Alkalmazott algebra pótzárthelyi, 2009. november 6.

1. *Az alábbi mátrixok közül mely(ek) normális(ak), melyek pozitív definit(ek)?*

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

M_1, M_2, M_3 szimmetrikus, így normális. M_4 nem normális, például mert $M_4 M_4^*$ bal alsó sarkában 25 áll, míg $M_4^* M_4$ megfelelő eleme 29. így a definitség szóba sem jön. Ha M_3-ra Gram-Schmidt–ortogonalizációt alkalmazunk, az egységmátrixot kapjuk, így M_3 pozitív definit. $(1,-1,0)M_1(1,-1,0)^T = 0$ és $(1,0,0)M_2(1,0,0)^T = 0$, így M_1 és M_2 nem pozitív definit.

2. *Határozzuk meg a következő mátrixok szinguláris értékeit:*

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad B_4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} I$ alakú, ahol a két szélső mátrix permutációmátrix, így ortogonális, a középső pedig diagonális pozitív elemekkel. Úgyhogy a diagonális elemek sorrendje erejéig ez B_1 SVD-je, így a szinguláris értékek 5 és 1 (utóbbi kétszeres multiplicitással). $B_2^T B_2 = I$, így a szingulárisa értékek 1, (háromszor). $B_3^T B_3 = B_3^2 = B_3$, így B_3 egy 1 rangú merőleges vetítés, így $B_3^T B_3 = B_3$ sajátértékei 0 (kétszer) és 1 (egyszer), ugyanezek a szinguláris értékek. B_4 blokk-diagonális mátrix, bal felső 2×2-es blokkja egy 1 rangú vetítés, így $B_4^T B_4$ sajátértékei 0, 1 és 9, tehát a szinguláris értékek 0, 1 és 3.

3. *Legyen A egy nemnegatív elemű négyzetes mátrix. Tegyük fel, hogy A invertálható és A^{-1} is nemnegatív elemű. Igazuljuk, hogy ekkor A minden sorában és oszlopában pontosan egy pozitív elem áll.*

   Legyen $A = (a_{ij})$ és $A^{-1} = B = (b_{ij})$. Minden i indexre az AB szorzat i-edik diagonális eleme pozitív, így létezik olyan $j = j_i$, amelyre $a_{ij} > 0$ és $b_{ji} > 0$. Ha $a_{ik} > 0$ valamely, akkor a BA szorzat j-edik sorának és k-adik oszlopának kereszteződésében pozitív elem áll, ezért $BA = I$ miatt $k = j$. Ezzel beláttuk, hogy A minden sorában pontosan egy pozitív elem van. Az oszlopokra vonatkozó állítás hasonló gondolatmenettel igazolható.

4. *Legyen A egy valós elemű négyzetes mátrix, λ pedig egy komplex sajátértéke A-nak. Igazoljuk, hogy ekkor $\overline{\lambda}$ (azaz λ komplex konjugáltja) is sajátértéke A-nak.*

   Ha $Av = \lambda v$ valamely komplex $0 \neq v$ vektorra, akkor $A = \overline{A}$ továbbá az összeg, illetve a szorzat konjugáltjára vonatkozó azonosságok miatt
$$A \cdot \overline{v} = \overline{A} \cdot \overline{v} = \overline{Av} = \overline{\lambda v} = \overline{\lambda} \cdot \overline{v},$$
   ahol vektorok, illetve mátrixok konjugáltja elemenként értendő.

