Villamosmérnök A3X (2018 tavasz) 1. pótpót ZH

Minden feladat 20 pontos, tehát összesen 60 pontot lehet összegyűjteni. Minden feladat esetében szükséges a világos indoklás, nem elég a végeredmény és/vagy a válasz.

1. Oldja meg az $y'x + y = x$ differenciálegyenletet!

Megoldásvázlat. Legyen $P(x, y) = y - x$, $Q(x, y) = x$! Akkor az egyenlet $P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$ alakú, ahol $P_y = 1 = Q_x$, tehát egzakt. Kell: $u(x, y)$, amire $u_x = P$, $u_y = Q$. $u(x, y) = \int P(x, y)\,dx = \int y - x\,dx = xy - x^2/2 + c(y)$; $x = Q(x, y) = u_y = x + \frac{\partial}{\partial y}c(y) \rightsquigarrow \frac{\partial}{\partial y}c(y) = 0 \rightsquigarrow c(y) = c \rightsquigarrow u(x, y) = xy - x^2/2 + c$, vagyis a megoldás: $x^2/2 - xy = c$, azaz $y = x/2 + c/x$.

Vagy: $y' + y/x = 1$ lineáris. y_{ha}: $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \rightsquigarrow \int \frac{1}{y}\,dy = -\int \frac{1}{x}\,dx \rightsquigarrow \ln|y| = c - \ln x \rightsquigarrow |y| = \frac{c_1}{|x|}$ $(c_1 > 0)$, azaz $\rightsquigarrow |yx| = c_1$, amiből Bolzano miatt $yx = c$ $(c \neq 0)$, vagyis $y = c/x$. De $y \equiv 0$ szinguláris megoldás, tehát $y_{ha} = c/x$, $c \in \mathbb{R}$.

y_{ip}: állandók variálásával. $y = c(x)/x \rightsquigarrow y' = \frac{c'(x)}{x} - \frac{c(x)}{x^2}$, tehát visszahelyettesítve $1 = \frac{c'(x)}{x} - \frac{c(x)}{x^2} + \frac{c(x)}{x^2} = \frac{c'(x)}{x} \rightsquigarrow c'(x) = x$, vagyis $c(x) = x^2/2$ és így $y_{ip} = x/2$ jó, tehát $y_{ia} = y_{ha} + y_{ip} = c/x + x/2$.

2. Oldja meg az $y'' + y' - 6y = 1$, $y(0) = y'(0) = 0$ kezdetiérték-problémát Laplace-transzformáció alkalmazásával!

Megoldásvázlat. A kezdetiérték-feltételeket is figyelembe véve $\frac{1}{s} = \mathfrak{L}\{y''\} + \mathfrak{L}\{y'\} - 6\mathfrak{L}\{y\} = (s^2 + s - 6)Y$, azaz $Y = \frac{1}{s(x-2)(s+3)} = \frac{-1}{6s} + \frac{1}{10(s-2)} + \frac{1}{15(s+3)}$, amiből $y(t) = \frac{-1}{6} + \frac{1}{10}e^{2x} + \frac{1}{15}e^{-3x}$.

3. Számítsa ki az $r(t) = (-4\cos t, 4\sin t, 3t)$, $t \in [0, 3\pi]$ egyenletű görbe hosszát!

Megoldásvázlat. $|L| = \int_0^{3\pi} |\dot{r}(t)|\,dt = \int_0^{3\pi} \sqrt{4^2 + 3^2}\,dt = 15\pi$.

IMSc-feladat. Mutassa meg, hogy $\mathfrak{L}\left\{e^{at}g(t)\right\}(s) = \mathfrak{L}\{g(t)\}(s - a)$, ahol $\mathfrak{L}\{f(t)\}(s)$ jelöli az f függvény Laplace-transzformáltját!

Megoldásvázlat. $\mathfrak{L}\left\{e^{at}g(t)\right\}(s) = \int_0^{\infty} e^{at}g(t)e^{-st}\,dt = \int_0^{\infty} g(t)e^{-(s-a)t}\,dt = \mathfrak{L}\{g(t)\}(s - a)$.