# **BSZ 0. gyakorlat**

**FELADATOK:**

1. Hány olyan különböző (nem izomorf) egyszerű gráf van, amelynek n=100 csúcsa és e=4948 éle van?

2. Ki lehet-e színezni a Petersen-gráf éleit 3 színnel úgy, hogy a szomszédos élek különbözőek legyenek?

3. Bizonyítsd be, hogy 5 földi ország között biztosan van 2 nemszomszédos!

4. Bejárható-e a 4x4-es “sakktábla” lóval? (A bejárás itt annyit tesz, hogy elindulsz valamelyik mezőről, ugrálsz valahogy lólépésben, és minden mezőre pontosan egyszer lépsz.)

5. Adottak d1, d2, ... dn pozitív egész számok és d1+...+dn = 2n-2. Igaz-e, hogy mindig létezik olyan fa, amelynek ezen d-k a fokai és n csúcsa van? Akár igen, akár nem, bizonyítsd be!

6. Igaz-e, hogy tetszőleges összefüggő gráfból mindig elhagyható úgy egy csúcs (természetesen éleivel együtt), hogy a maradék is összefüggő lesz?

**MEGOLDÁSOK:**

1. Nézzük meg K100-at! Ennek = 4950 éle van. Ebből tehát két élet kell elhagyni ahhoz, hogy a kérdéses gráfot kapjuk meg. Ez hányféle nem izomorf gráfot adhat? Összesen kétfélét, ugyanis vagy egymással szomszédos éleket hagyunk el, vagy nem. Ha szomszédos éleket hagyunk el, akkor mindegy, hogy melyik kettőt, ugyanazt a gráfot kapjuk. Ha pedig nem szomszédosakat, akkor se számít, hogy melyikeket, hiszen minden esetben “másodszomszédokat” hagyunk el, azaz a végpontjaik össze lesznek kötve. Tehát egyik esetet sem kell tovább bontani.

Azaz a válasz: 2

2. Színezzük ki a Petersen-gráf külső ötszögét az alábbi módon:

Bármely más színezés átalakítható ebbe forgatással, tükrözéssel, és a színek permutálásával. Tehát az összes lehetséges színezés helyett vehetjük csak ezt az egyet. A külső 5 pontot a belső 5-tel összekötő élek színezése egyértelmű:

Ekkor azonban a belső pentagramma összes éle szomszédos kék éllel, tehát azokat csak pirossal és zölddel lehet kiszíneznünk. Ez viszont nyilvánvalóan lehetetlen:

A kétféle szaggatott vonalat se pirossal, se zölddel nem tudjuk kiszínezni.

Tehát a válasz: nem.

3. Tegyük fel, hogy nincs két nemszomszédos ország, azaz mindegyik ország szomszédos mindegyikkel! Rajzoljuk le a térképet és képezzük a duálisát, azaz minden országnak feleltessünk meg egy pontot, és a szomszédosokat kössük össze éllel! Ekkor egy síkgráfot kapunk, hiszen a térkép is síkgráf volt (még ha a Földet gömbölyűnek vesszük, akkor is; ld. sztereografikus projekció). Másrészt van rajta öt pont (ország), amely mindegyike össze van kötve mindegyik másikkal, azaz a gráfnak K5 részgráfja. Ekkor azonban Kuratowski tétele szerint nem síkgráf. Ellentmondásra jutottunk, tehát eredeti feltevésünk, miszerint az állítás hamis hamis. Tehát az állítás igaz.

4. Fogalmazzuk át a feladatot:

A 4x4-es „sakktábla” minden mezőjének feleltessünk meg egy pontot, és azokat kössük össze éllel, amelyek között lóugrással lehet mozogni! Van-e Hamilton-út ebben a gráfban?

Még órán vettük: ha egy gráfból elhagyva egy csúcsot, az három vagy több komponensre esik szét, akkor a gráfban nem lehet H-út. Ennek az az oka, hogy a H-útnak mindhárom részen végig kell mennie, így köztük is el kell tudni haladni. Az egyetlen csatlakozási pontot viszont csak egyszer használhatjuk (hiszen útról van szó), de így csak két komponenst tudunk bejárni.

Ezt ki lehet terjeszteni úgy, hogy ha egy gráfból k db csúcsot elhagyva, az k+2 db részre esik szét, akkor abban a gráfban nem lehet H-út.

Ha a sakktáblagráfunkból a „középső” 4 csúcsot elhagyjuk, akkor a 4 sarokpontra és két négyzetre, azaz 6 külön komponensre esik szét. Tehát a fenti logika szerint nincs benne H-út.

Így a válasz: nem járható be.

5. Írjunk le d1-1 darab 1-est, d2-1 darab 2-est, ... dn darab n-et! Ez összesen d1-1+d2-1+...+dn = d1+...+dn-(n-1) = 2n-2-n+1 = n-1 darab 1 és n közötti szám, az utolsó pedig n. Tekintsük ezt Prüfer-kódnak! A Cayley-tétel bizonyítása során megmutattuk, hogy ez mindenképp lehetséges, azaz mindig lehet olyan fát készíteni, aminek ez a tetszőleges sorozat a Prüfer-kódja.

Hányszor szerepel a Prüfer-kódban egy csúcs száma? Ahány csúcsot elhagyunk mellőle. Ez az utolsón kívül fokszám-1, mivel akkor hagyunk el egy csúcsot, amikor már csak egy él kötődik hozzá, azaz: miután már elhagytunk fokszám-1 darab élet (és így csúcsot) mellőle. Az utolsó csúcs mellől pedig az összes csúcsot elhagyjuk, azaz pont fokszámszor szerepel a Prüfer-kódban. Tehát a fent leírt sorozatból képzett fa fokszámai pontosan d1, d2, ... dn.

Tehát a válasz: igen, mindig létezik ilyen fa.

6. Nevezzük az olyan gráfokat, amelyekből akármelyik csúcsot elhagyva nem öf. gráfot kapunk, szétesősnek! Tfh. létezik olyan G gráf, amely szétesős!

Hagyjuk el egy csúcsát, ekkor szétesik valahány komponensre. Ha ezek közül valamelyik nem szétesős, akkor rakjuk vissza a kivett csúcsot és éleit, és vegyük ki azt a csúcsot, amivel a nem szétesős komponens nem esik szét. Ekkor G-ből el tudtunk hagyni csúcsot úgy, hogy nem esik szét. Ez nem lehetséges, tehát a komponensek mindegyike szétesős kell, hogy legyen.

