4. Vizsgazárthelyi megoldásokkal 2006/07 A3

1. Oldja meg az $y''(x) - 2y'(x) + y(x) = e^x$, $y(0) = 1, y'(0) = 1$ kezdeti érték problémát Laplace-transzformációval!

MO. $Y \triangleq L(y)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1 \rightsquigarrow y'' - 2y' + y = e^x \rightsquigarrow s^2Y - s - 1 - 2sY + 2 + Y = \frac{1}{s-1} \rightsquigarrow$

$Y(s^2 - 2s + 1) = \frac{1}{s-1} + s - 1 \rightsquigarrow Y = \frac{s^2 - 2s + 2}{(s-1)^3}$. Ezt kell parciális törtekre bontani:

$\frac{s^2 - 2s + 2}{(s-1)^3} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{(s-1)^2} + \frac{C}{(s-1)^3} = \frac{A(s-1)^2 + B(s-1) + C}{(s-1)^3} \rightsquigarrow s^2 - 2s + 2 = A(s-1)^2 + B(s-1) + C.$

Ebből $s = 1$-el $C = 1$, $s = 0$-al $A - B + 1 = 2 \rightsquigarrow A = B + 1$, $s = -1$-el: $4A - 2B + 1 = 5 \rightsquigarrow 4B + 4 - 2B = 4 \rightsquigarrow$

$B = 0 \rightsquigarrow A = 1 \rightsquigarrow Y = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{(s-1)^3} \rightsquigarrow y = e^x + \frac{1}{2}x^2e^x$

---

2. Legyen k a z tengely irányú egységvektor és G a háromdimenziós térben az origóközéppontú R sugarú felső nyílt félgömbfelület. Számítsuk ki a $v(r) = \mathrm{rot}(k \times r)$, $r \in \mathbb{R}^3$ vektor-vektor függvény felületmenti integrálját G-n!

MO. Stokes-tétellel: (L a gömb határa az $[x, y]$ síkbeli origóközéppontú R sugarú körvonal):

$\int_F \mathrm{rot}\,(k \times r)\,df = \int_L k \times r\,dr = \int_L (k \times r)_e\,|dr| = \int_L |k \times r|\,|dr| = \int_L |k||r|\,|dr| = \int_L R\,|dr| = R\int_L |dr| =$

$= R|L| = 2R^2\pi$, ahol a jelölések: $\int_F v\,df$ a v felületmenti integrálja, $\int_L v\,dr$ a v vonalmenti, $\int_L v\,|dr|$ a v ívhossz szerinti integrálja és felhasználtuk, hogy $\int_L v\,dr = \int_L v_e\,|dr|$, ahol v_e a v-nek az az L érintővektorára eső vetülete és, mivel $k \times r$ párhuzamos az L érintőjével, így $\int_L (k \times r)_e\,|dr| = \int_L |k \times r|\,|dr|$.)

A vonalintegrál persze számolható közvetlenül: L egyenlete: $r(t) = (R\cos t, R\sin t, 0)$, $0 \le t \le 2\pi$, $\dot r(t) = (-R\sin t, R\cos t, 0)$,

$k \times r(t) = (-R\sin t, R\cos t, 0) \rightsquigarrow \int_0^{2\pi} k \times r(t) \cdot \dot r(t)\,dt = \int_0^{2\pi} R^2\,dt = 2R^2\pi$.

VAGY a felületi integrál is számolható közvetlenül. A rotáció definíciójából (vagy koordinátánként a $\mathrm{rot}\,v = \nabla \times v$ formulából) $\mathrm{rot}\,(k \times r) = 2k$, a félgömb egyenlete $r(u, v) = (R\sin u\cos v, R\sin u\sin v, R\cos u)$, $0 \le u \le \pi/2, 0 \le v \le 2\pi$,

[illegible]

nek csak a 3. koordinátája kell, ez $R^2 \sin u\cos u(\cos^2 u + \sin^2 u) = R^2 \sin u\cos u$. Ezzel $\int_F \mathrm{rot}\,(k \times r)\,df =$

$= 2\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} R^2 \sin u\cos u\,du\,dv = 2\frac{R^2}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \sin 2u\,du\,dv = 2\frac{R^2}{2}2\pi\left(-\frac{\cos 2u}{2}\right)\Big|_0^{\pi/2} = 2\frac{R^2}{2}2\pi \cdot \frac{2}{2} = 2R^2\pi$.

