INFOANALÍZIS2 7.SZIGORLAT

2017 január 09.

Feladat	1.	2.	3.	4.	5.	$\sum$
max. pontszám	10	10	10	10	10	50
elért pontszám						

NÉV
NEPTUN KÓD

1. Feladat. Tekintsük a következő függvényt:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Milyen irányban létezik iránymenti derivált az origóban?

2. Feladat. Tekintsük a következő függvényt:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3-x^3}{x^2+y^2} & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Hol differenciálható a függvény?

3. Feladat. Számítsuk ki az alábbi integrált

$$\int_0^2 \int_x^2 2y^2 \sin xy \; dy \; dx.$$

4. Feladat. Oldjuk meg az alábbi kezdeti érték problémát

$$y' = 2\sqrt{y-1}\cos(x) \quad y(\pi) = 2.$$

5. Feladat. Határozzuk meg a következő hatványsor konvergencia sugarát!

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n-1)!}{n^n}(x-1)^n.$$

1. Feladat. Tekintsük a következő függvényt:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Milyen irányban létezik iránymenti derivált az origóban?

Megoldás. Közelítsünk a $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ irányból. $\boxed{\mathbf{1p}}$ Mivel $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$, $\boxed{\mathbf{1p}}$

$$\boxed{\mathbf{2p}} \quad \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^4\cos^2\alpha\sin^2\alpha}{h^2} - 0}{h} \overset{\boxed{\mathbf{2p}}}{=} \lim_{h\to 0} h\cos^2\alpha\sin^2\alpha \overset{\boxed{\mathbf{2p}}}{=} 0.$$

Az iránymenti derivált tehát minden irányban létezik. $\boxed{\mathbf{2p}}$

---

2. Feladat. Tekintsük a következő függvényt:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3-x^3}{x^2+y^2} & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Hol differenciálható a függvény?

Megoldás. Az origó kivételével minden pontnak van olyan környezete, ahol a parciális deriváltak folytonos kétváltozós függvények, így ott a függvény differenciálható. $\boxed{\mathbf{2p}}$
Az origóban vizsgáljuk a következő limeszt: $\boxed{\mathbf{2p}}$

$$\lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{0}} \frac{f(\mathbf{r}) - f(\mathbf{0}) - \langle \mathbf{g}, \mathbf{r}-\mathbf{0}\rangle}{||\mathbf{r}-\mathbf{0}||}$$

A **formális** gradiens itt a $\mathbf{g} = (-1,1)$ vektor $\boxed{\mathbf{2p}}$, így azt kell ellenőriznünk, hogy ($\mathbf{r} = (x,y)$) a

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{y^3-x^3}{x^2+y^2} - (-x+y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \overset{\boxed{\mathbf{1p}}}{=} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2 - x^2y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$\boxed{\mathbf{2p}}$ határérték nulla-e. A számlálóban és a nevezőben is köbös tagok vannak, így ránézésre is látszik, hogy pl. $x = -y$ esetben ez nem tart nullához. A függvény az origóban tehát nem differenciálható. $\boxed{\mathbf{1p}}$

---

3. Feladat. Számítsuk ki az alábbi integrált

$$\int_0^2 \int_x^2 2y^2 \sin xy \; dy \; dx.$$

Megoldás. Az integrálási tartomány egy háromszög. $\boxed{\textbf{2p}}$
Az integrálás határainak felcserélésével $\boxed{\textbf{2p}}$

$$\int_0^2 \int_0^y 2y^2 \sin xy \; dx \; dy \overset{\boxed{\textbf{2p}}}{=} \int_0^2 \left[\frac{-2y^2 \cos xy}{y} \right]_{x=0}^{y} dy \overset{\boxed{\textbf{2p}}}{=} \int_0^2 -2y \cos y^2 + 2y \; dy$$

$$\overset{\boxed{\textbf{1p}}}{=} \left[-\sin y^2 + y^2 \right]_0^2 = -\sin 4 + 4.$$

Az integrandus a korlátos zárt tartományon folytonos, tehát az integrál létezik, és az eredmény független az integrálás sorrendjétől. $\boxed{\textbf{1p}}$ ∎

---

4. Feladat. Oldjuk meg az alábbi kezdeti érték problémát

$$y' = 2\sqrt{y-1}\cos(x) \quad y(\pi) = 2.$$

Megoldás. A kezdeti érték miatt a konstans $y = 1$ nem megoldás. $\boxed{\textbf{1p}}$ A változókat szétválasztva kapjuk $\boxed{\textbf{2p}}$

$$\int \frac{1}{\sqrt{y-1}} \, dy = 2 \int \cos(x) \, dx.$$

Integrálás után kapjuk $\boxed{\textbf{2p}}$

$$\sqrt{y-1} = \sin(x) + c.$$

A kezdeti feltételből $\boxed{\textbf{2p}}$

$$c = 1.$$

Tehát $\boxed{\textbf{2p}}$

$$y(x) = \sin^2(x) + 2\sin(x) + 2. \quad \blacksquare$$

---

5. Feladat. Határozzuk meg a következő hatványsor konvergencia sugarát!

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n-1)!}{n^n} (x-1)^n.$$

Megoldás.

$$R \overset{\boxed{\textbf{3p}}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n-1)!}{n^n}}{\frac{n!}{(n+1)^{n+1}}} \overset{\boxed{\textbf{4p}}}{=} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n+1} \overset{\boxed{\textbf{3p}}}{=} e. \quad \blacksquare$$