Most daraboljuk fel a komponenseket, és folytassuk az eljárást! Mivel mindig elhagyunk egy-egy csúcsot, ezért a komponensek mérete fokozatosan csökkenni fog. Ha olyan gráfhoz jutunk, amelyből el lehet hagyni csúcsot úgy, hogy pontokra essen szét, akkor e gráf minden éle ehhez a csúcshoz csatlakozik, azaz a gráf egy „csillag”. Ez viszont nem szétesős, hiszen elhagyhatjuk valamelyik ágát. Tehát ilyen gráfhoz nem juthatunk. Akkor viszont biztos, hogy 2-csúcsú gráfot is fogunk kapni a darabolás közben. 2-csúcsú szétesős gráf pedig nincs.

Tehát nem létezik szétesős gráf, azaz a válasz: igaz.

(Megjegyzés: Lehet kicsit egyszerűbben is teljes indukcióval, de ezt mindenki gondolja meg maga)

# **BSZ 1. gyakorlat**

**FELADATOK:**

1. Ha lehet, rajzold le az alábbi ábrákat egy vonallal, a ceruza felemelése nélkül!

a)

b)

2. Van-e Hamilton-köre az ábrán látható gráfnak? És Hamilton-útja?

3. Igazold, hogy ha egy gráf minden pontjának foka 4, akkor élei kiszínezhetők piros és kék színekkel úgy, hogy (minden él teljes hosszában egyszínű legyen és) minden ponthoz két piros és két kék él illeszkedjék!

4. Van-e a Petersen-gráfnak

a) Hamilton-útja;

b) Hamilton-köre?

5. Egy 20 tagú társaságban mindenki ugyanannyi embert ismer a többiek közül. Bizonyítsd be, hogy le tudnak ülni egy köralakú asztal mellé vagy úgy, hogy mindenki mindkét szomszédját ismeri, vagy úgy, hogy senki sem ismeri egyik szomszédját sem!

6. Hány élt kell legalább hozzávenni a Petersen-gráfhoz, hogy legyen benne Euler-kör?

7. Jelölje S(n,k) azt a gráfot, melynek csúcsai az nxk-as sakktábla mezői, két csúcs pedig akkor szomszédos, ha a megfelelő mezők (oldaluk mentén) szomszédosak. Mely (n,k) értékekre van ebben a gráfban

a) Euler-út;

b) Euler-kör;

c) Hamilton-út;

d) Hamilton-kör?

8. Igazold, hogy ha egy 2k+1 pontú egyszerű gráfban minden pont foka legalább k, akkor a gráfban van Hamilton-út!

9. Elkészíthető-e az ábrán látható 4x4-es négyzetháló

a) 8 db 5 cm-es

b) 5 db 8 cm-es

zsinórdarabból (olló használata nélkül)?

**MEGOLDÁSOK:**

1. a)

Induljunk el a nyilak irányába, járjuk körbe a belső négyzetet, utána a rombuszt, majd a nagyobbik négyzetet, végül (visszaérve a kezdőpontba) haladjunk végig a háromszögön.

b) A feladat tulajdonképpen Euler-út keresése, ha az ábrákat gráfoknak tekintjük.

A pirossal jelzett csúcsok fokszáma páratlan. Az Euler-út szükséges feltétele azonban, hogy két páratlan fokszámú csúcs legyen. Így biztos, hogy nincs a gráfban Euler-út.

Tehát nem rajzolható le egy vonallal.

2. Vegyük ki a középső ötszög csúcsait! Ekkor a gráf két ötszögre és öt izolált pontra, azaz 7 komponensre esik szét 5 csúcs elvételével. Mint azt a múltkor és órán is láttuk, ilyen esetben a gráfnak sem H-útja, sem H-köre nincs.

3. Mivel minden pont foka páros, ezért van Euler-köre a gráfnak. Rajzoljuk ezt meg felváltva pirossal illetve kékkel! Így minden élet kiszíneztünk. Csak azt kell belátni, hogy az előírásnak megfelelően-e.

A közbülső pontokkal nincs gond: ha piros élen érkezünk egy pontba, akkor kék élen távozunk belőle, és fordítva. Tehát a 4 él felét pirossal, felét kékkel színezzük.

A kezdő (és egyben végpont) esetében: egyszer ugyanúgy áthaladunk rajta, mint a többi ponton, ezzel nincs gond. De vajon ellenkező színű-e az Euler-kör legelső (kiinduló) és legutolsó (beérkező) éle? A válasz: igen, mivel az Euler-kör páros hosszú. Ennek pedig az az oka, hogy 2e = szumma(fokszám) = 4n-ből e = 2n, tehát páros sok él van. Az Euler-kör hossza pedig az összes él száma.

4. a) Van. Menjünk végig a külső ötszögön, majd a belső pentagrammán. Könnyen látható bejárás.

b) Nincs.

Tegyük fel, hogy van H-kör a Petersen-gráfban! Ez egy tíz hosszú kör, színezzük ki két színnel felváltva. A maradék öt élet pedig egy harmadik színnel. Mivel minden pont harmadfokú, és mindegyiken áthalad a H-kör, minden csúcshoz különböző színű élek csatlakoznak. Tehát ki tudtuk úgy színezni a Petersen-gráfot 3 színnel, hogy a szomszédos élek különböző színűek. Ennek ellenkezőjét azonban a múltkor bizonyítottuk. Így a feltevésünk helytelen volt. Tehát nincs H-kör a Petersen-gráfban.

5. A 20 embernek feleltessünk meg 20 csúcsot, és kössük össze azokat, akik ismerik egymást! Ez egy k-reguláris gráf, minden ember k db másikat ismer. Ekkor a feladat: bebizonyítani, hogy vagy a gráfban, vagy a duálisában van Hamilton-kör. Hiszen ezt a H-kört kell az asztal köré tenni.

Ha k 10 vagy annál nagyobb, akkor a Dirac-tétel miatt biztosan van H-kör a gráfban.

Ha k kisebb, mint 10, akkor tekintsük a duálisát. Ebben minden fokszám 19-k, ami nagyobb vagy egyenlő, mint 10, tehát a Dirac-tétel miatt a duálisban van H-kör.

6. A Petersen-gráfban mindegyik fokszám 3, azaz páratlan. Ahhoz, hogy Euler-kör legyen, mindegyiket párossá kell tenni. Egy él behúzása max. 2 fokszámot tesz helyre. Tehát a 10 fokszám kijavításához legalább 5 él kell.

Ennyi azonban biztosan elég: vegyünk hozzá 5 diszjunkt élet a Petersen-gráfhoz! Ekkor minden pont fokszáma 3+1 azaz 4 lesz. Tehát ebben a gráfban biztos, hogy lesz Euler-kör.