5. *Legyen G egy $n > 1$ pontú egyszerű, hurokél-mentes, összefüggő irányítatlan gráf. Milyen összefüggés állítható G adjacencia-mátrixának primitivitása és G kromatikus száma között? (G adjacencia-mátrixa az az $n \times n$-es $A = (a_{ij})$ mátrix, amelyre $a_{ij} = a_{ji} = 1$, ha i és j éllel össze van kötve, különben $a_{ij} = a_{ji} = 0$. G kromatikus száma pedig az a legkisebb k természetes szám, amelyre G csúcsai színezhetők k színnel úgy, hogy ne legyen két éllel összekötött azonos színű pont.)*

   A válasz: A akkor és csak akkor primitív, ha G két színnel színezhető. Ugyanis az összefüggőség miatt A irreducibilis. Mivel A^2 főátlójában csupa pozitív elemel állnak, amennyiben A^2 is irreducibilis, akkor A^2 primitív és így A is az. Fordítva, ha A^2 reducibilis, akkor A^{2k} is az minden k-ra, és így A^l nem lehet pozitív semmilyen l-re sem, tehát A imprimitív. Beláttuk, hogy A akkor és csak akkor imprimitív, ha A^2 irreducibilis. Legyen G' az az n pontú gráf, amelyben az $i \neq j$ csúcsot akkor kötjük össze, ha az A^2 mátrix i-edik sorának j-edik eleme pozitív, azaz i-ből megy 2 hosszú út j-be az eredeti G gráfban. Az A^2 mátrix akkor és csak akkor irreducibilis, ha G összefüggő. G' valamely összefüggő komponense az egymásból G-ben páros hosszú sétával elérhető pontokból áll. G összefüggősége miatt két eset lehetséges: ha G nem színezhető két színnel, azaz van G-ben pártalan kör, akkor G' is összefüggő (tehát A^2 irreducibilis), ha pedig színezhető, azaz nincs G-ben páratlan kör, akkor páros hosszú séta G-ben csak azonos színű pontok között lehetséges, és így G' nem összefüggő (ekkor A reducibilis).

Alkalmazott algebra pótzárthelyi, 2010. november 8.

1. *Hány megoldása van a kételemű test felett az*

$$x_1+x_2+x_4=1 \quad x_1+x_3+x_4+x_5=1 \quad x_2+x_4=1 \quad x_2+x_3+x_4+x_5=1 \quad x_3+x_5=1$$

egyenletrendszernek?

Az egyenletrendszer kiegészített mátrixa

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1&1&0&1&0&1\\ 1&0&1&1&1&1\\ 0&1&0&1&0&1\\ 0&1&1&1&1&1\\ 0&0&1&0&1&1 \end{array}\right), \text{ amiből } \left(\begin{array}{ccccc|c} 1&1&0&1&0&1\\ 0&1&1&0&1&0\\ 0&0&1&1&1&1\\ 0&0&0&1&0&1\\ 0&0&0&0&0&1 \end{array}\right)$$

lesz a Gauss-eliminációs eljárás háromszögesítő lépéseit végrehajtva. Itt az utolsó sor a $0=1$ ellentmondásnak felel meg, tehát nincs megoldás.

2. *Az alábbi mátrixok közül mely(ek) normálisak mely(ek) pozitív definit(ek)?*

$$A_1=\begin{pmatrix} 0&1&1\\ -1&0&1\\ -1&-1&0 \end{pmatrix},\quad A_2=\begin{pmatrix} 1&0&0\\ 0&1&1\\ 0&1&1 \end{pmatrix},\quad A_3=\begin{pmatrix} 1&-1&0\\ -1&3&2\\ 0&2&5 \end{pmatrix},\quad A_4=\begin{pmatrix} 1&0&0\\ -1&3&2\\ 0&2&5 \end{pmatrix},$$

A_1 ferdén szimmetrikus, így normális, de nem szimmetrikus, így nem lehet definit sem. $A_4^TA_4$ és $A_4A_4^T$ bal felső sarkában levő elemeit összevetve látjuk, hogy A_4 nem normális, így szintén nem lehet definit. A_2 és A_3 szimmetrikus, így mindkettő normális. A_2 utolsó két sora azonos, így szinguláris (nem invertálható), ezért nem lehet definit. Ha A_3-ra Gram-Schmidt–ortogonalizációt alkalmazunk, az egységmátrixot kapjuk, így A_3 pozitív definit.

