Haladó lineáris algebra

MÁSODIK HÁZI FELADAT

Jelölje a legföljebb harmadfokú polinomok vektorterét $\mathcal{P}$. Tegyük fel, hogy egy $\mathcal{P}$-beli $\boldsymbol{p}$ polinommal leírható mennyiségre végzünk „pontos” mérést az $\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ helyeken.
Gondoljuk meg, hogy a $\big(\boldsymbol{p}(x_3),\boldsymbol{p}(x_1),\boldsymbol{p}(x_2),\boldsymbol{p}(x_3)\big) \in \mathbb{R}^4$ vektorhoz a $\boldsymbol{p} \in \mathcal{P}$ polinomot rendelő leképezés lineáris! Minket azonban nem is maga a polinom érdekel, hanem csak a $\boldsymbol{p}'(0)$, az $\int_0^1 \boldsymbol{p}(x)dx$, és az $\int_{-1}^1 \boldsymbol{p}(x)dx$ értékek. Tehát a

$$\big(\boldsymbol{p}(x_3), \boldsymbol{p}(x_1), \boldsymbol{p}(x_2), \boldsymbol{p}(x_3)\big) \longmapsto \left(\boldsymbol{p}'(0), \int_0^1 \boldsymbol{p}(x)dx, \int_{-1}^1 \boldsymbol{p}(x)dx\right)$$

leképezést szeretnénk megadni minél egyszerűbben.

1. Adjunk tömör indoklást arra, hogy e leképezés lineáris!

Az előadáson beláttuk, hogy a *deriválás* és a *határozott integrálás* művelete lineáris *(megvizsgáltuk a homogenitást és az additivitást)*, ezért a keresett, fenti leképezés is lineáris lesz, mivel e két műveletet fogja elvégezni a „mért” értékeken.

2. Mivel e leképezés lineáris, így megadható egy mátrixszal való szorzással. Válasszunk konkrét $\boldsymbol{x}_i$ értékeket (csupa különbözőt!), és határozzuk meg e mátrixot. (Aki e feladatot programmal oldja meg, válasszon nem egész $\boldsymbol{x}_i$ értékeket.)

A feladat szövege szerint a legfeljebb harmadfokú polinomok terében vagyunk, azaz

$$\boldsymbol{p}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3,$$

ahol a_i-k a polinom együtthatói. Továbbá a feladat azt is megadja, hogy négy különböző x értékre mértünk valamilyen $\boldsymbol{p}(x)$ értéket, amelyet célszerű felírni egy egyenletrendszer formájában a következőképp

$$\begin{aligned}
a_0 + a_1(x_0) + a_2(x_0)^2 + a_3(x_0)^3 &= \boldsymbol{p}(x_0),\\
a_0 + a_1(x_1) + a_2(x_1)^2 + a_3(x_1)^3 &= \boldsymbol{p}(x_1),\\
a_0 + a_1(x_2) + a_2(x_2)^2 + a_3(x_2)^3 &= \boldsymbol{p}(x_2),\\
a_0 + a_1(x_3) + a_2(x_3)^2 + a_3(x_3)^3 &= \boldsymbol{p}(x_3).
\end{aligned}$$

E négy egyenletből álló lineáris egyenletrendszer felírható mátrixegyenlet formájában is

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}(x_0) \\ \boldsymbol{p}(x_1) \\ \boldsymbol{p}(x_2) \\ \boldsymbol{p}(x_3) \end{bmatrix},$$

ahol a 4×4-es mátrixot nevezzük el $\mathbf{A}$-nak, míg az együtthatók oszlopvektorát $\mathbf{a}$-nak. Így a négy darab mérést tekinthetjük úgy, mint egy leképezést, amely az $A(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax}$ műveletet hajtja végre. Az, hogy mi lesz a $\mathbf{p}(x)$, az a mérendő polinom együtthatóitól függ és mivel négy különböző x-re mértünk, ezért ezek az együtthatók egyértelműen meghatározhatók. Ez onnét is következik, hogy az $r(\mathbf{A}) = 4$, azaz invertálható a mátrix és a leképezésnek is van inverze.

Noha a feladat szövege szerint nem érdekes maga a polinom, de én a feladat megoldása során mégis abba az irányba megyek, hogy először meg fogom határozni az együtthatókat és majd ezek alapján a deriváltat és a határozott integrált.