Így a válasz: 5.

7. a) Az Euler-úthoz pontosan két páratlan fokszámra van szükség. Ha n vagy k egy, akkor a gráf egy sima úttá válik, amiben természetesen van E-út. Ha nem, akkor a másodfokú sarkok, és negyedfokú belső csúcsok mellé 2 harmadfokú oldalpontot kell venni. A 2x2-es gráfban 0 ilyen van, a 2x3-asban 2, a nagyobbakban pedig több.

Tehát (n=1, k tetszőleges) vagy (n tetszőleges, k=1) vagy (n=2, k=3) vagy (n=3, k=2)

b) Az Euler-körhöz 0 db pt fokszámú csúcs kell. Így az 1xakárhányas gráf szóba sem jöhet. A nagyobbaknál, pedig, mint az előbb már láttuk a 2x2-es a megfelelő.

Tehát n=2, k=2.

c) Induljunk el a gráf bal felső sarkából jobb felé, és “szerpentínben” haladjunk lefelé. Így minden n-re és k-ra be tudjuk járni a gráfot. Azaz mindig lesz Hamilton-út.

Tehát n és k tetszőleges.

d) Ha n vagy k =1, akkor természetesen nincs H-kör a gráfban.

Ha a sorok száma páros, akkor csináljuk meg az fentebb leírt szerpentínt, de hagyjuk ki a bal oldali oszlopot. Legalul bal oldalra fogunk kiérni a páros számú sor miatt, így ott felmehetünk a kiindulási ponthoz. Tehát ebben az esetben van H-kör.

Ha az oszlopok száma páros, akkor csak el kell forgatni 90 fokkal, és az előbbi okoskodással találhatunk H-kört.

Ha n és k is páratlan, akkor színezzük pepitára a gráfot (úgyis sakktábláról van szó)! A fekete és fehér mezők száma különböző lesz. Ekkor azonban nyilvánvaló, hogy nem lehet bejárni a sakktáblát, hiszen egy bejárás során azonos számú fekete és fehér mezőt érintünk. Tehát ilyenkor nincs H-kör.

Így a válasz: (n vagy k páros) és (n és k is legalább 2)

8. ???

9. a) Elkészíthető: vegyünk 4 db vízszintes és 4 db függőleges L-betű alakban meghajlított 5 cm-es zsinórdarabot. Ezek pont az ábrán látható hálót adják.

b) Tekintsük a hálót egy gráfnak. Ennek 12 db páratlan fokú csúcsa van. Biztos, hogy ezekben a pontokban zsinórdarabnak kell kezdődnie vagy végződnie, hiszen csak így indulhat belőlük páratlan darab vonal. 5 db zsinórnak viszont csak 10 vége van, így biztos, hogy nem lehet kirakni belőlük a hálót. Tehát a válasz: nem.

# **BSZ 2. gyakorlat**

**FELADATOK:**

1. Egy vállalatnál hét pályázó jelentkezett hat üres munkahelyre (számozzuk ezeket 1-től 6-ig); egy ember több helyre is: Aladár az 1-es; Béla az 1, 6-os; Csaba a 2, 3, 4-es; Dani a 2, 5-ös; Erzsi a 3, 4, 5-ös; Feri az 1, 6-os; Géza a 6-os munkahelyre.

a) Döntsd el, hogy betölthető-e mind a hat munkahely (egy ember csak egy helyre kerülhet)! Ha nem, akkor hány tölthető be?

b) Változtat-e valamin, ha Feri meggondolja magát és a 2-es munkahelyet is hajlandó elfogadni?

2. Mennyi a független élek maximális száma az alábbi gráfban?

3. Egy 2n csúcsú (nem feltétlenül páros) egyszerű gráf minden csúcsának fokszáma legalább n. Bizonyítsd be, hogy a gráfban van teljes párosítás!

4. Egy iskolában a diákok különféle bizottságokat választottak (egy ember többnek is tagja lehet) és most minden bizottság a saját tagjai közül egy-egy elnököt szeretne kinevezni. Bármely bizottság bármely tagja alkalmas lenne elnöknek, de nem akarják, hogy valaki egyszerre több bizottságnak is elnöke legyen. Mikor valósítható ez meg?

5. Egy G összefüggő gráf olyan, hogy tetszőleges pontját elhagyva a maradék gráfnak létezik teljes párosítása. Bizonyítsd be, hogy G-ben nincs elvágó él! (Elvágó él olyan él, amit a gráfból kihagyva megszűnik a gráf összefüggősége.)

6. Egby kiránduláson n házaspár vesz részt. El kellene osztani közöttük 2n különböző fajta csokit úgy, hogy mindenki egyet kapjon. Tudjuk, hogy mindenki legalább n fajtát szeret a 2n csoki közül. Tudjuk azt is, hogy minden csokit szereti minden házaspárnak legalább az egyik tagja. Bizonyítsd be, hogy a csokik szétoszthatók úgy, hogy mindenki olyan kapjon, amit szeret!

7. Bizonyítsd be, hogy egy egyszerű gráfban a lefogó pontok minimális száma nem nagyobb, mint a független élek maximális számának a kétszerese!

8. Egy nxn-es mátrixban csupa nemnegatív szám szerepel és minden sorban, valamint minden oszlopban az elemek összege 1. Bizonyítsd be, hogy a mátrix determinánsának kiszámításakor keletkező (n! darab) előjeles szorzatok nem mindegyike 0.

9. Bizonyítsd be, hogy a Tutte-tétel igaz páros gráfokra! (Persze a bizonyításhoz ne használd fel, hogy a tétel tetszőleges gráfra is igaz!)

**MEGOLDÁSOK:**

1. Tekintsük a hat munkahelyből és a hét emberből, mint csúcsokból képzett páros gráfot, és minden ember azzal a munkahellyel legyen összekötve, amelyre jelentkezett.

a) Ekkor az első kérdés az, hogy van-e a munkahelyeket lefedő párosítás. A válasz a Hall-tétel miatt az, hogy nem, mivel a 2, 3, 4, 5-ös munkahelyek részhalmaza 4 elemű, a szomszédságuk viszont csak 3 elemű (C, D, E).