3. *Határozzuk meg az alábbi mátrixok Moore-Penrose–féle pszeudoinverzét!*

$$B_1=\begin{pmatrix} 1&1&1 \end{pmatrix},\quad B_2=\begin{pmatrix} 1&0&0\\ 0&1&0 \end{pmatrix}.$$

B_1 szinguláris értékek szerinti (egyik) felbontása $B_1=(1)\,(\sqrt{3})\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$, ezért pszeudoinverze $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}^T\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}(1)=\begin{pmatrix} \frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3} \end{pmatrix}^T$.

B_2 szinguláris értékek szerinti (egyik) felbontása
$B_2=\begin{pmatrix} 1&0\\ 0&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&0\\ 0&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&0&0\\ 0&1&0 \end{pmatrix}$ ezért pszeudoinverze $\begin{pmatrix} 1&0&0\\ 0&1&0 \end{pmatrix}^T\begin{pmatrix} 1&0\\ 0&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&0\\ 0&1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1&0&0\\ 0&1&0 \end{pmatrix}^T$.

4. *Legyen*

$$A=\begin{pmatrix} 1&-1\\ 1&-1\\ 2&-2 \end{pmatrix} \text{ és } b=\begin{pmatrix} 1\\ 2\\ 3 \end{pmatrix}.$$

Keressünk olyan $x\in\mathbb{R}^2$ vektort, amelyre az $Ax=b$ egyenlet a legkisebb (négyzetes) hibával teljesül, azaz az Ax vektor az $\mathbb{R}^3$ tér szokásos távolságát tekintve a lehető legközelebb esik a b vektorhoz!

$A^TA=\begin{pmatrix} 6&-6\\ -6&6 \end{pmatrix}$, ennek két sajátértéke van: 0 és 12, a 12 sajátértékhez tartozó 1 hosszú sajátvektor (± 1-gyel való szorzás erejéig) $(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})^T$. Erre A-t alkalmazva az $A(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})^T=(\frac{2}{\sqrt{2}},\frac{2}{\sqrt{2}},\frac{4}{\sqrt{2}})^T$ vektort kapjuk, ami 1 hosszúra normálva $(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}})^T$. Ezért A szinguláris értékek szerinti felbontása $A=(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}})^T\sqrt{12}(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$ és így A pszeudoinverze $A^+=(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})^T\frac{1}{\sqrt{12}}(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}})=\begin{pmatrix} \frac{1}{12}&\frac{1}{12}&\frac{2}{12}\\ -\frac{1}{12}&-\frac{1}{12}&-\frac{2}{12} \end{pmatrix}$, és egy optimális megoldás megkapható a következőképpen: $x=A^+(1,2,3)^T=(\frac{3}{4},-\frac{3}{4})^T$.

5. *Határozzuk meg azokat 2×2-es nemnegatív elemű A mátrixokat, amelyekre A spektrálsugara 1 és az A^k sorozat nem konvergens!*

Az előadáson tanult konvergenciatétel miatt A nem lehet primitív. Ha A irreducibilis, akkor nem lehet a főátlójában pozitív elem (különben primitív lenne), így $A=\begin{pmatrix} 0&\alpha\\ \beta&0 \end{pmatrix}$ alakú. Ha α és β legalább egyike 0, akkor $A^k=0$ $k>1$ esetén. Tehát $\alpha>0,\beta>0$. A karakterisztikus polinomja $x^2-\alpha\beta$, a két sajátérték tehát $\pm\sqrt{\alpha\beta}$. A spektrálsugár akkor 1, ha $\alpha\beta=1$. Ekkor $A^k=I_2$ vagy A, aszerint, hogy k páros vagy páratlan, így a sorozat tényleg nem konvergens.

