1. a) T: Ha $a_n \to A \in \mathbb{R}$ és $b_n \to B \in \mathbb{R}$, akkor $(a_n + b_n) \to (A+B)$.

B: limesz definíció alapján:

$\forall \varepsilon > 0: \exists N_a(\varepsilon) \in \mathbb{R}$, hogy $n > N_a(\varepsilon)$ esetén $|a_n - A| < \varepsilon$.

$\forall \varepsilon > 0: \exists N_b(\varepsilon) \in \mathbb{R}$, hogy $n > N_b(\varepsilon)$ esetén $|b_n - B| < \varepsilon$.

Legyen $\varepsilon' = \varepsilon/2$. ε'-hoz is $\exists N_a(\varepsilon'), N_b(\varepsilon')$

Ha $n > \max\{N_a(\varepsilon'), N_b(\varepsilon')\}$, akkor

$$|(a_n+b_n)-(A+B)| \underset{\Delta\text{-egyenlőtlenség}}{\le} |a_n - A| + |b_n - B| < \varepsilon' + \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

így $\forall \varepsilon > 0: \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{R}$, hogy $n > N(\varepsilon)$ esetén $|(a_n+b_n)-(A+B)| < \varepsilon$.

$N(\varepsilon) = \max\{N_a(\varepsilon'), N_b(\varepsilon')\}$

Így limesz def. miatt $(a_n + b_n) \to (A+B)$.

b) $$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n^3-n+2}{-n^3+5n^2-2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}+2-\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^3}}{-1+\frac{5}{n}-\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}} \to \frac{0+2-0+0}{-1+0-0+0} = \frac{2}{-1}$$

$$= \underline{\underline{-2}}$$

(Azonos fokszámú polinomok, így egyszerűen a főegyütthatók hányadosa)

Analízis szig. inf.
2016.06.02. "A"
NEM HIVATALOS MEGOLDÁS!
Hibák előfordulhatnak

2.

$$\int_3^\infty \frac{1}{x(x-2)}\,dx = \lim_{\omega\to\infty}\int_3^\omega \frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}\,dx = \lim_{\omega\to\infty}\left[-\frac{1}{2}\ln|x|+\frac{1}{2}\ln|x-2|\right]_3^\omega =$$

$$\lim_{\omega\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\ln|\omega|+\frac{1}{2}\ln|\omega-2|+\frac{1}{2}\ln|3|-\underbrace{\frac{1}{2}\ln|\cancel{3-2}|}_{\ln 1=0}\right) =$$

$$\frac{1}{2}\lim_{\omega\to\infty}\left(\ln\left|\frac{3(\omega-2)}{\omega}\right|\right) = \underline{\underline{\frac{1}{2}\ln 3}}$$ $< \infty$, tehát konvergens.

$$\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2} = \frac{1}{x(x-2)} \quad \Big|\cdot x(x-2)$$

$A(x-2)+Bx=1$

$\underbrace{Ax+Bx}\ \underbrace{-2A=1}$

$A+B=0 \qquad -2A=1$

$B=-A \qquad A=-1/2$

$B=1/2$

$$\frac{3\omega-6}{\omega}\to 3 \quad (\omega\to\infty)$$

Analízis szig. inf.
2016.06.02. "A"
NEM HIVATALOS
MEGOLDÁS!
Hibák előfordulhatnak

3. a) $f(x)$ konkáv az (a,b) intervallumon, ha $\forall x \in (a,b)$ esetén $f(x) \geq h_{a,b}$. $h_{a,b}$ az $(a, f(a))$ és $(b, f(b))$ ponton átmenő húr.

b) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 2$

$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$

$f''(x) = 12x - 6$

$f'''(x) = 12$

Lok. szél.: / Monotonitás:

$f'(x) = 0$

$6x^2 - 6x - 12 = 0 \quad /:6$

$x^2 - x - 2 = 0$

$(x+1)(x-2) = 0$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2 \end{array}\right\}$ itt lehet szél.

$f''(-1) < 0 \Rightarrow$ van szél, max.

$f''(2) > 0 \Rightarrow$ van szél, min.

