Analízis

A differenciálszámítás középértéktételei:

1) Rolle-tétel:
Ha f folytonos a korlátos és zárt [a;b] intervallumon, f diffható [a;b]-n és f(a) = f(b), akkor van egy a < c < b belső pont, ahol f'(c) = 0 (vízszintes)
2) Lagrange-tétel:
Ha f folytonos a korlátos és zárt [a;b], f diffható (a;b)-n, akkor létezik olyan a < c < b, hogy f'(c) = (f(b) - f(a))/(b – a)
3) Cauchy-tétel:
Legyen f,g folytonos a korlátos és zárt [a;b] szakaszon, és diffhatók (a;b)-n. Akkor létezik a <c< b közbülső hely, hogy f'(c)/g'(c) = (f(b) – f(a))/(g(b) – g(a))

Tetel: Legyen f folytonos a korlátos és zárt [a,b] szakaszon, diffható (a,b)-n. Akkor f konstans [a;b]-n. akkor és csak akkor, ha f'=0 (a;b)-n.

Függvény mnotonitásvisgálata differenviálással:

Ha f(x) monoton nő [a;b]-n, és difható egy (a;b)-beli c helyen, akkor f'(c) ≥ 0

Hasonlóan, ha f(x) monoton csökken [a;b]-n, és difható egy (a;b)-beli c helyen, akkor f'(c) ≤ 0.

Tétel: Monotoitás vizsgálata deriválttal:

Legyen I egy véges, vagy végtelen intervallum, végpontjaival, vagy anélkül. Legyen f(x) folytonos I-n, diifható az I belső pontjaiban. Akkor:

a) f(x) monoton nő I-n akkor és csak akkor, ha f'(x) ≥ 0 I minden belső pontjában
(csökken) (≤)

b) f(x) szig. mon. nő I-n akkor és csak akkor, ha f'(x) ≥ 0 I belső pontjaiban, és nincs
(csökken) (≤)
I-nek olyan részintervalluma, ahol f' ≡ 0 (konstans)

c) Ha f'(x) > 0 I minden belső pontjában, akkor f szig. mon. nő I-n
(<) (csökken)

köv: a) f = konst ↔ f' = 0 belül
b) f mon. nő ↔ f' ≥ 0 belül
c) f szig mon nő ← f' > 0 belül (visszafelé nem igaz)

asin (x) „arcus sinus x” [arc sin (x), $\sin^{-1}(x)$]

sin (x): [-π/2; π/2] → [-1;1]

asin (x) [-1;1] → [-π/2; π/2]

sin (x) → szig mon nő, mert sin' = cos > 0 (-π/2; π/2) intervallumon, zárt intervallumon még szigorúbb a monotonitás

d/dx asin (x) = $1/\sqrt{(1-x^2)}$ |x| < 1

acos (x) „arcus cosinus x” [arc cos (x), $\cos^{-1}$ (x)]

cos (x): [0; π] → [-1; 1]

acos (x): [-1; 1] → [0; π]

cos (x) → szig mon csökken, mert cos' = - sin < 0 (0; π)-n

d/dx acos (x) = $-1/\sqrt{(1-x^2)}$ |x| < 1 köv: (asin + asin') = 0 (-1;1)-en, mert asin + acos = konstans [-1;1]-en

asin (x) + acos (x) = $\pi/2$ [-1;1]-en

megj: $\sin \alpha = \cos(\pi/2-\alpha)$ ezért $\pi/2$ – asin (x) = acos (x)

atan (x) „arcus tangens x” [arc tg (x); $\tan^{-1}(x)$]

tan (x): $(-\pi/2;\ \pi/2) \rightarrow R$

atan (x): $R \rightarrow (-\pi/2;\ \pi/2)$

tan (x) → szig mon nő, mert $\tan' = 1/\cos^2 > 0$

d/dx atan (x) = $1/(1+x^2)$ $x \in R$

acot (x) „arcus cotangens x” [arc ctg (x); $\cot^{-1}(x)$]

