Analízis szigorlat informatikusoknak

2. vizsga (2016. június 9.), B-változat

Nem hivatalos megoldás!
HIBÁK ELŐFORDULHATNAK!

A talált hibákat a fájl vitalapján kérem jelezni!

Analízis szigorlat informatikusoknak

2016.06.09. "B"

NEM HIVATALOS MEGOLDÁS!

Hibák előfordulhatnak!

1. feladat

a) rész

Tétel: A határérték egyértelmű, azaz ha $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ és $\lim_{n\to\infty} a_n = B$, akkor $A = B$.
Bizonyítás: Legyen $A \neq B, pl. B > A$, ekkor $d = B - A$. A limesz definíciója miatt
$\forall\epsilon > 0 :$
$\exists N_a(\epsilon) \in \mathbb{N}$, hogy $|a_n - A| < \epsilon$ (tehát $a_n \in]A-\epsilon, A+\epsilon[$), ha $n > N_a(\epsilon)$.
$\exists N_b(\epsilon) \in \mathbb{N}$, hogy $|a_n - B| < \epsilon$ (tehát $a_n \in]B-\epsilon, B+\epsilon[$), ha $n > N_b(\epsilon)$.
Legyen $\epsilon = \frac{d}{3}$.
Ekkor ha $n > N_a(\epsilon)$ és $n > N_b(\epsilon)$, akkor $a_n \in]A-\epsilon, A+\epsilon[$ és $a_n \in]B-\epsilon, B+\epsilon[$, ami ellentmondás, ugyanis $]A-\epsilon, A+\epsilon[\cap]B-\epsilon, B+\epsilon[= \emptyset$.
Másképpen fogalmazva: ha $n > N_a(\epsilon)$ és $n > N_b(\epsilon)$, akkor $A - \epsilon < a_n < A + \epsilon$ és $B - \epsilon < a_n < B + \epsilon$, amiből az következik, hogy $a_n < A + \epsilon < B + \epsilon < a_n$, ami miatt $a_n < a_n$ lenne, ami megint ellentmondás. ∎

b) rész

$$a_n = \sqrt[n]{6n^5 + 3n^3}$$

$$\sqrt[n]{6n^5} \leq \sqrt[n]{6n^5 + 3n^3} \leq \sqrt[n]{9n^5}$$

$$\sqrt[n]{6n^5} = \sqrt[n]{6} * \sqrt[n]{n}^5 \to 1 * 1^5 = 1 \quad (n \to \infty)$$

Hasonlóan

$$\sqrt[n]{9n^5} = \sqrt[n]{9} * \sqrt[n]{n}^5 \to 1 * 1^5 = 1 \quad (n \to \infty)$$

Így a rendőr-elv miatt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1$$

2. feladat

Tudjuk, hogy $f(x)$ görbéjének ívhossza az $[a, b]$ intervallumon:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\ \mathrm{d}x$$

A függvény és deriváltja:

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{27}}(x-2)^{\frac{3}{2}} \qquad x \in [2, 11]$$

$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{27}}\frac{3}{2}(x-2)^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{\sqrt{27}}\sqrt{x-2}$$

Behelyettesítve:

$$l = \int_2^{11} \sqrt{1 + \left(\frac{3}{\sqrt{27}}\sqrt{x-2}\right)^2}\ \mathrm{d}x = \int_2^{11} \sqrt{1 + \frac{9}{27}(x-2)}\ \mathrm{d}x = \sqrt{\frac{1}{3}} \int_2^{11} (x+1)^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{d}x = \sqrt{\frac{1}{3}} \left[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_2^{11} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{3}}\frac{2}{3}\left(\sqrt{12^3} - \sqrt{3^3}\right) = \sqrt{\frac{1}{3}}\frac{2}{3}\sqrt{3}(24-3) = 14$$

Analízis szigorlat
informatikusoknak

2016.06.09. "B"

NEM HIVATALOS
MEGOLDÁS!

Hibák előfordulhatnak!

3. feladat

a) rész

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2x-\pi} \overset{(L.H.\frac{0}{0})}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos' x}{(2x-\pi)'} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-\sin x}{2} = -\frac{1}{2}$$

b) rész

Tétel: Ha $x_0 \in \mathbb{R}$ és $\lim_{x\to x_0} s(x) = \lim_{x\to x_0} r(x) = 0$, akkor

$$\lim_{x\to x_0} \frac{s(x)}{r(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{s'(x)}{r'(x)} = b \in \mathbb{R}$$

Analízis szigorlat informatikusoknak

2016.06.09. "B"

NEM HIVATALOS MEGOLDÁS!

Hibák előfordulhatnak!