Inf. p.: / Konvexitás:

$f''(x) = 0$

$12x - 6 = 0$

$x = 1/2 \Rightarrow$ itt lehet inf. p.

$f'''(1/2) \neq 0 \Rightarrow$ van inf. p.

$x \in$	$(-\infty; -1)$	$\{-1\}$	$(-1; \frac{1}{2})$	$\{\frac{1}{2}\}$	$(\frac{1}{2}; 2)$	$\{2\}$	$(2; \infty)$	
Lok. szél. Monot.	↗	max. lok.	↘	↘	↘	lok. min.	↗	
Inf. p. Konv.	∩	∩	∩	inf. p.	∪	∪	∪	

$f''(x < \frac{1}{2}) < 0$ $\qquad$ $f''(x > \frac{1}{2}) > 0$

Bi. 1.re., lin., inh., köz. de: $y' + p(t)y = g(t)$

a) Homogén megfelelő: $y' + p(t)y = 0$

Legyen az inhomogén egyenlet megoldása $y_{ip1}(t)$ és $y_{ip2}(t)$.

Így tehát $y_{ip1}'(t) + p(t)y_{ip1}(t) = g(t)$ és

$y_{ip2}'(t) + p(t)y_{ip2}(t) = g(t)$ teljesül.

Kivonva egymásból:

$$y_{ip1}'(t) - y_{ip2}'(t) + p(t)\left(y_{ip1}(t) - y_{ip2}(t)\right) = 0,$$

$(y_{ip1} - y_{ip2})'(t) + (y_{ip1} - y_{ip2})(t) \cdot p(t) = 0$ teljesül, így

$(y_{ip1} - y_{ip2})(t)$ megoldása a homogén d.e.-nek. ■

b) $y' + 2ty = 2te^{-x^2}$

(H) $y' + 2ty = 0$

$y' = -2ty$ $\qquad y \equiv 0$ OK. (m.o.)

$\frac{y'}{y} = -2t \quad /\int$

$\ln|y| = -x^2 + K \qquad K \in \mathbb{R}$

$y = \pm e^{-x^2} \cdot \cancel{e^K} D \qquad D \in \mathbb{R}$

$y \equiv 0$

$y = e^{-x^2} \cdot D$

(IH) $y = D(t)e^{-x^2}$

$y' = D(t)e^{-x^2} \cdot -2t + D'(t)e^{-x^2}$

$y' + 2ty = 2te^{-x^2}$

$\cancel{D(t)e^{-x^2} \cdot -2t} + D'(t)e^{-x^2} \cancel{+2t \cdot D(t) \cdot e^{-x^2}} = 2t \cdot e^{-x^2}$

$D'(t)\cancel{e^{-x^2}} = 2t\cancel{e^{-x^2}}$

$D'(t) = 2t$

$D(t) = x^2 + C \qquad \Rightarrow \boxed{y(t) = e^{-x^2}(x^2 + C)}$

$C \in \mathbb{R}$

5.

a) T: $\sum_n a_n$ konvergens $\Rightarrow$ $a_n \to 0 \ (n\to\infty)$.

B: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{i\to\infty} \sum_{k=0}^{i} a_k = \lim_{i\to\infty} S_i$ (i. részletösszeg)

$\lim_{i\to\infty} S_i = \lim_{i\to\infty} S_{i-1}$, mert részsorozat.

$S_i = S_{i-1} + a_i \quad \Big/ \lim_{i\to\infty}$

$\underbrace{\cancel{\lim_{i\to\infty} S_i} = \cancel{\lim_{i\to\infty} S_{i-1}}}_{=} + \lim_{i\to\infty} a_i$

$\lim_{i\to\infty} a_i = 0.$ $\blacksquare$

b) $\sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{\frac{k}{k^5+1}} \overset{?}{<} \infty$ $\quad \cancel{a_k = \sqrt{\frac{k}{k^5+1}}}$

$\sqrt{\frac{k}{k^5+1}} \le \sqrt{\frac{k}{2k^5}} = \sqrt{\frac{k}{k^5}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{k^4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{k^2}$

$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\frac{1}{k^2}\right)$ konv. majoráns, mert $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konv., így a konstansszorosa is.