Ismét felírva a feladatot

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{p}(x_0) \\ \boldsymbol{p}(x_1) \\ \boldsymbol{p}(x_2) \\ \boldsymbol{p}(x_3) \end{bmatrix} \xmapsto{T()} \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}'(0) \\ \int_0^1 \boldsymbol{p}(x)dx \\ \int_{-1}^1 \boldsymbol{p}(x)dx \end{bmatrix},$$

ahol a keresett lineáris leképezés a $T(\cdot)$, vagy más néven a **T** mátrix, amely végrehajtja a megfelelő leképezést egy mátrixszorzással.
Én ezt a leképezést az alábbi módon kerestem

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{p}(x_0) \\ \boldsymbol{p}(x_1) \\ \boldsymbol{p}(x_2) \\ \boldsymbol{p}(x_3) \end{bmatrix}}_{\mathbf{p}(\mathbf{x})} \xmapsto{A^{-1}()} \underbrace{\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}} \xmapsto{H()} \underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{p}'(0) \\ \int_0^1 \boldsymbol{p}(x)dx \\ \int_{-1}^1 \boldsymbol{p}(x)dx \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}},$$

azaz a $T = H \circ A^{-1}$ összetett leképezésre bontottam. Mátrixszorzásokkal felírva

$$\mathbf{a} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{p}(\mathbf{x}) \text{ és } \mathbf{b} = \mathbf{Ha} \longrightarrow \mathbf{b} = (\mathbf{HA}^{-1})\mathbf{p}(\mathbf{x}) = \mathbf{Tp}(\mathbf{x}),$$

ahol a **H** mátrix három sorából az első a deriválásért felelős, míg a maradék kettő a megfelelő határozott integrál kiszámításáért. A deriválás képzése

$$\boldsymbol{p}'(0) = 0a_0 + a_1 + 0a_2 + 0a_3 \longrightarrow (0, 1, 0, 0),$$

illetve a két határozott integrálé

$$\begin{aligned} \int_0^1 \boldsymbol{p}(x)dx &= a_0 + \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{3}a_2 + \frac{1}{4}a_3 \longrightarrow \begin{pmatrix}1, & 1/2, & 1/3, & 1/4\end{pmatrix}, \\ \int_{-1}^1 \boldsymbol{p}(x)dx &= 2a_0 + 0a_1 + \frac{2}{3}a_2 + 0a_3 \longrightarrow \begin{pmatrix}2, & 0, & 2/3, & 0\end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Most már felírható a **H** mátrix

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 2 & 0 & 2/3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Az $\mathbf{A}^{-1}$-et MATLAB segítségével számoltam ki, $\mathbf{x} = (0{,}15; \quad 5{,}8; \quad 9{,}2; \quad 2{,}5)$ értékekre

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1{,}1102 & 0{,}0544 & -0{,}0106 & -0{,}1540 \\ -0{,}7561 & -0{,}3905 & 0{,}0764 & 1{,}0703 \\ 0{,}1456 & 0{,}1869 & -0{,}0410 & -0{,}2916 \\ -0{,}0083 & -0{,}0158 & 0{,}0049 & 0{,}0192 \end{bmatrix}.$$

Ezek alapján a leképezés mátrixát is meg tudtam határozni

$$\mathbf{T} = \mathbf{HA}^{-1} = \begin{bmatrix} -0{,}7561 & -0{,}3905 & 0{,}0764 & 1{,}0703 \\ 0{,}7786 & -0{,}0825 & 0{,}0152 & 0{,}2887 \\ 2{,}3174 & 0{,}2335 & -0{,}0484 & -0{,}5025 \end{bmatrix}.$$

3. Számításainkat ellenőrizzük a $\boldsymbol{p}_1(x) = x^3 - x^2 + x - 1$ és a $\boldsymbol{p}_2(x) = 1$ polinomból számolt értékekkel.

Az ellenőrzéshez az $\mathbf{x} = [0{,}15; \quad 5{,}8; \quad 9{,}2; \quad 2{,}5]$ értékekkel számoltam,

$$\mathbf{Tp}_1(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -0{,}7561 & -0{,}3905 & 0{,}0764 & 1{,}0703 \\ 0{,}7786 & -0{,}0825 & 0{,}0152 & 0{,}2887 \\ 2{,}3174 & 0{,}2335 & -0{,}0484 & -0{,}5025 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0{,}8691 \\ 166{,}2720 \\ 702{,}2480 \\ 10{,}8750 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}0000 \\ -0{,}5833 \\ -2{,}6667 \end{bmatrix},$$

valamint

$$\mathbf{Tp}_2(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -0{,}7561 & -0{,}3905 & 0{,}0764 & 1{,}0703 \\ 0{,}7786 & -0{,}0825 & 0{,}0152 & 0{,}2887 \\ 2{,}3174 & 0{,}2335 & -0{,}0484 & -0{,}5025 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

A megoldás során használt MATLAB-kódok:

```
x0 = 0.15;
x1 = 5.8;
x2 = 9.2;
x3 = 2.5;
x  = [x0 x1 x2 x3];

A  =   [1 x0 x0^2 x0^3;1 x1 x1^2 x1^3;1 x2 x2^2 x2^3;1 x3 x3^2 x3^3];
inv_A = inv(A);

H = [0 1 0 0;1 1/2 1/3 1/4;2 0 2/3 0];
T = H*inv_A;

pp1 = polyval([1 -1 1 -1],x);
pp2 = polyval([0 0 0 1],x);

bb1 = T*pp1';
bb2 = T*pp2';
```