---

3. Adjon meg egy olyan $r \mapsto u(r)$, $r \in \mathbb{R}^3$ skalár-vektor függvényt, melynek a gradiense a $v(r) = r|r|^2$, $r \in \mathbb{R}^3$ vektorfüggvény!

MO. $\mathrm{rot}\,v = 0$ mindenütt, mert $\mathrm{rot}\,v = |r|^2\mathrm{rot}\,r - r \times \mathrm{grad}\,|r|^2 = 0$ ha $r \ne 0$, hiszen $\mathrm{rot}\,r = 0$ és $\mathrm{grad}\,|r|^2 = 2|r| \cdot \frac{r}{|r|} \| r$ ha $r \ne 0$ és az origóban is 0 mivel itt az $r|r|^2$ deriváltoperátora a 0 operátor $\left(\lim_{r \to 0} \frac{r|r|^2 - 0r}{|r|} = 0\right)$

(De persze kiszámítható koordinátánként a $\mathrm{rot}\,v = \nabla \times v$ formulából is) tehát mindenütt van potenciál. Így pl. egy, az origót az r ponttal összekötő $s(t) = rt$, $0 \le t \le 1$ egyenletű szakasz mentén vonalintegrálva (persze $\dot s(t) = r$):

$u(r) = \int_0^1 v(rt) \cdot r\,dt = \int_0^1 rt|rt|^2 \cdot r\,dt = \int_0^1 |r|^4 t^3\,dt = |r|^4 \int_0^1 t^3\,dt = |r|^4 \frac{t^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{|r|^4}{4}$.

---

4. (a) $\lim_{z \to 0} \frac{z}{\bar z} = ?$ (b) $\lim_{z \to 0} \frac{z^2}{\bar z} = ?$

MO. (a) $\lim_{z \to 0} \frac{z}{\bar z}$ nem létezik mert pl. az x tengely mentén ($y = 0$-al) $\frac{z}{\bar z} = \frac{x}{x} = 1$ és az y tengely mentén ($x = 0$-al) $\frac{z}{\bar z} = \frac{jy}{-jy} = \frac{1}{-j} = j$. (b) $\lim_{z \to 0} \frac{z^2}{\bar z} = 0$, mert $f(z) = \frac{z^2}{\bar z} = z \cdot \frac{z}{\bar z}$ és $|\frac{z}{\bar z}| = 1$, így $|f(z)| \le |z| \longrightarrow 0$.

---

5. (a) $\int_{|z|=1} \frac{e^{z^3} - 1}{z^3}\,dz = ?$ (b) $\int_{|z|=1} \frac{e^{z^2} - 1}{z^3}\,dz = ?$

MO. (a) Az integrál 0, mert $f(z) = \frac{e^{z^3} - 1}{z^3} \xrightarrow[z \to 0]{} 1 \rightsquigarrow f(z)$-nek az egyetlen a körlapon levő szingularitásában, az origóban megszüntethető szakadása van. (b) e^{z^2} $z = 0$ körüli Taylor-sora: $e^{z^2} = 1 + z^2 + \frac{z^4}{2} + \ldots \rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow f(z) = \frac{e^{z^2} - 1}{z^3} = \frac{1}{z} + \frac{z}{2} + \ldots \rightsquigarrow \mathrm{Res}_{z=0} f(z) = 1 \rightsquigarrow \int_{|z|=1} \frac{e^{z^2} - 1}{z^3}\,dz = 2\pi j$

---

6. (a) Adja meg a lineáris differenciálegyenletek megoldásának általános alakját!
(b) Hogyan számítjuk ki egy felület felszínét?
(c) Mit nevezünk lényeges szingularitásnak?

MO. (a) A homogén egyenlet általános megoldásának és az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldásának összege.

(b) Ha a felület explicit (paraméteres) egyenlete $(u, v) \mapsto r(u, v)$, $(u, v) \in A$, akkor a felület felszíne: $\int_A |r_u \times r_v|\,du\,dv$.

(c) Ha a függvénynek z_0-ban izolált szingularitása van és nem létezik sem véges sem végtelen határértéke z_0-ban (pontosan akkor ha a z_0 körüli Laurent-sorában végtelen sok negatív indexű együttható különbözik nullától).