Ha A reducibilis, akkor $A=\begin{pmatrix} \alpha&\gamma\\ 0&\beta \end{pmatrix}$ vagy $A=\begin{pmatrix} \alpha&0\\ \gamma&\beta \end{pmatrix}$ alakú. A karakterisztikus polinomja mindkét esetben $(x-\alpha)(x-\beta)$, tehát A sajátértékei α és β. Ha $\alpha\neq\beta$, akkor egyik 1 (a spektrálsugár), a másik kisebb, továbbá a két sajátértékhez tartozó sajátvektorok lineárisan függetlenek, így a sajátvektorokból álló bázisra való áttérés mutatja, hogy A hasonló egy $\begin{pmatrix} \alpha&0\\ 0&\beta \end{pmatrix}$ alakú mátrixhoz, ami konvergál a $\begin{pmatrix} 1&0\\ 0&0 \end{pmatrix}$ vagy a $\begin{pmatrix} 0&0\\ 0&1 \end{pmatrix}$ mátrixhoz, aszerint, hogy α és β közül melyik 1. Az $\alpha=\beta=1$ esetben k szerint indukcióval látható, hogy $A^k=\begin{pmatrix} 1&k\gamma\\ 0&1 \end{pmatrix}$ (első eset) vagy $A^k=\begin{pmatrix} 1&0\\ k\gamma&1 \end{pmatrix}$ (második eset). Mindkét esetben akkor és csak akkor konvergens a sorozat, ha $\gamma=0$.

Összefoglalva a válasz: vagy $A=\begin{pmatrix} 1&\gamma\\ 0&1 \end{pmatrix}$, ahol $\gamma>0$, vagy $A=\begin{pmatrix} 1&0\\ \gamma&1 \end{pmatrix}$, ahol $\gamma>0$, vagy $A=\begin{pmatrix} 0&\alpha\\ \frac{1}{\alpha}&0 \end{pmatrix}$, ahol $\alpha>0$.

Alkalmazott algebra pótzárthelyi, 2011. november 17.

1. *Az alábbi mátrixok közül melyek normálisak, melyek pozitív definitek?*
$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & 7 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   A_1 normális, $A_1 A_1^T = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = A_1^T A_1$. Ezért A_2 is normális, hiszen blokk diagonális normális blokkokkal. A_3 nem normális: $A_3^T A_3$ második sorának második eleme $4 \cdot 4$, míg $A^3 A_3^T$-ban a megfelelő elem $4 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 5 \cdot 5$. A_4 és A_5 szimmetrikus, így normális. A_1, A_2, A_3 nem szimmetrikusak, ezért nem lehetnek definitek. A_4 főátlójában előfordul 0, míg A_5 szinguláris (első és harmadik sora ugyanaz), ezért nem lehetnek definitek.

2. *Hét kalapunk van, mindegyikben legfeljebb 1 nyúllal. Minden egyes $i \in \{1, \ldots, 7\}$-re igaz az, hogy a nem az i-edik kalapban levő nyulak száma páros. Hányféleképpen lehetséges ez?*

   Legyen x_i az i-edik kalapban levő nyulak száma és s a nyulak összlétszáma. A feltételek azzal egyenértékűek, hogy $s - x_i$ páros minden egyes i-re. De akkor az x_i-k mind ugyanolyan paritásúak, így azonosak. Tehát vagy minden kalapban van egy-egy nyúl, vagy egyikben sincs. Mindkét lehetőség teljesíti is az előírásokat.

3. *Határozzuk meg a $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix Moore–Penrose-féle pszeudoinverzét!*

   B (egy) SVD-je $B = I_2 \begin{pmatrix} 2 & \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, így $B^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \\ & 1 \end{pmatrix} I_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4. *Tegyük fel, hogy C egy olyan $n \times n$-es nemnegatív elemű primitív mátrix, amelyre $C^3 = C$. Igazoljuk, hogy C mindegyik eleme pozitív.*

   Tudjuk, hogy van olyan k pozitív egész, hogy C^k pozitív elemű. De ekkor C^{k+1} és C^{k+2} is pozitív elemű, így $C^{2\ell+1} > 0$ valamely $\ell > 0$ egészre. Ugyanakkor $C^{2\ell+1} = C^{2(\ell-1)+3} = C^{2(\ell-1)} C^3 = C^{2(\ell-1)+1} = \ldots = C^{2+1} = C^3 = C$.