Öt azonban már betölthető, pl. így: 1A, 2C, 3E, 5D, 6F

b) Változtat, ugyanis így már betölthető az összes munkahely. Pl. így:1A, 2F, 3C, 4E, 5D, 6G

2. *Első megoldás*: A gráfban a 3-adfokú pontok egy lefogó ponthalmazt adnak. Így a lefogó pontok minimális száma (tau) legfeljebb ennyi, azaz tau<=6. Másrészt tudjuk, hogy a független élek maximális száma (nű) legfeljebb tau, így nű is <=6. Ha felül és alul is veszünk 3-3 ferdén fekvő élet, akkor találtunk 6 független élet. Tehát nű pontosan =6.

*Második megoldás*: A gráfban a 3-adfokú pontok egy lefogó ponthalmazt adnak. Így a lefogó pontok minimális száma (tau) legfeljebb ennyi, azaz tau<=6. Ha a gráf négy sorban elhelyezkedő csúcsait felváltva tesszük az A-B-A-B halmazba, akkor látható, hogy ez egy G(A,B) páros gráf. A páros gráfokról tudjuk, hogy bennük a független élek maximális száma (nű) egyenlő tauval, így nű=6.

3. A Dirac-tétel miatt ebben a gráfban van Hamilton-kör, és mivel a gráfban 2n csúcs van, ezért páros hosszú. Válasszuk ki ennek a H-körnek minden második élét! Ekkor pont egy teljes párosítást kaptunk.

4. Tekintsük a bizottságokból és diákokból, mint csúcsokból képzett páros gráfot, és minden diák azzal a bizottsággal legyen összekötve, amelyre jelentkezett. Így a kérdés: mikor van a bizottságokat teljes párosítás a gráfban? A választ a Hall-tétel adja: pontosan akkor, ha bárhogy kiválasztva k db bizottságot, ezek össztagsága (tagságuk uniója) legalább k diákból áll.

5. A teljes párosítás szükséges feltétele, hogy a gráfban páros sok csúcs legyen. Mivel G olyan, hogy egy pontját elhagyva “teljesen párosítható” gráfot kapunk, ezért v(G) páratlan.

Tegyük fel, hogy van G-ben elvágó él! Ez az él a páratlan csúcsú G-t egy páros és egy páratlan csúcsszámú részgráfra bontja. Hagyjuk el az elvágó élnek azt a végpontját, amelyik a páros részgráfban van. Ekkor G két darab páratlan csúcsú komponensre esik szét. Ebben azonban nem lehet teljes párosítás, hiszen egy majdnem teljes párosítás után mindkét komponensből egy-egy pont maradna szabadon, köztük azonban nem fut él, így nem párosíthatók. Ezzel viszont ellentmondásra jutottunk, hiszen G-ből akármelyik pontot elhagyva teljesen párosítható gráfot kellett volna kapnunk.

6. Tekintsük az emberekből és csokikból, mint csúcsokból képzett páros gráfot, és minden ember azzal a csokival legyen összekötve, amelyiket szereti. Ekkor a feladat: bebizonyítani, hogy biztosan van teljes párosítás a gráfban.

Ha egy vagy több ember kiválasztunk, annak legalább n csokiból áll a szomszédsága. Tehát ha n vagy annál kevesebb embert választunk ki, akkor az ő szomszédságuk legalább annyi csokiból áll, mint ahányan ők vannak. Ekkor teljesül a Hall-feltétel.

Ha n-nél több embert választunk ki, akkor viszont biztosan lesz köztük házaspár, hiszen csak n db férfi ill. n db nő van. Egy házaspár szomszédsága pedig az össze csoki, hiszen mindegyiket szereti valamelyikük. Tehát n-nél több (de persze legfeljebb 2n) ember szomszédsága 2n elemű, így a Hall-feltétel ekkor is teljesül.

Azaz a Hall-tétel értelmében van teljes párosítás a gráfban.

7. Vegyünk nű darab független élet! Ennek 2nű db végpontja lefogó ponthalmaz, mert ha nem az lenne, akkor lenne még tőlük független él, amit ez a 2nű végpont nem fog le, ez azonban ellentmond annak, hogy a lehető legtöbb független élet (azaz nű db-ot) választottunk ki. Tehát ez a 2nű pont egy lefogó ponthalmaz, azaz tau legfeljebb ennyi lehet. Azaz tau<=2nű, és ezt kellett bizonyítani.

8. Tekintsük a mátrixot egy n+n csúcsú páros gráfnak, melyben Ai és Bj pontosan akkor vannak összekötve, ha mátrix i-edik sorának j-edik eleme nem nulla. A determináns kiszámításakor keletkező előjeles szorzat akkor nem 0, ha ki tudunk választani n db nemnulla elemet “bástyaelrendezésben”, azaz van teljes párosítás a gráfban.

Tegyük fel, hogy nincs t.p., azaz van olyan i db oszlop, amelyet kiválasztva csak j<i db sornak lesz ezen oszlopokban nemnulla eleme. (|N(X)|<|X|, Hall-tétel)

Mivel minden oszlopban ill. sorban az elemek összege 1, ezért k db sorban vagy oszlopban az elemek összege k. Rendezzük át a mátrixot úgy, hogy a kiválasztott oszlopok a bal oldalon legyenek egymás mellett, az általuk megjelölt sorok (a szomszédság) pedig fönt egymás alatt. Ekkor a mátrixot négy részre oszthatjuk (függőlegesen és vízszintesen is ketté), melyekben az elemek összege az alábbi:

|  |  |
| --- | --- |
| i | j-i |
| 0 | n-j |

Így az első i oszlopban az elemek összege i, a második n-i-ben n-i, az első j sorban j, a másodikban n-j. Csak egy gond van: a jobb felső blokkban az elemek összege j-i, ami viszont negatív, hiszen j<i. Nemnegatív számok összege pedig nem lehet negatív. Tehát ellentmondásra jutottunk abból a feltételezésből, hogy nincs t.p. Azaz van.

9. ???

# **BSZ 3. gyakorlat**

**FELADATOK:**

1. Mennyi az alábbi gráfok kromatikus száma és élkromatikus száma?

a) egy kocka éleinek hálózata;

b) egy oktaéder éleinek hálózata.

2. Bizonyítsd be, hogy minden G egyszerű gráfra χ(G)<=Δ(G)+1.

3. Bizonyítsd be, hogy

a) r-reguláris páros gráfban van teljes párosítás.

b) ha G r-reguláris páros gráf, akkor χe(G)=r.

c) ha G páros gráf, akkor χe(G)=Δ(G).

4. Egy szabályos hétszögnek húzzuk be az összes leghosszabb átlóját. Mennyi az így kapott (4-reguláris) gráf kromatikus száma?