cot (x): $(0; \pi) \rightarrow R$

acot (x): $R \rightarrow (0; \pi)$

cot (x) → szig mon csökken, mert $\cot' = -1/\sin^2 < 0$

d/dx acot (x) = $-1/(1+x^2)$ $x \in R$

megj: $\sin \alpha = \cos(\pi/2-\alpha)$

$\rightarrow \tan \alpha = \cot(\pi/2-\alpha)$

$\cos \alpha = \sin(\pi/2-\alpha)$

Áll: $\lim_{-\infty} \text{acot} = \pi$ $\lim_{+\infty} \text{acot} = 0$

$\lim_{-\infty} \text{atan} = -\pi/2$ $\lim_{+\infty} \text{atan} = \pi/2$

Hiperbólikus függvények

sinh (x) = $(e^x - e^{-x})/2$ „sinus hiperbolikus” [sh (x)] páratlan

cosh (x) = $(e^x + e^{-x})/2$ „cosinus hiperbolikus” [ch (x)] páros

tanh (x) = sinh (x)/cosh (x) = $(e^x - e^{-x})/(e^x + e^{-x})$

„tangens hiperbolikus” [th (x)] páratlan

coth (x) = cosh (x)/sinh (x) = $(e^x + e^{-x})/(e^x - e^{-x})$ $x \neq 0$

„cotangens hiperbolikus” [cth (x)] páratlan

d/dx cosh (x) = sinh (x)

d/dx sinh (x) = cosh (x)

Köv: a) cosh (x) szig mon nő $[0; \infty)$-en , mert cosh' = sinh > 0, ha x > 0

(csökken $(-\infty; 0]$-n) < 0, ha x < 0

b) cosh x ≥ 1, mert x = 0-ban minimuma van

c) sinh x szig mon nő R-en, mert sinh' = cosh ≥ 1 > 0

Megj: $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

Addíciós képletek hiperbolikus függvényekre:

$\sinh(x+y) = \sinh(x) \cdot \cosh(y) + \cosh(x) \cdot \sinh(y)$

Spec: $\sinh(2x) = 2\sinh(x) \cdot \cosh(x)$

$\cosh(x+y) = \cosh(x) \cdot \cosh(y) + \sinh(x) \cdot \sinh(y)$

Spec: $\cosh(2x) = \cosh^2(x) + \sinh^2(x)$

$\frac{d}{dx} \tanh(x) = 1/\cosh^2(x)$

$\frac{d}{dx} \coth(x) = -1/\sinh^2(x) \qquad x \neq 0$

Áll: $\lim_{+\infty} \tanh = \lim_{+\infty} \coth = 1$

$\lim_{-\infty} \tanh = \lim_{-\infty} \coth = -1$

$\lim_{0+} \coth = +\infty \qquad \lim_{0-} \coth = -\infty$

A hiperbolikus függvények inverzei:

asinh (x) „area sinus hiperbolikus x” [arsh (x)]

$\sinh' = \cosh \geq 1 \rightarrow$ sinh szig mon nő

$\frac{d}{dx} \operatorname{asinh}(x) = 1/\sqrt{1+x^2} \qquad x \in R$

Áll: $\operatorname{asinh}(x) = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$

acosh (x) „area cosinus hiperbolikus x”[arch (x)]

$\cosh' = \sinh > 0$, ha $x > 0$, ezért cosh szig mon nő, ha $x \geq 0$

$\frac{d}{dx} \operatorname{acosh}(x) = 1/\sqrt{1-x^2} \qquad x > 1$

Áll: $\operatorname{acosh}(x) = \ln(x+\sqrt{x^2-1}) \qquad x \geq 1$

atanh (x) „area tangens hiperbolikus x” [arth (x)]

$\tanh' = 1/\cosh^2 > 0 \rightarrow$ tanh deriválható

atanh: $(-1; 1) \rightarrow R$

$\frac{d}{dx} \operatorname{atanh}(x) = 1/(1-x^2) \qquad |x| < 1$

acoth (x) „area cotangens hiperbolikus x” [arcth (x)]