Így az eredeti sor is konvergens.

6. a) Ha $f(x)$ x_0-ban végtelen sokszor deriválható, akkor f x_0 középponti Taylor-sora:

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x-x_0)^k$$

b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad x_0 = 0 \quad$ x^6 e.h. $=?$

$$f(x) = \left(1+(-x^2)\right)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/2}{k} \cdot (-x^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\binom{-1/2}{k} \cdot (-1)^k}_{a_k} \cdot x^{2k}$$

x^6 együtthatóját keressük. $x^{2k} = x^6 \Rightarrow k=3$, így a_3 az.

$$a_3 = \binom{-1/2}{3} \cdot (-1)^3 = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)}{3!} \cdot \cancel{(-1)}\cancel{(-1)}(-1) =$$

$$\frac{\left(+\frac{1}{2}\right)\left(+\frac{3}{2}\right)\left(+\frac{5}{2}\right)}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot +1 = \frac{\cancel{1} \cdot \cancel{3} \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cancel{3} \cdot 2 \cdot \cancel{1}} = \underline{\underline{\frac{5}{16}}}$$

Analízis szig. inf.
2016.06.02. "A"
NEM HIVATALOS
MEGOLDÁS!
Hibák előfordulhatnak

7. a) $f(x,y)$-nak lok. minima van egy (x_0,y_0) pontban, ha $\exists K_{(x_0,y_0)}$ környezete, hogy

$$\forall \underline{x} \in \underbrace{\dot{K}_{(x_0,y_0)}}_{K(x_0,y_0)\setminus\{(x_0,y_0)\}} : f(\underline{x}) > f(x_0,y_0)$$

b) $f(x,y) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3 y}{3} + 9y$

$$\left.\begin{aligned} f'_x(x,y) &= x^3 - x^2 y = 0 \\ f'_y(x,y) &= -\frac{x^3}{3} + 9 = 0 \end{aligned}\right\}$$

$\frac{x^3}{3} = 9 \Rightarrow x^3 = 27 \Rightarrow \underline{x=3}$

$x^3 - x^2 y = 0$

$3^3 - 3^2 y = 0$

$27 = 9y$

$\underline{y=3}$

$(3,3)$ stac. pont (itt lehet lok. szél.)

$f''_{xx}(x,y) = 3x^2 - 2xy$

$f''_{xy}(x,y) = -x^2$

$f''_{yx}(x,y) = -x^2$

$f''_{yy}(x,y) = 0$

$$H = \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{bmatrix}$$

$$H(3,3) = \begin{bmatrix} 3\cdot 3^2 - 2\cdot 3\cdot 3 & -3^2 \\ -3^2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -9 \\ -9 & 0 \end{bmatrix}$$

$D_2 = 9\cdot 0 + 9\cdot 9 \Leftarrow 0$ … $D_2 = 9\cdot 0 - 81 < 0$

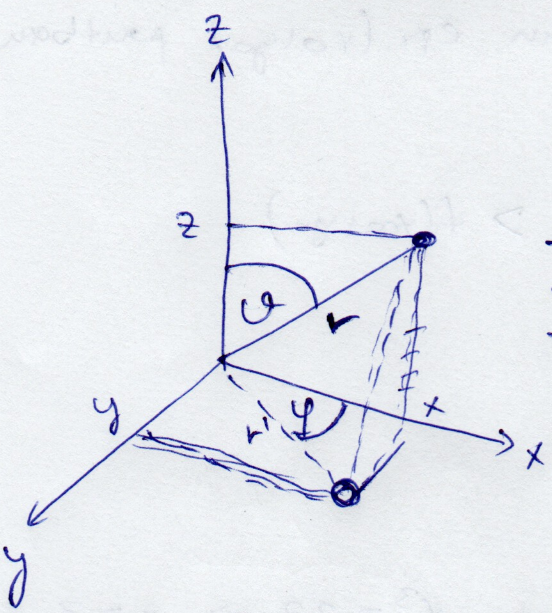
$\Rightarrow$ nyeregpont

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{nincs lok. szél.}}$

Analízis szig. inf.
2016.06.02. "A"
NEM HIVATALOS
MEGOLDÁS!
Hibák előfordulhatnak