5. Bizonyítsd be, hogy minden n pontú G gráfra, ahol α(G) jelöli a gráfban a független pontok maximális számát, fennáll:

a) χ(G)+α(G)<=n+1

b) χ(G)\*α(G)>=n

6. Egy gráf csúcsai legyenek az 1 és 106 közé eső természetes számok, két csúcsot pedig akkor kössünk össze, ha a különbségük legfeljebb 7. Mennyi a gráf kromatikus száma?

7. Jelölje Kn az n-szögpontú teljes gráfot.

a) χe(K2k+1)=?

b) χe(K2k)=?

8. Adott a síkban néhány egyenes úgy, hogy semelyik három nem megy át egy ponton. Legyen G az ezek által meghatározott gráf: G csúcsai az egyenes metszéspontjai, két csúcs pedig akkor szomszédos, ha az egyik egyenesen szomszédos metszétpontok voltak. Mutassuk meg, hogy χ(G)<=3.

9. Bizonyítsd be, hogy egy e élű G gráfra e>=.

**MEGOLDÁSOK:**

1. a) Nyilvánvaló, hogy két szín mindenképp szükséges a kocka csúcsainak kiszínezéséhez. Másrészt két szín elég is: egyszerűen kiszínezzük az egyik csúcsot mondjuk pirossal, majd a közvetlen szomszédait kékkel, azok szomszédait pirossal... Tehát χ=2.

Mivel van egy csúcsból induló három él, azokat 3 különböző színnel kell színezni, tehát χe>=3. Másrészt három szín elegendő is (ld. ábra), így χe=3.

1. b) Mivel az oktaéder élhálózatában van háromszög, ezért χ>=3. Ennyi azonban elég is: a szemközti csúcsokat színezzük azonosra, összesen 3 ilyen pár van. Tehát χ=3.

Mivel van egy csúcsból induló 4 él, ezért χe>=4. Ennyivel pedig ki is lehet színezni (ld. ábra), tehát χe=4.

2. A bizonyítandó állítás, χ(G)<=Δ(G)+1 azt jelenti, hogy G-t ki lehet színezni Δ(G)+1 db színnel.

Vegyük tetszőleges sorban a pontokat és mindegyiket színezzük úgy, ahogy a lehetőségeink engedik. Legrosszabb esetben az éppen aktuális pontnak Δ szomszédja van, ez mind ki van már színezve és mind különböző színnel. Ekkor azonban még mindig marad egy nem használt színünk (hiszen Δ+1 van), így azzal ki tudjuk színezni ezt a pontot. Ennél általában jobb a helyzet, hiszen nem minden pontnak van biztosan Δ szomszédja, de legalábbis nincs mind kiszínezve, ill. nem mind különbözően. Mivel azonban a legrosszabb esetben is találunk olyan színt, amivel nem rontjuk el az eddigi színezést, ezért ezzel a „mohó algoritmussal” is ki lehet színezni G-t Δ+1 színnel.

3. a) Válasszunk ki a csúcsok egyik feléből i db-ot. Ebből i\*r él indul ki, hiszen G r-reguláris. Mivel ezek az élek mind az i db csúcs szomszédságába futnak, onnan viszont másfelé is indulhat él, ezért i\*r<=j\*r, ha j a szomszédság mérete. r-rel egyszerűsítve kapjuk, hogy i<=j, azaz bárhogy választunk ki pontokat a gráf egyik feléből ezek szomszédsága mindig nagyobb lesz. Így a Hall-tételből következik, hogy mindenképp létezik a csúcsok egyik csoportját lefedő párosítás. Azaz ez a csoport legfeljebb akkora, mint a másik. A fenti okoskodást a másik csoportra is végigjátszva pedig az derül ki, hogy van azt lefedő párosítás. Tehát ez a másik csoport is legfeljebb akkora, mint az egyik volt. Ez csak úgy lehetséges, ha a két csoport mérete megegyezik, ekkor azonban van teljes párosítás is G-ben.

b) Az előbb láttuk, hogy G-ben van teljes párosítás, mivel páros és reguláris. Színezzük ki ennek a teljes párosításnak az éleit egy színnel. Ez jó színezés eddig, hiszen a t.p. élei függetlenek. Most hagyjuk el ezeket az éleket a gráfból. Mivel egy t.p.-ben levő éleket hagytuk el, ezért minden pont foka pontosan 1-gyel csökken, azaz egy (r-1)-reguláris gráfunk marad. Az élek elhagyása pedig természetesen azon nem változtat, hogy páros a gráf. Tehát most van egy (r-1)-reguláris páros gráfunk. És ezt kell r-1 színnel kiszínezni.

A folyamat így folytatható tovább, míg végül r szín elhasználása után egy 0-reguláris gráfunk marad, azaz elfogynak az élek.

A következmény: r színnel biztosan kiszínezhetők G élei jól, azaz χe<=r.

Hasonlóan (?) belátható, hogy r szín elegendő is, azaz χe=r.

c) G-t egészítsük ki a következő módon egy Δ(G)-reguláris páros H gráffá a következő módon:

Ha valamelyik oldalon kevesebb csúcs van, mint a másikon akkor vegyünk fel még csúcsokat. Mivel egy párosról van szó, ezért minden él mindkét oldalon egy csúcsot érint. Ez G-re és H-ra is igaz, tehát mindkét oldalon ugyanakkora „igény” van új élekre. Keressünk egy tetszőleges Δ(G)-nél kisebb fokú pontot az egyik oldalon, biztos, hogy lesz egy ilyen a másikon is, kössük össze őket. Ezzel a módszerrel a gráf párosságát nem rontjuk el, és véges lépésben a Δ(G)-reguláris H-hoz jutunk el.

Mivel ez részeként tartalmazza G-t, ezért χe(G)<=χe<(H). Ez utóbbi azonban az előző feladatban látottak miatt Δ(G)-vel egyenlő. Tehát G élei Δ(G)-vel biztosan kiszínezhetők.

Ennyi színre azonban szükség is van, hiszen a Δ(G)-fokú csúcsban (ami egy mindenképp van) Δ(G) él fut össze, azoknak mind különböző szín kell.

Tehát χe(G)=Δ(G).

4. Mivel minden csúcshoz csak 2 vele nem szomszédos csúcsot lehet találni, ezek azonban egymással már szomszédosak, ezért egy színt maximum 2-szer lehet felhasználni a színezésben. 7 csúcs esetén ez pedig azt jelenti, hogy legalább 4 színre szükség van. Ennyivel pedig könnyen kiszínezhetjük a gráfot, így χ=4.