$\frac{d}{dx} \operatorname{acoth}(x) = 1/(1-x^2) \qquad |x| > 1$

Áll: $\operatorname{atanh}(x) = \frac{1}{2} \ln((1+x)/(1-x)) \qquad |x| < 1$

$\operatorname{acoth}(x) = \frac{1}{2} \ln((1+x)/(1-x)) \qquad |x| > 1$

Def: Az f [a;b] konvex, ha a grafikonjának bármely szelője a grafikon fölött halad

Def: Az f (x) konkáv, ha minden szelője a grafikon alatt halad

Tétel: Konvexitás tesztje az első deriválttal
Legyen f folytonos a korlátos és zárt [a;b], diffható (a;b)-n. Akkor ekvivalens:
a) f konvex [a;b]-n
b) f' monoton nő (a;b)-n
(csökken)
c) grafikonjának bármely érintőegyenese a grafikon fölött halad
(alatt)

Tétel: Konvexitás tesztje a második deriválttal: 0
Legyen f ∈ ([a;b] -n, kétszer diffható (a;b)-n. Akkor f konvex [a;b]-n akkor és csak akkor, ha
(konkáv)
$f'' \geq 0$
$(f'' \leq 0)$

Eljárás 0/0; ∞/∞; 0·∞; 1^∞ típusú határértékek kiszámítására
Tétel: l' Hopital szabály
Legyen
a) $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$

b) $\lim_{x\to a} |g(x)| = +\infty$

Tegyük fel, hogy létezik lim f'(x)/g'(x).
Akkor létezik $\lim_{x\to a} f(x)/g(x)$ is, és $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = \lim_{x\to a} f'(x)/g'(x)$ ugyanez érvényes a féloldali határértékekre, +/- ∞-ben vett határértékekre és akkor is igaz, ha lim f'/g' = +/- ∞

Def: f(x)-nek $x = x_0$-ban lokális minimum helye van, ha van olyan K környezete x_0-nak, ahol f értelmezett és $f(x) \geq f(x_0)$ minden $x \in K$-ra.
Lokális maximum hely → $f(x) \leq f(x_0)$

Def: f(x)-nek x_0-ban (abszolút) minimum helye van, ha $f(x) \geq f(x_0)$ minden $x \in D(f)$-re
Abszolút max $f(x) \leq f(x_0)$

<u>Szélsőértékhelyek keresése deriválással</u>:

Def: Az f (x) függvény előjelet vált x_0-ban, ha létezik olyan r > 0, hogy $(x_0-r;x_0)$-ban $f \leq 0$, $(x_0;x_0+r)$–en $f \geq 0$ (f - → +), vagy
$(x_0-r;x_0)$ – ban $f \geq 0$, $(x_0;x_0+r)$–en $f \leq 0$ (f + → -)

Áll: ha $f(x_0) = 0$ és $f'(x_0) > 0$, akkor f - → + x_0-ban
ha $f(x_0) = 0$ és $f'(x_0) < 0$, akkor f + → - x_0-ban
Tétel: Lokális szélsőérték szükséges feltétele:
Ha f (x)-nek x_0-ban lokális szélsőérték helye van és f diffható x_0-ban, akkor $f'(x_0) = 0$

Tétel: Lokális szélsőértékhely elégséges feltétele:
Ha f (x) diffható x_0 egy környezetében, akkor
a) f' - → + x_0-ban → f-nek lokális minimuma van x_0-ban

b) f' + → - x_0-ban → f-nek lokális maximuma van x_0-ban

Tétel: Lokális szélsőérték elégséges feltétele a második deriválttal:

a) f' $(x_0) = 0$; f'' > 0 → f-nek x_0-ban lokális minimum helye van

b) f' $(x_0) = 0$; f'' < 0 → f-nek x_0-ban lokális maximum helye van

Lokális szélsőérték keresés:

f gyökeiben f'' előjele: - f'' > 0 → lokális min

- f'' < 0 → lokális max

- f'' = 0 → ? f' előjelét ellenőrizzük

Módszer f(x) abszolút szélsőérték helyeinek megkeresésére:

Legyen f ∈ ([a;b] → létezik minimum és maximum hely is.