5. *Van-e olyan 2×2-es valós D mátrix, amelyre $\lim_{k\to\infty} D^k = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$?*

   Nincs. Tegyük fel indirekte, hogy $\lim_{k\to\infty} D^k = L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Ekkor $\lim_{k\to\infty} D^{2k} = L$, hiszen az eredeti D^k sorozatnak a minden második tagjából álló részsorozatáról van szó. Ugyanakkor (mivel a mátrixok négyzetre-emelése folytonos leképezés) $\lim_{k\to\infty} D^{2k} = \lim_{k\to\infty} (D^k)^2 = (\lim_{k\to\infty} D^k)^2 = L^2$. De $L^2 \neq L$, ellentmondás.

6. *Mi az $M = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 9 & 6 \\ 7 & 9 & 2 & 6 \\ 9 & 2 & 7 & 6 \\ 6 & 6 & 6 & 6 \end{pmatrix}$ mátrix legnagyobb szinguláris értéke?*

   M egy szimmetrikus mátrix, így szinguláris értékei a sajátértékeinek abszolút értékei. Ezért a legnagyobb zsinguláris érték a spektrálsugárral azonos. Mivel M nemnegatív (sőt pozitív) elemű, a legkisebb sorösszeg alsó, a legnagyobb pedig felső korlát a spektrálsugárra. Mindkettő 24.

Alkalmazott algebra zárthelyi, 2009. október 30.

1. *Hány megoldása van a kételemű test felett a következő egyenletrendszernek?*

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & + & x_5 & + & x_6 & = & 0 \\
x_1 & & & + & x_3 & + & x_4 & & & & & = & 1 \\
 & & x_2 & & & + & x_4 & & & & & = & 1 \\
x_1 & & & + & x_3 & & & & & + & x_6 & = & 0 \\
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & & + & x_6 & = & 1 \\
 & & x_2 & & & & & & & + & x_6 & = & 0
\end{array}$$

A válasz 4, ez látható Gauss-eliminációval (mind a baloldal mátrixa, mind a kibővített mátrix rangja 4, tehát az egyenletrendszer megoldható és a balodali mátrix magja 2 dimenziós). Egy gyors ad hoc megoldás: a hatodik egyenletből $x_6 = x_2$ és a harmadik egyenletből $x_4 = x_2 + 1$. Ezeket behelyettesítve a többi egyenletbe, az elsőből $x_1 + x_2 + x_5 = 1$, a másodikból, negyedikből és ötödikből pedig egyaránt $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. A megoldások: x_1, x_2 lehet akármi ($\{0,1\}$-ből), $x_3 = x_1 + x_2$, $x_4 = x_2 + 1$, $x_5 = x_1 + x_2 + 1$, $x_6 = x_2$.

2. *Az alábbi mátrixok közül mely(ek) reducibilis(ek), mely(ek) primitív(ek)?*

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

M_1, M_2, M_4 egy-egy erősen összefüggő irányított gráf adjacencia-mátrixa, tehát ezek irreducibilisek. M_3 esetén a $a_{ij} = 0$, ha $j \in \{1,3\}$ és $i \notin \{1,3\}$, így M_3 reducibilis. Az irreducibils mátrixok primitívek is. Az M_4 mátrixnak van pozitív átlós eleme, míg $M = M_1$ vagy $M = M_2$-re M^2 primitív, mert irreducibilis és van pozitív átlós eleme. Tehát $M^{2k} > 0$ valamely k-ra, és így M is primitív.