Általában igaz gráfokra a következő:

Csoportosítsuk az egyforma színű éleket (egy minimális színnel színezésben) egymás mellé. Minden ilyen csoport legfeljebb υ élet tartalmaz, hiszen ennyi a független élek maximális száma, egy csoportban (színosztályban) pedig független élek vannak (ezért lehetnek egyforma színűek). Összesen χe db ilyen színosztály van. Tehát, ha összeadjuk ezeket a felülbecsléseket, akkor az élek számára kapjuk a következő összefüggést: e<=χe\*υ.

Ha vesszük a legnagyobb független élhalmazt (amely υ elemű), akkor ennek a 2\*υ végpontja mind különböző pont, tehát 2\*υ<=n.

A két becslést összevonva: e<=χe\*υ<=χe\*n/2 (páratlan csúcs esetén n/2 alsó egészrészét kell venni).

A mi esetünkben e=7\*4/2=14 és υ=3. χe =4 esetén 14<=3\*4=12 jön ki, azaz 4 színnel csak 12 élet tudunk kiszínezni. Azaz legalább öt szín kell. Ha ennyivel megpróbáljuk, az sikeres lesz, tehát χe=5.

5. a) Vegyünk α független pontot, ezeket kiszínezhetjük 1 színnel. A maradék n-α pontot pedig mind különbözővel színezzük, így biztosan jó színezést kaptunk összesen n-α+1 színnel. Azaz χ<=n-α+1, amit ha átrendezünk, a bizonyítandót kapjuk.

b) A 4-es feladatban használt okoskodást játsszuk el most csúcsok színezésével, χ db legfeljebb α-méretű színosztállyal! Az eredmény e<=χe\*υ helyett: n<=χ\*α.

6. Vegyük i-t, (i+1)-et... (i+7)-et! Ez 8 db olyan csúcs, amely közül mindegyik össze van kötve mindegyikkel, tehát legalább 8 szín kell a kiszínezéshez. (Általánosan is igaz, hogy χ>=ω, ahol ω a maximális klikkméret).

Feleltessünk meg az 0,2...7 számoknak 8 különböző színt, és színezzük ki i-t azzal, amelyikkel kongruens, modulo 8. Mivel i-7,...i-1,i+1,...i+7 egyike sem kongruens i-vel modulo 8, ezért ezek egyikével sem lesz azonos színű. És pont ezek a szomszédai.

Tehát ez a színezés jó, azaz χ=8.

7. A józan eszünkből tudjuk, hogy Δ<=χe. A Vizing-tételből pedig azt, hogy χe<=Δ+1. Tehát egy gráf éleit vagy Δ vagy Δ+1 színnel színezhetjük jól és optimálisan.

a) Ebben az esetben Δ=2k, azaz 2k<=χe<=2k+1. Az élek száma: e=(2k+1)(2k)/2=(2k+1)k. A független élek maximális száma pedig: υ=(2k+1)\*/2 alsó egészrésze, azaz υ=k. e<=χe\*υ-be behelyettesítve, és abból az élkromatikus számot kifejezve kapjuk, hogy: 2k+1<=χe. Tehát χe=2k+1.

A b) részt könnyítendő, hozzátehetjük még, hogy mind a 2k+1 színt nemcsak legfeljebb, hanem pontosan k-szor kell felhasználni, különben nem jön össze az e=(2k+1)k=χe\*υ él színezése.

b) Ez az okoskodás most nem túl hasznos, hiszen a független élek számából 2k-1 jön ki alsó határnak az élkromatikus számra, de Δ=2k-1 is ugyanezt adja. Bizonyítsuk be, hogy ennyi szín elég lesz:

Színezzük ki előszőr a K2k részét képező K2k-1 éleit: ez 2k-1 színnel sikerül az a) pont miatt. A 2k-adik csúcsba futó színezetlen éleket nyilvánvalóan ki tudjuk úgy színezni, hogy az ne ütközzön a K2k-1 részgráf színezésével. Kérdés azonban, hogy nem fogunk-e azonosan színezni több élet is, ami ebbe a 2k-adik csúcsba fut. Tegyük fel, hogy van két ilyen él!

Egy színt legfeljebb υ-ször használhatunk, ami K2k esetén k. Arra a színre is igaz ez, amivel ezt a két élet színeztük ki. Ez a szín tehát csak (k-2)-szer fordulhat elő a K2k-1 részgráfban. Az a) pont legvégén azonban láttuk, hogy minden szín (k-1)-szer szerepel a K2k-1 részben (azért nem k-szor, mert nem a K2k+1-ről, hanem K2k-1-ről van most szó). Így ellentmondásra jutottunk, tehát nincs két egyszínű él, amely a 2k-adik csúcsba fut, tehát ez a 2k-1 színnel készített színezés jó K2k-ra is.

Összefoglalva:

χe(K2k+1)=2k+1

χe(K2k)=2k-1

8. Színezzük ki sorban egy gráf csúcsait úgy, hogy lehetőség szerint minél kevesebb színt használjunk: azaz csak akkor vegyünk elő új színt, ha a soron következő pontunk már minden eddig színnel szomszédos. Tehát különböztessük meg a pont „előtti” és pont „utáni” szomszédságot. Így a maximális színszám amire szükségünk van a legnagyobb pontelőtti szomszédság mérete+1.

Konkrétan most vegyünk fel egy olyan f egyenest, amelyik semelyik meglévővel sem párhuzamos (ilyan biztosan van, hiszen végtelen irány van, de a feladatban csak véges egyenes). Ezzel az egyenessel „szkenneljük” be a gráfot, azaz csúcstassuk végig a síkon, és mindig azt a pontot színezzük ki, amelyiken épp áthalad. Mivel f semelyik korábbi egyenessel nem párhuzamos, ezért egyszerre mindig csak egy ponton fog áthaladni. Másrészt ezen a ponton csak két egyenes halad át f-en kívül, és ezen a két egyenesen a két oldalon helyezkedik el a maximum 4 szomszédja. Ebből legfeljebb 2 lehet f egyik ill. másik oldalán. Tehát a legnagyobb „pontelőtti” szomszédság mérete 2. A fenti okoskodásból pedig ekkor: χ(G)<=3.

9. Rakjuk a G gráf pontjait külön színosztályokba egy optimális színezéssel. Összesen χ(G) színosztály van, és mindegyik egy független ponthalmaz. Ha valamelyik két színosztály közt nem futna él, akkor a kettőt összevonhatnánk (azaz egy színnel színezhetnénk), ez azonban ellentmond azzal, hogy egy optimális színezést választottunk. Tehát bármely két színosztály között fut él, vagy másképp: mindegyik mindegyikkel össze van kötve. Ez minimálisan db élet igényel, ezzel beláttuk, hogy e>=.