A szélsőérték lehet: - végpontban

- belső pontban, ott f' = 0 kell legyen

→ szélsőérték jelöltek: f' gyökei és az intervallum végpontjai

a legnagyobb függvényértéknél lesz max hely, a legkisebbnél pedig min hely

Tétel: az infelexiós pont szükséges és elégséges feltétele:

x_0 inflexiós pont akkor és csak akkor ha f'' előjelet vált x_0-ban

Def: Az y = ax + b egyenes aszimptotája f(x)-nek +∞-ben (-∞), ha $\lim_{x\to+\infty\,(-\infty)} (f(x) - (ax+b)) = 0$

Def: Az x = a egyenes aszimptotája f(x)-nek, ha $\lim_{a+} f = \infty\ (-\infty)$ vagy $\lim_{a-} f = \infty\ (-\infty)$

Aszimptota ≡ érintő a végtelenben

Aszimptota megkeresése:
(pl. +∞-ben)

a) $\lim_{+\infty} f(x)/x = a$ → egyenes meredeksége

b) $\lim_{x\to+\infty} (f(x) - ax)$ → az eltolás konstansa

$\lim_{t\to 0} (e^t - 1)/t = 1$

Függvényvizsgálat lépései:
1) értelmezési tartomány meghatározása
2) lim f féloldali határértékei a szakadási pontokban és D(f) határoló pontokban (+/- ∞-ben)
3) f páros, páratlan, periodikus-e?
4) f zérus helyei (ha nem nehéz)
5) monoton szakaszok, lokális és globális szélsőértékhelyek
6) konvex és konkáv szakaszok, inflexiós pontok
7) Aszimptotálás
8) grafikon lerajzolása

Numerikus számítások

Def: $df(a)(x) = f'(a)(x-a)$, az $f(x)$ a bázispontú differenciáljának értéke az x helyen
megj: a differenciál párhuzamos az a-beli érintőegyenessel

$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \varepsilon(x)$

$\lim_{x \to a} \varepsilon(x)/(x-a) = 0$ „$\varepsilon(x)$ sokkal kisebb $(x-a)$-nál, ha x közel van a-hoz"

Ezért: ha $f'(a) \neq 0$, akkor $\varepsilon(x)$ elhanyagolható az $f'(a)(x-a)$ -hoz képest

Azaz: $f(x)-f(a) \approx f'(a)(x-a)$, ha x közel van a-hoz

$f'(a)(x-a) \rightarrow df$

$f(x) - f(a) \rightarrow \Delta f$

$\Delta f \approx df$

Tétel: Ha f kétszer differenciálható $[a;x]$ szakaszon, akkor létezik olyan $c \in (a;x)$, hogy
$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + ½ f''(c)(x-a)^2$, ezért

$$|\Delta f - df| \leq |\ ½ f''(c)(x-a)^2| \leq ½ M(x-a)^2$$
$$M = \max |f''|\ [a;x]$$

Newton módszer:
$f(x) = 0$ megoldására

x_{n+1} az x_n ponthoz tartozó érintő metszéspontja az x tengellyel $y-f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n)$

$$x_{n+1} = x_n - (f(x_n)/f'(x_n))$$

A Newton módszer konvergenciája nagyon gyors

A Newton-módszer gyorsan konvergens, ha:
a) a gyök közeléből indítjuk az iterációt
b) a gyök egyszeres, azaz $f'(x^*) \neq 0$
c) $f \in c^2$ az x^* környezetében f kétszer deriválható
ilyenkor $|x_{n-1} - x^*| \leq c|x_n - x_*|^2$

Megj: a gyöktől távolabbról indítva az iteráció divergálhat

Létezik egy lassabb, de biztosan konvergens eljárás → felezéses módszer
Lépésenként a hiba feleződik
$f(a) \cdot f(b) < 0$ Legyen $c = (a+b)/2$

Integrál számítás

Def: Legyen I véges vagy végtelen intervallum végpontokkal vagy anélkül, legyen $f: I \rightarrow R$
A $F: I \rightarrow R$ függvény primitív függvénye f-nek az I intervallumon, ha:
a) F folytonos
b) $F' = f$ az I belső pontjaiban