4. feladat

a) rész

Elsőrendű, lineáris differenciálegyenlet általános alakja:

$$y'(x) + p(x) * y(x) = q(x)$$

Homogén akkor, ha $q(x) \equiv 0$.

b) rész

$$y' = \frac{e^{-3y}}{1+x}$$

Az egyenlet szétválasztható. Rendezve kapjuk, hogy

$$\int \frac{1}{e^{-3y}}\ \mathrm{d}y = \int \frac{1}{1+x}\ \mathrm{d}x$$

$$\int e^{3y}\ \mathrm{d}y = \int \frac{1}{1+x}\ \mathrm{d}x$$

$$\frac{1}{3}e^{3y} = \ln|1+x| + C \quad (C \in \mathbb{R})$$

$$e^{3y} = 3\ln|1+x| + C$$

$$3y = \ln(3\ln|1+x| + C)$$

$$y(x) = \frac{\ln(3\ln|1+x| + C)}{3}$$

5. feladat

a) rész

Tétel: A harmonikus sor $\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\right)$ divergens.
Bizonyítás: A numerikus sor definíciója szerint

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\lim_{k\to\infty}S_k=\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n}\quad(reszletosszeg)$$

$$S_{2^l}=\underbrace{\frac{1}{1}}_{\geq\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{2}}_{\geq\frac{1}{2}}+\underbrace{\underbrace{\frac{1}{3}}_{\geq\frac{1}{4}}+\underbrace{\frac{1}{4}}_{\geq\frac{1}{4}}}_{\geq 2*\frac{1}{4}=\frac{1}{2}}+\underbrace{\underbrace{\frac{1}{5}}_{\geq\frac{1}{8}}+\underbrace{\frac{1}{6}}_{\geq\frac{1}{8}}+\underbrace{\frac{1}{7}}_{\geq\frac{1}{8}}+\underbrace{\frac{1}{8}}_{\geq\frac{1}{8}}}_{\geq 4*\frac{1}{8}=\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{9}}_{\geq\frac{1}{16}}+\cdots+\underbrace{\frac{1}{2^l}}_{\geq\frac{1}{2^l}}\geq\frac{l}{2}$$

Így S_{2^l} tetszőlegesen nagy lehet, valamint monoton növő, így $\lim_{l\to\infty}S_{2^l}=\infty$, azaz $\lim_{k\to\infty}S_k=\infty$, tehát $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty$. ■

b) rész

$$a_k=\left(\frac{k+2}{k+1}\right)^{k^2}\qquad\sum_{k=1}^{\infty}a_k\overset{?}{<}\infty$$

$$a_k=\left(\frac{\left(1+\frac{2}{k}\right)^k}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k}\right)^k\geq 2^k$$

Így a speciális rendőr-elv miatt $\lim_{k\to\infty}a_k=\infty$, tehát nem teljesíti a konvergencia szükséges feltételét $a_k\to 0$ $(k\to\infty)$, tehát $\sum_k a_k$ numerikus sor divergens.

6. rész

a) rész

Tétel: Ha f legalább $(n+1)$-szer deriválható $K_\delta(x_0)$-ban ($\delta > 0$), és $x \in K_\delta(x_0)$, akkor $\exists$ olyan x_0 és x közötti ξ, hogy

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

$R_n(x)$ a Lagrange-féle maradéktag, $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$, ahol $T_n(x)$ az n-edfokú Taylor-polinomja f-nek.

b) rész

$$f(x) = \frac{1}{3+x^3} = (3+x^3)^{-1} = \frac{1}{3}\left(1+\frac{x^3}{3}\right)^{-1} \qquad x_0 = 0$$

Binomiális sorfejtéssel:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1}{k} \left(\frac{x^3}{3}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1}{k} \frac{1}{3^k}\, x^{3k}$$

Ahol

$$\binom{-1}{k} = \frac{\overbrace{(-1)(-1-1)(-1-2)\dots(-1-k+1)}^{k\ tenyezo}}{k!}$$

Konvergenciasugár: $\left|\frac{x^3}{3}\right| < 1$, tehát $-1 < \frac{x^3}{3} < 1$, x-re rendezve $-\sqrt[3]{3} < x < \sqrt[3]{3}$, azaz a konvergenciasugár:

$$R = \sqrt[3]{3}$$

7. rész

a) rész

Ha $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ totálisan deriválható (a, b)-ben, akkor itt a (v_1, v_2) iránymenti deriváltja:

$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{(a,b)} = grad\ f(a, b) * \underline{e}$$

(* a skaláris szorzat)
$\underline{e}$ a (v_1, v_2) irányú egységvektor, azaz $|\underline{e}| = 1$.