3. *Mekkora lehet egy duplán sztochasztikus mátrix legnagyobb* **szinguláris** *értéke?*

Ha A duplán sztochasztikus, akkor A^T is az, és így A^TA is. A legnagyobb szinguláris értékének négyzete A^TA legnagyobb sajátértéke, ami a A^TA sztochasztikus volta miatt 1.

4. *Legyen A egy nemnegatív elemű négyzetes mátrix, amelyre $A^2 = A$. Igazoljuk, hogy A csak úgy lehet irreducibilis, ha A minden eleme pozitív.*

Ha $A^2 = A$, azaz A egy vetítés, akkor A sajátértékei 0 és 1. Ha A irreducibilis is, akkor A legnagyobb sajátértéke (ami 1) 1-szeres. De ekkor nincs A-nak más 1 abszolút értékű sajátértéke, így A egyben primitív is. De akkor A^k pozitív valamely k-ra, és $A = A^2 = A^3 = \ldots = A^k$.

5. *Legyen A egy $m \times n$-es valós mátrix. Igazoljuk, hogy*

$$\max_{v \in \mathbb{R}^n, |v|=1} |Av| = \sigma_1,$$

ahol σ_1 az A mátrix legnagyobb szinguláris értéke!

A "total least squares"-nél alkalmazott érvelést másoljuk le, csak ellenkező irányú egyenlőtlenséggel: Legyen $|v| = 1$ és legyen $v_1, \ldots, v_n$ az A^TA sajátvektoraiból alló ortonormált bázis, ahol $A^TAv_i = \sigma_i^2$ és $\sigma_1 \ge \sigma_2 \ge \ldots \ge \sigma_n \ge 0$. Írjuk fel v-t $v = \sum_{i=1}^n \gamma_i v_i$ alakban. Ekkor $\sum_{i=1}^n \gamma_i^2 = 1$ és

$$|Av|^2 = (Av, Av) = (A^TAv, v) = (\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \gamma_i v_i, \sum_{i=1}^n \gamma_i v_i) = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \gamma_i^2 \le \sum_{i=1}^n \sigma_1^2 \gamma_i^2 = \sigma_1^2.$$

Egyenlőség elérhető a $v = v_1$ választással.

6. *Legyen A egy $m \times n$-es valós mátrix. Legyen B az az $(m+n) \times (m+n)$-es mátrix, amelynek bal felső $m \times m$-es, valamint jobb alsó $n \times n$ blokkja a csupa 0 mátrix, a bal alsó $n \times m$-es blokkja az A^T, jobb felső $m \times n$-es blokkja pedig az A mátrix:*

$$B = \left(\begin{array}{c|c} 0 & A \\ \hline A^T & 0 \end{array} \right).$$

Milyen összefüggés van A szinguláris értékei és B sajátértékei között?

Legyen A rangja r és A pozitív szinguláris értékei $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$. Ekkor a A^T ranjga is r. Ha w egy $n+m$ hosszú oszlopvektor, amely $w = (u,v)^T$ alakú, ahol u egy n hosszúm v pedig egy m hosszú oszlopvektor, akkor $Bw = (A^Tv, Au)^T$ alakú. Innen világos, hogy $w \in \ker B$ akkor és csak akkor teljesül, ha $u \in \ker A$ és $v \in \ker A^T$. Ezért $\ker B$ dimenziója $m + n - 2r$. Legyenek $u_1, \ldots, u_r$ olyan lineárisan független vektorok, hogy u_i az A^TA mátrix sajátvektora σ_i^2 sajátértékkel. Ekkor a $w_i = (u_i, \frac{1}{\sigma_i}Au_i)^T$ oszlopvektorra $Bw_i = (\frac{1}{\sigma_i}A^TAu_i, Au_i)^T = \sigma_i w_i$. Hasonlóan, az $w'_i = (u_i, \frac{-1}{\sigma_i}u_i)^T$ vektorra $Bw'_i = -\sigma_i w_i$. Az $u_1, \ldots, u_r$ lineárisan függetlenek, továbbá az $\frac{1}{\sigma_1}Au_1, \ldots, \frac{1}{\sigma_r}Au_r$ vektorok is lineárisan függetlenek, tehát a $w_1, w'_1, w_2, w'_2, \ldots, w_r, w'_r$ rendszer is lineárisan független. ($(u_i, 0)^T = \frac{1}{2}(w_i + w'_i)$, és $(0, \frac{1}{\sigma_i}Au_i)^T = \frac{1}{2}(w_i - w'_i)$. Innen az $\{(u_i, 0)^T, (0, \frac{1}{\sigma_i}Au_i)^T | 1 \le i \le r\}$ rendszer lineáris függetlenségét alkalmazhatjuk.) Tehát nemnulla sajátértékekhez tartozó sajátvektorok kifeszítenek egy rangnyi (azaz $2r$) dimenziós alteret. Következésképpen $\pm\sigma_i$ az összes nemnulla sajátérték.