Tétel: A primitív függvény konstans összeadandó erejéig egyértelmű, $F(x) + c$ alakú az összes primitív függvény

Jelölés: $\int f(x)\, dx$ jelöli f bármely primitív függvényét

Primitív függvény kiszámítási technikája:

Áll: Ha $\int f(x)\,dx = F(x) + c$, akkor $\int f(ax+b)\,dx = 1/a\,F(ax+b)+c$
f változójában lineáris függvényt adunk meg

Tétel: a) $\int f'(x)\cdot f^{\alpha}(x)\,dx = (f^{\alpha+1}(x))/(\alpha+1) + c$ ha $\alpha \geq 0$ egész, vagy h $f(x) > 0$ minden x-re, és $x \in R$ és $\alpha \neq -1$
b) $\int f'(x)/f(x)\,dx = \ln|f(x)| + c$ olyan intervallumokon, ahol f(x)-nek nincs gyöke

Láncszabály:
Ha $F' = f$, akkor $d/dt\,F(\varphi(t)) = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$, azaz $\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t)) + c$
Ha itt $\varphi(t)$ szig mon, akkor invertálható, tehát $x = \varphi(t)$-ből $t = \varphi^{-1}(x)$ kiszámolható

Tétel: Helyettesítéses integrálás
Ha $\varphi(t)$ szig mon és diffható I-n, akkor ott f(x) primitív függvénye
$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt \qquad t = \varphi^{-1}(x)$

Tétel: Parciális integrálás
Legyen f, g folytonos I-n, diffható I belső pontjaiban. Ha f'g-nek van primitív függvénye I-n, akkor fg'-nek is van, és $\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$
„A deriválást átdobjuk g-ről f-re”

Alapintegrálok:

$\int x^{\alpha}\,dx = (x^{\alpha+1})/(\alpha+1) + c$ — ha $x > 0$, $\alpha \neq -1$ valós vagy $x \in R$ és $\alpha \geq 0$ egész

$\int 1/x\,dx = \ln|x| + c$ — $x \neq 0$

$\int e^x\,dx = e^x + c$

$\int a^x\,dx = (a^x)/(\ln(a)) + c$ — ha $a > 0$, $a \neq 1$

$\int \cos(x)\,dx = \sin(x) + c$

$\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + c$

$\int 1/\cos^2(x) = \tan(x) + c$ — $x \neq (k+1/2)\,\pi$

$\int 1/\sin^2(x) = -\cot(x) + c$ — $x \neq k\pi$

$\int \cosh(x)\,dx = \sinh(x) + c$

$\int \sinh(x)\,dx = \cosh(x) + c$

$\int 1/\cosh^2(x) = \tanh(x) + c$

$\int 1/\sinh^2(x) = -\coth(x) + c$

$\int 1/\sqrt{(1-x^2)}\,dx = \mathrm{asin}(x) + c$ — $|x| < 1$
$= -\mathrm{acos}(x) + c$ — $|x| < 1$
$(\mathrm{asin}(x) + \mathrm{acosh}(x) = \pi/2$

$$\int 1/\sqrt{(1+x^2)}\, dx = \text{asinh } x + c$$
$$= \ln (x + \sqrt{(x^2+1)} + c$$

$$\begin{aligned} \int 1/(1-x^2)\, dx &= \text{acosh } (x) + c && \text{ha } x > 1 \\ &= -\text{ acosh } (-x) + c && \text{ha } x < -1 \\ &= \ln |x + \sqrt{(x^2-1)}| + c && \text{ha } |x| > 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int 1/(1+x^2)\, dx &= \text{atan } (x) + c \\ &= -\text{acot } (x) + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int 1/(1-x^2)\, dx &= \text{atanh } (x) + c && \text{ha } |x| < 1 \\ &= \text{acoth } (x) + c && \text{ha } |x| > 1 \\ &= \tfrac{1}{2} \ln |(1+x)/(1-x)| + c && \text{ha } x \neq +/- 1 \end{aligned}$$