamat átviteli függvénye $W_p(s)=k_p \exp(-sT_h)/[s(1+sT_p)]$ ($k_p=10$, $T_h=20$, $T_p=100$). Számítsuk ki a *zoh*-val kiegészített folyamat $W_p(z)$ impulzusátviteli függvény

alakjában megjelenített **DI** modelljét, ha a mintavételezési idő $T_s = T_p/10 = 10$! Léptékhelyesen ábrázoljuk az **FI** tag $v(t)$ átmeneti- és $W_p(j\omega)$ frekvenciafüggvényét, valamint a **DI** tag $v(kT_s)$ átmeneti mintasorozatát és $W_{pd}[\exp(j\omega T_s)]$ frekvenciafüggvényét.

35. Milyen módszerek vannak a hibrid rendszer **DI** modellje alapján történő stabilitásvizsgálatnak?

36. Adja meg a diszkrét **PID** szabályozó impulzusátviteli függvényét és az ennek alapján felírható **DI** szabályozási algoritmus differenciaegyenletét! Milyen eljárások alapján méretezhető a hibrid rendszer szabályozási algoritmusának paraméterei? Miben különböznek egymástól az **FI** tag és a **DI** tag frekvenciafüggvényei? Mi a frekvencia módszer alapján történő rendszertechnikai méretezés elve? A frekvencia módszer alapján méretezze a $W_c(z)$ impulzusátviteli függvénnyel reprezentált szabályozási algoritmust, ha az előírt fázistöbblet $\phi_c(\omega_c) = \pi + \arctan W_{od}[\exp(j\omega_c T_s)] = \pi/3$! Számítsa ki a $u_t = u_T(0)/u_T(\infty)$ túlvezérlési arány értékét!

$$W_p(z) = Z \left\{ \frac{1 - e^{-sT_s}}{s} \frac{2}{(1 + 20s)(1 + 10s)(1 + s)} e^{-2s} \right\} \quad W_c(z) = k_c \frac{(z - z_{zi})(z - z_{zd})}{(z - 1)z}$$

$T_s = ?$, $k_c = ?$, $z_{zi} = ?$, $z_{zd} = ?$

37. Mit jelent a véges beállítású hibrid rendszer?

Az **FI** folyamat átviteli függvénye

$$W_p(s) = \frac{k_p}{(1 + sT_{p1})(1 + sT_{p2})} = \frac{3}{(1 + 4s)(1 + 5s)}$$

Hibrid rendszer **DI** jelekre és tagokra homogenizált hatásvázlata alapján tervezzen olyan $W_c(z)$ impulzusátviteli függvénnyel jellemzett szabályozási algoritmust, amelynek alkalmazásával az $y_A(kT_s) = 1(kT_s)$ alapjel mintasorozat bemenőjelre a szabályozott jellemző mintasorozata $2T_s$ idő alatt az egység végétékére beáll ($T_s = 2$). Számítsa ki a **DI** modell u irányító jelének és y szabályozott jellemzőjének $u(kT_s)$, $y(kT_s)$ mintasorozatát, valamint a hibrid rendszer $u_T(t)$ és $y(t)$ folytonosidejű jeleit!

38. Mit értünk a rejtett oszcilláció fogalma alatt?

39. Mit jelent az időoptimalis szabályozás?

40. Mit jelent az átmeneti függvény alapján történő identifikáció?

41. Mi a jelentősége az Ackermann képletnek?

42. Egy lineáris, $W(s) = 1/(1 + 10s)$ átviteli függvényű tag $p = -1/10$ pólusát **PD** soros kompenzációval $p_R = -1$ értékre kívánjuk áthelyezni. Mekkora túlvezérléssel oldható meg a pólusáthelyezés?

43. Mi az előnye annak, ha a zárt rendszer eredő átviteli függvényének domináns póluspája van?

44. Adjon meg egy mérési eljárást az **FI** tag frekvencia függvényének kísérleti meghatározására!

45. A szabályozási rendszer gyökhelygörcbén érzékeltesse a strukturális és a feltételes stabilitás fogalmait!

46. Mire alkalmasak az alább felsorolt MATLAB függvények?

```
[x,y]=inicial(G,H,x0);
[x,y]=impulse(G,H);
[x,y]=step(G,H);
[x,y]=lsim(G,H,u,t);
[x,y]=lsim(A,B,C,D,u,t,x0);
[re,im]=nyquist(G,H);
[a,f,w]=bode(G,H);
[at,ft,wt,wc]=margin(G,H);
[G,H]=parallel(G1,H1,G2,H2);
[G0,H0]=series(Gc,Hc,Gp,Hp);
[GR,HR]=cloop(G0,H0);
[GRu,HRu]=feedback(Gc,Hc,Gp,Hp);
F=acker(A,B,pR);
[A,B,C,D]=tf2ss(G,H);
[G,H]=ss2tf(A,B,C,D);
[Ac,Bc,Cc,Dc,Td]=canon(A,B,C,D,'type');
Co=ctrb(A,B);Ob=obsv(A,C);
[G,H]=pade(Th,n);
r=rlocus(G0,H0);
printsys(A,B,C,D);printsys(G,H,'s');printsys(G,H,'z');
[Gm,Hm]=minreal(G,H);
```

```
[m,p]=eig(A);
l=length(x);
p=roots(H);
[t,x]=ode45('xprime',t0 tf,x0);
x=fzero('function',x0);
I=eye(n);Z=zeros(m,n);O=ones(m,n);
P=polyval(p,A);
c=conv(a,b);
Ai=inv(A);ad=det(A);PA=poly(A);
Fe=expm(A);Fl=logm(A);Fq=sqrtm(A);
xmx=max(x);xmn=min(x);
ra=rank(A);
r=real(z);i=imag(z);zc=conj(z);
za=abs(z);zf=angle(z);
xe=exp(x);xl=log(x);xl0=log10(x);
xq=sqrt(x);
```