Alkalmazott algebra zárthelyi, 2010. október 29.

1. *Az alábbi mátrixok közül melyek normálisak, melyek pozitív definitek?*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Az A_1, A_3, A_4, A_5 mátrixok szimmetrikusak, így normálisak. Az A_2 mátrix ferdén szimmetrikus, azaz $A_2^T = -A_2$, így A_2 is normális ($A_2^T A_2 = -A_2^2 = A_2 A_2^T$). Az A_2 mátrix nem szimmetrikus, így nem lehet pozitív definit sem. Az A_1 mátrix főátlójában van 0, ezért A_1 nem lehet pozitív definit (pl. $(1,0)A_1(1,0)^T = 0$). Az A_3 mátrix determinánsa 0, ezért nem lehet pozitív definit. Az A_4 mátrixnak főátlójában a második elem negatív, ezért $(0,1)A_4(0,1)^T < 0$, így szintén nem lehet pozitív definit. Ha az A_5 mátrixra alkalmazzuk a Gram-Schmidt ortogonalizációs eljárást, az egységmátrixot kapjuk, így A_5 pozitív definit.

2. *Az alábbi mátrixok közül mely(ek) reducibilis(ek), mely(ek) primitív(ek)?*

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A B_2, B_3, B_4, B_5 mátrixok erősen összefüggő irányított gráfok adjacencia-mátrixai, ezért irreducibilisek. A B_1 mátrix olyan gráfhoz tartozik, ami nem erősen összefüggő, tehát B_1 reducibilis (és ezért nem is lehet primitív). $B_2^3 = I$, így B_2^{3k} sohasem pozitív, ezért B_2 imprimitív. A B_3 mátrix pozitív, így primitív is. B_4^2 reducibilis, így B_4^{2k} is mindig reducibilis, ezért B_4 imprimitív. B_5 irreducibilis és van a főátlójában nem 0 elem, ezért primitív. (Ez abból is látható, hogy B_5^2 pozitív.)

3. *Mekkora a következő mátrixok legnagyobb szinguláris értéke?*

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A $C_i^T C_i$ szorzat helyett érdemes a $C_i C_i^T$ szorzattal dolgozni, mert az utóbbi kisebb mátrix, ugyanakkor a pozitív sajátértékek ugyanazok. $C_1 C_1^T$ és $C_2 C_2^T$ is a 2×2-es egységmátrix, így azokra 1 a válasz. $C_3 C_3^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, ennek a pozitív sajátértéke 2, így C_3-ra a válasz $\sqrt{2}$. $C_4 C_4^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, ennek a nagyobbik sajátértéke 2, így a válasz ismét $\sqrt{2}$. $C_5 C_5^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, így a válasz 2.

4. *Legyen*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.6 \\ 0 & 0.8 \end{pmatrix} \quad \text{és } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Keressünk olyan $x \in \mathbb{R}^2$ vektort, amelyre az $Ax = b$ egyenlet a legkisebb (négyzetes) hibával teljesül, azaz az Ax vektor az $\mathbb{R}^3$ tér szokásos távolságát tekintve a lehető legközelebb esik a b vektorhoz!