# **BSZ 4. gyakorlat**

**FELADATOK:**

1. a) Rajzolj olyan G gráfot, melyre ω(G)=3 és χ(G)=4.

b) Van-e olyan G gráf, melyre ω(G)=100 és χ(G)=200?

[2. Szinte megegyezik a 3. gyak 7. feladatával]

3. Bizonyítsd be, hogy minden n pontú G gráfra χ(G)\*χ()>=n.

[4. Megegyezik a 3. gyak. 8. feladatával]

5. Jelölje  az n hosszúságú kör komplementerét. Mennyi χ() és ω()?

[6. Megegyezik a 3. gyak. 9. feladatával]

7. Van-e olyan síkbeli térkép, amelyen minden ország téglalap alakú és amelynek a kiszínezéséhez legalább 4 szín kell? (a térkép országait színezzük)

8. A G1=(V,E1) és G2=(V,E2) gráfok uniójának a G1G2=(V,E1E2) gráfot nevezzük (magyarán a csúcshalmaz azonos, és az új gráfban mindkét eredeti gráf éleit behúzzuk).

Bizonyítsd be, hogy χ(G1G2)<=χ(G1)\*χ(G2).

**MEGOLDÁSOK:**

1. a)

Ebben van háromszög, de K4 már nincs, így ω=3.

A külső kör színezéséhez 3 szín kell, plusz még a középső ponthoz egy, azaz χ=4.

b) Az előadáson láttuk, hogy Myczichky (már ha így írják) bármekkora χ-jű gráfot tud konstruálni ω=2 betartása mellett. Vegyük ezek közül azt, amelyikre χ=200. És rajzoljunk mellé egy K100-at. Ezzel kész a feladat, hiszen az így kapott (igaz nem összefüggő) gráfnak egyrész a kromatikus száma 200 (hiszen ezt a K100 nem növelte meg), másrészt a legnagyobb klikkje 100 csúcsú, azaz ω=100. Ha mindenképp összefüggő gráfot akarunk, akkor a Myczichky-féle gráf egy tetszőleges csúcsát kössük össze a K100 egy tetszőleges csúcsával.

A lényeg, hogy a válasz: Van ilyen G gráf.

3. Ha veszünk egy gráfban egy független ponthalmazt, akkor ez a komplementerben egy klikk, és fordítva. Ez igaz a legnagyobbakra is, azaz: ω()=α(G).

Másrészt tudjuk, hogy χ()>=ω(). Ha ehhez még hozzávesszük a 3. gyak. 5/b. feladatának eredményét, akkor megkapjuk, hogy:

χ(G)\*χ()>=χ(G)\*ω()=χ(G)\*α(G)>=n, és ez volt a bizonyítandó.

5. ω()=α(Cn)

Páros kör esetében minden második csúcs egy független ponthalmazt alkot. Ha ennél több csúcsot veszünk, akkor azok közt már mindenképp kell szomszédosnak lenni, így azok nem függetlenek. Tehát ekkor α=n/2. Páratlan kör esetében a helyzet ugyanez, méghozzá „szigorúan”, azaz α=n/2 alsó egészrésze.

Így a válasz: ω()=.

Színezzük ki az 1. és a 2. csúcsot az első színnel, a 3. és 4.-et a második színnel... Így  színnel ki tudtuk színezni -t. Ennél kevesebb szín viszont nem elég, hiszen mindegyik színt maximum kétszer használhatunk, mivel egy csúcsnak csak 2 nemszomszédja van, és azok már szomszédosak. (ld. még 3. gyak. 4. feladatát)

Így a válasz: χ()=.

7. Van:

Ennek a térképnek a színezése megegyezik az 1/a. feladat megoldásában szereplő gráf színezésével. Így ezt is csak 4 színnel lehet kiszínezni.

8. Színezzük ki a G1 és a G2 gráfot, de ne színekkel, hanem 1-től χ-ig számokkal. Ezután a legfeljebb χ(G1)\*χ(G2) számpárhoz rendeljünk különböző színeket, és ezekkel színezzük ki a G1G2 gráfot. Ez egy jó színezés, hiszen két csúcs akkor szomszédos, ha G1-ben vagy G2-ben az, ekkor azonban a két csúcshoz tartozó számpár nem egyezik meg (legalább az egyik számban különbözik), így különböző színűre van színezve. Tehát a két gráf uniója χ(G1)\*χ(G2) db színnel mindenképp kiszínezhető, azaz: χ(G1G2)<=χ(G1)\*χ(G2).

# **BSZ 5. gyakorlat**

**FELADATOK:**

1. Döntsük el, van-e Hamilton-köre az alábbi gráfnak! (Vizsga, 1999. június 2.)

2. Legyen r>=2 és tekintsünk egy r-reguláris páros gráfot. Hagyjunk el ennek az egyik tetszőlegesen kiválasztott csúcsából induló r él közül tetszőlegesen kiválasztott (r-1)-et. Az így megmaradó gráf legyen G. Bizonyítsuk be, hogy G-ben van teljes párosítás! (Vizsga, 1999. június 2.)

3. Legyen G egy 10-reguláris, egyszerű gráf, melynek 1999 csúcsa van. Mennyi a χe(G) élkromatikus szám értéke? (Vizsga, 1999. június 9.)

4. Legyen G olyan gráf, melyre χ(G)=k. Bizonyítsuk be, hogy G élei irányíthatók úgy, hogy a leghosszabb irányított út legföljebb k pontot tartalmazzon. (ZH, 1999. április 8.)

[irányított út=olyan út, ahol csak a nyilak irányába haladunk]

5. Mutassuk meg, hogy minden n>=5-re igaz az alábbi két állítás:

i) Létezik olyan n csúcsú G gráf, hogy G is és a komplementere is tartalmaz Hamilton kört.

ii) Létezik olyan n csúcsú G gráf, hogy G sem és a komplementere sem tartalmaz Hamilton kört.

(pótZH, 1999. május 19.)

6. A G=(A,B,E) páros gráfban az A független halmazba eső X={a1,...ak} részhalmaz összes csúcsa lefedhető egyetlen M párosítással. Hasonlóképp, létezik olyan M’ párosítás, amely az Y={b1,...bm}B részhalmazba eső összes csúcsot fedi. Bizonyítsuk be, hogy ekkor olyan M’’ párosítás is létezik, amely az a1,...ak, b1,...bm pontok mindegyikét lefedi. (ZH, 1999. április 8.)