8.

a)



$$r' = r\cdot\sin\vartheta$$
$$z = r\cdot\cos\vartheta$$
$$x = r'\cdot\cos\varphi = r\cdot\sin\vartheta\cdot\cos\varphi$$
$$y = r'\cdot\sin\varphi = r\cdot\sin\vartheta\cdot\sin\varphi$$

b) $f(x,y,z) = z^2$

$$f(r,\varphi,\vartheta) = (r\cdot\cos\vartheta)^2 = r^2\cos^2\vartheta$$

$$\iiint_K f(x,y,z)\,dk = \iiint_{\hat{K}} f(r,\varphi,\vartheta)\cdot\underbrace{r^2\sin\vartheta}_{|J|}\,d\hat{k}$$

$\hat{K}$: $r: 0 \to 3$
$\varphi: 0 \to \pi/2$
$\vartheta: 0 \to \pi/2$

Fubini-tétel

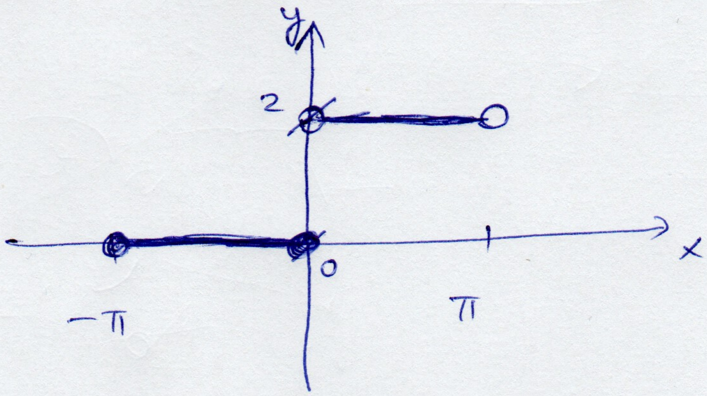
$$\int_{r=0}^{3}\int_{\varphi=0}^{\pi/2}\int_{\vartheta=0}^{\pi/2} r^2\cos^2\vartheta\cdot r^2\cdot\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi\,dr = \int_0^3 r^4\,dr\cdot\int_0^{\pi/2} 1\,d\varphi\cdot -\int_0^{\pi/2}\underbrace{-\cos^2\vartheta\sin\vartheta}_{\cos^2\varphi\cdot\cos'\varphi \text{ alakú}}\,d\vartheta =$$

$$\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^3\cdot\left[\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot-\left[\frac{\cos^3\vartheta}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{3^5}{5}-\frac{0}{5}\right)\left(\frac{\pi}{2}-0\right)\cdot+\left(\cancel{\frac{\cos^3\frac{\pi}{2}}{3}}+\frac{\cos^3 0}{3}\right) =$$

$$\frac{3^{\cancel{5}\,4}\cdot\pi\cdot 1}{5\cdot 2\cdot\cancel{3}} = \frac{3^4\pi}{10} = \boxed{\frac{81\pi}{10}}$$

9.

$$f(x)=\begin{cases}0 & x\in[-\pi,0]\\ 2 & x\in(0,\pi)\end{cases} \qquad f(x+2\pi)=f(x)\ \forall x$$



F-sor def. alapján $\Phi(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos kx+b_k\sin kx\right)$

$\sin(3x)$ együtthatóját keressük, tehát b_3-at.

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx$$

$$b_3=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}2\sin(3x)\,dx=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos(3x)}{3}\right]_0^{\pi}=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{\cos(3\pi)}{3}+\frac{\cos(3\cdot 0)}{3}\right)=$$

$[-\pi,0]$-n $f(x)\sin(3x)=0$, mert $f(x)=0$

$$\frac{2}{\pi}\left(+\frac{(+1)}{3}+\frac{1}{3}\right)=$$

$$\frac{2}{\pi}\cdot\frac{2}{3}=\boxed{\frac{4}{3\pi}}$$