$$\underline{e} = \frac{1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} * (v_1, v_2)$$

b) rész

$$f(x, y) = x^4 - 2x^3y + 8y \qquad P_0(2, 1) \qquad erintosik =?$$

$f(P_0) = 2^4 - 2 * 2^3 * 1 + 8 * 1 = 8$, így $P(2, 1, 8)$-ban érinti a sík a függvényt

$$f'_x(x, y) = 4x^3 - 6x^2y \qquad f'_x(P_0) = 4 * 2^3 - 6 * 2^2 * 1 = 8$$

$$f'_y(x, y) = -2x^3 + 8 \qquad f'_y(P_0) = -2 * 2^3 + 8 = -8$$

$$grad\ f(x, y) = (f'_x(x, y), f'_y(x, y)) \qquad grad\ f(P_0) = (8, -8)$$

Így $n = (8, -8, -1)$, tehát az érintősík:

$$8x - z = 8 * 2 - 8 * 1 - 1 * 8 = 0$$

8. rész

a) rész

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$
$$\iint\limits_K f(x,y)\ \mathrm{d}K = \iint\limits_{\hat{K}} f(r,\varphi) * |J|\ \mathrm{d}\hat{K}$$

K: $r = 1$ kör $x \leq 0$ része Áttérés Descartes-koordinátákról síkbeli polárkoordinátákra:

$$x = r * \cos\varphi \qquad y = r * \sin\varphi \qquad |J| = r$$

$$f(x,y) = r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = r^2\ \overbrace{\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right)}^{1} = r^2$$
$$\hat{K} : r \in [0,1]\,,\ \varphi \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$$
$$\int\limits_{r=0}^{1}\int\limits_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} r^3\ \mathrm{d}\varphi\ \mathrm{d}r \overset{Fubini}{=} \int\limits_0^1 r^3\ \mathrm{d}r * \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} 1\ \mathrm{d}\varphi = \left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) * \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 = \pi * \left(\frac{1}{4} - \frac{0}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$$

b) rész

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2$$
$$\iiint\limits_K f(x,y,z)\ \mathrm{d}K = \iiint\limits_{\hat{K}} f(r,\varphi,\theta) * |J|\ \mathrm{d}\hat{K}$$

K: $r = 1$ gömb $z \leq 0$ része Áttérés Descartes-koordinátákról síkbeli polárkoordinátákra:

$$x = r * \sin\theta * \cos\varphi \qquad y = r * \sin\theta * \sin\varphi \qquad z = r * \cos\theta \qquad |J| = r^2 * \sin\theta$$

$$f(x,y,z) = r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi + r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi = r^2\sin^2\theta\ \overbrace{\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right)}^{1} = r^2\sin^2\theta$$

$$\hat{K} : r \in [0,1]\,,\ \varphi \in [0, 2\pi]\ \theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$$

$$\int\limits_{r=0}^{1}\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}\int\limits_{\theta=\frac{\pi}{2}}^{\pi} r^4\sin^3\theta\ \mathrm{d}\theta\ \mathrm{d}\varphi\ \mathrm{d}r \overset{Fubini}{=} \int\limits_0^1 r^4\ \mathrm{d}r\ * \int\limits_0^{2\pi} 1\ \mathrm{d}\varphi\ * \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^3\theta\ \mathrm{d}\theta =$$

$$\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^1 * (2\pi - 0) * \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (1 - \cos^2\theta) * \sin\theta\ \mathrm{d}\theta = \frac{1}{5} * 2\pi \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin\theta\ \overbrace{- \cos^2\theta * \sin\theta}^{\cos^2\theta * \cos'\theta}\ \mathrm{d}\theta =$$

$$\frac{2\pi}{5} * \left[-\cos\theta + \frac{\cos^3\theta}{3}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{2\pi}{5} * \left(-\cos\pi + \frac{\cos^3\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{2} - \frac{\cos^3\frac{\pi}{2}}{3}\right) = \frac{4\pi}{15}$$

9. rész

a) rész

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } -\pi \le x \le 0 \\ x & \text{ha } 0 < x < \pi \end{cases}$$

Tudjuk, hogy a Fourier-sor egy trigonometrikus sor:

$$\phi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k cos(kx) + b_k sin(kx))$$

$\cos x$ együtthatóját keressük, azaz a_1-et.

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos x \; dx \overset{\substack{f(x)=0,\\ x\in[-\pi,0]}}{=} \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} x \cos x \; dx \overset{\substack{parc.\\ int.}}{=}$$

$$[x \sin x + \cos x]_0^{\pi} = (\pi \sin \pi + \cos \pi - 0 * \sin 0 - \cos 0) = -\frac{2}{\pi}$$

b) rész

A Dirichlet-tétel miatt $\phi(x) = f(x)$ ott, ahol a f folytonos, azonban ott, ahol szakadása van, ott az összegfüggvény értéke a két féloldali határérték számtani közepe, azaz

$$\phi(x) = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$$

A függvénynek szakadása van $(2k+1)\pi$ $(k \in \mathbb{R})$-ben, itt

$$\phi(x) = \frac{f(\pi - 0) + f(\pi + 0)}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$$

Így $\phi(x)$ összegfüggvény nem folytonos $(2k+1)\pi$-ben, tehát nem is egyenletesen konvergens.

Analízis szigorlat
informatikusoknak

2016.06.09. "B"

NEM HIVATALOS
MEGOLDÁS!

Hibák előfordulhatnak!