7. Legyen G olyan gráf, melyre χ(G)>ω(G). Mutassuk meg, hogy G-hez hozzáadhatók (az eredeti csúcsok között futó) újabb élek úgy, hogy a keletkező G’ gráfra ω(G’)=χ(G’)=χ(G) teljesüljön. Igaz-e, hogy ez mindig elérhető legfeljebb 100 él hozzáadásával? (pótZH, 1999. május 19.)

8. Egy n csúcsú teljes gráf valamennyi élét színezzük ki pirosra vagy kékre. Mutassuk meg, hogy az így kapott színezett gráfban biztosan lesz olyan Hamilton-kör, aminek vagy minden éle azonos színű, vagy előáll egy csak piros és egy csak kék éleket tartalmazó egyszerű út uniójaként. (Vizsga, 1999. június 9.)

9. Mutassuk meg, hogy a τ(G)/ν(G) hányados lehetséges legnagyobb értéke (az összes véges, egyszerű G gráfot tekintve) 2-vel egyenlő. (Vizsga, 1999. június 9.)

**MEGOLDÁSOK:**

1. Van:

2. A tetszőlegesen kiválasztott csúcsot (A) párosítsuk az egyetlen csúccsal, amivel még össze van kötve (B). Hagyjuk el a gráfból A-t és B-t. Ekkor a maradék G gráfban A-val „szemben” van (r-1) db (r-1)-edfokú csúcs és valahány r-edfokú. A B-vel szemközti oldalon hasonló a helyzet. Válasszunk ki az A-val szemközi csoportból i db-ot.

Ha i<=r-1, akkor jó, mert az i pont szomszédsága legalább (r-1)-méretű, így a Hall-feltétel teljesül.

Ha i>r-1, akkor viszont ezek közt biztos lesz r-edfokú is, hiszen csak (r-1) db (r-1)-edfokú van. Tehát ebből az i csúcsból kiinduló élek száma legalább (r-1)\*(r-1)+(i-r+1)\*r=ir-r+1. A szomszédságukból (amely legyen j méretű) legfeljebb jr db él indulhat. Mivel az i csúcs minden éle a szomszédságba fut, fordítva viszont nem, ezért:

ir-r+1<=|i csúcsből induló élek|<=|a szomszédságból induló élek|<=jr

r-rel osztva kapjuk, hogy i-1+1/r<=j, ami azt jelenti (mivel i,j egészek), hogy i<=j. Tehát a Hall-feltétel ekkor is teljesül.

Azaz van ezt a csoportot lefedő párosítás.

Ugyanezt a B-vel szemközti csoportra is végiggondolva, kiderül, hogy van teljes párosítás is G-ben.

3. n=1999 csúcs, d=10-edfokú mind, e=n\*d/2=9995 él

Tudjuk korábbról, hogy Δ<=χe<=Δ+1=11 és azt is, hogy χe\*ν>=e.

Mivel ν legfeljebb =999, ezért χe>=9995/999>10, azaz χe>=11.

Ami viszont azt jelenti, hogy χe=11.

4. Számozzuk meg az egyes színeket 1-től k-ig, és irányítsuk úgy az éleket, hogy a „kisebb” színű csúcsból a nagyobb felé mutassanak! Ekkor egy az i. színosztályból a j.-be vezető út hossza legfeljebb j-i+1. Tehát a leghosszabb út (amelyik az 1.-ből a k.-ba vezet) legfeljebb k-1+1=k hosszú.

5. i) G:=Cn, azaz az n-hosszú kör:

G tartalmaz H-kört, hiszen egyszerűen csak végig kell menni a kör mentén

G komplementerére pedig alkalmazzuk a Dirac-tételt: d=n-3>=n/2 teljesül minden n>=6 csúcsú gráfra, tehát ezekben van H-kör. n=5 esetén pedig G komplementere C5, aminek szintén van H-köre.

ii) G:=n-ágú csillag.

G nem tartalmaz H-kört, hiszen a csillag közepét elvéve a gráf sok komponensre esik szét.

G komplementerében a középső csúcs izolálttá válik, így ebben biztos nincs H-kör.

6. Tekintsük M és M’ unióját, és nézzük meg ennek az M-ből származó éleit:

a) Ha egy él Y-on kívülre fut be, akkor biztosan nem ütközik M’-beli élekkel

b) Ha egy él Y-ba érkezik (konkrétan mondjuk Yj-be), akkor két eset lehet:

i) az Yj-hez tartozó M’-beli éllel egybeesik, ekkor nincs ütközés

ii) az Yj-hez tartozó M’-beli él nem X-be fut, ekkor egyszerűen töröljük ki M és M’ uniójából, így az ütközés megszűnik, Yj-t pedig lefedi a párosítás (csak máshogy, mint eddig)

Ugyanezt az M’-ből származó élekkel eljátszva egy olyan élhalmazt kapunk, ami lefedi mind X-et, mind Y-t és független. Ez pedig teljesen megfelel az M’’ párosításnak.

7. Vegyünk χ(G) különböző színű csúcsot G-ben, és kössük össze mindet minddel! Az így keletkező G’ gráfban a régi színezés megfelel, hiszen csak különböző színű csúcsok közt keletkezett él, tehát χ(G’)= χ(G). Másrészt ez a χ(G) db csúcs egy teljes részgráfot alkot G’-ben. Ha így egy ennél nagyobb klikk alakult ki G-ben, akkor még elhagyhatunk ebből a behúzott élhalmazból néhányat, de a végeredmény mindenképp az, hogy ω(G’)=χ(G) lesz.

Ha Kn-ből elhagyunk egy élet, akkor a maradék gráf ω-ja n-1. Ez megfordítva azt jelenti, hogy egy él behúzásával legfeljebb 1-gyel növelhető ω. Tehát, ha mutatunk egy olyan gráfot, amelyben az ω és χ közti különbség több, mint 100, akkor biztos, hogy nem mindig érhető el 100 él hozzáadásával ez a ω-növelés. Ilyen gráf pedig a Mycielski-konstrukcióval „könnyen” létrehozható: pl. ω=2, χ=1000.

8. ???

9. Vegyünk ν db független élet! Az összes többi él közvetlenül ezekhez csatlakozik, hiszen ők már nem függetlenek ezektől (ν=a független élek *maximális* száma). Ez azt jelenti, hogy ennek a ν élnek a 2ν végpontja egy lefogó ponthalmaz. Tehát τ, azaz a lefogó pontok minimális száma biztosan nem nagyobb 2ν-nél: τ<=2ν. Átalakítva: τ/ν<=2. Ez pedig pontosan a bizonyítandó állítás.