A oszlopai ortonormált rendszert alkotnak, azaz $A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$, a 2×2-es egységmátrix, így A szinguláris értékek szerinti (egyik) felbontása $A = A I_2 I_2$. Ezért A pszeudoinverze $A^+ = I_2^T I_2^{-1} A^T = A^T$. Az órán tanultak miatt egy optimális megoldás $x = A^+ b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3.6 \end{pmatrix}$.

5. *Tegyük fel, hogy A egy olyan $n \times n$-es valós mátrix, hogy létezik $\lim_{k \to \infty} A^k$ és $\lim_{k \to \infty} A^k = I_n$, az $n \times n$-es egységmátrix. Igazoljuk, hogy ekkor $A = I_n$.*

$A = A I_n = A \lim_{k \to \infty} A^k = \lim_{k \to \infty} A^{k+1} = I_n$.

6. *Legyen A egy nemnegatív valós elemű szimmetrikus mátrix. Igazoljuk, hogy A akkor és csak akkor primitív, ha A^2 irreducibilis!*

Ha A primitív, akkor semelyik hatványa nem lehet reducibilis, így A^2 sem. Fordítva, ha A^2 irreducibilis, akkor A is az. Ebből az is következik, hogy A egyik sora sem csupa 0, így $A^2 = A^T A$ főátlójában pozitív számok állnak, ebből és A^2 irreducibilitásából következik, hogy A^2 primitív, azaz $A^{2k} > 0$ valamely k-ra. De ekkor A is primitív.

Alkalmazott algebra zárthelyi, 2011. október 27.

1. *Az alábbi mátrixok közül melyek normálisak, melyek pozitív definitek?*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix},\ A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix},\ A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

Mindegyik mátrix szimmetrikus, így mindegyik normális. A_1 első két sora lineárisan összefügg , ezért A_1 elfajuló, így A_1 nem lehet definit. A_4, illetve A_5 főátlójában van nem-pozitív elem, így ezek sem pozitív definitek. A_2-re, illetve A_3-ra a Gram-Schmidt–ortogonalizáció egy lépésben a $\operatorname{diag}(1,5,7)$ diagonális mátrixot adja, pozitív elemekkel a főátlóban, így ezek a mátrixok pozitív definitek.

2. *Az alábbi mátrixok közül melyek irreducibilisek, melyek primitívek?*

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ B_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ B_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Legyen G_{B_ℓ} az az irányított gráf, amelyben $j \to i$ olyan i,j-re él, hogy B_ℓ i-edik sorának j-edik eleme pozitív. $G_{B_1}, G_{B_2}, G_{B_5}$ erősen összefüggőek, tehát B_1, B_2 és B_5 irreducibilisek. G_{B_3}-ban a $\{3\}$ és a $\{3,4\}$ halmazokból, míg G_{B_4}-ben az $\{1,3\}$ és a $\{2,4\}$ csúcshalmazokból nem vezet ki él, ezért B_3 és B_4 reducibilisek. Az irreducibilisek közül B_2-ben van diagonális elem, ezért primitív, G_{B_5}-ben pedig van 3 és 4 hosszú irányított kör, így az irányított körök hosszaink lnko-ja 1, ezért B_5 szintén primitív. G_{B_1} pedig egy két színnel színezhető gráf (csillag), oda-vissza irányított élekkel. G_{B_1}-ben tehát nincs páratlan kör, emiatt B_1^2 reducibilis, és így B_1 imprimitív.

3. *Adjuk meg azt $x \in \mathbb{R}^2$ vektort, amelyre az Ax távolsága a $b = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \\ 16 \end{pmatrix}$ vektortól a lehető legkisebb, ahol $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.*

A oszlopai 2 hosszú, egymásra merőleges vektorok, így A (egyik lehetséges) SVD-je $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & \\ & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$, ezért $A^+ = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & -1/4 & -1/4 \end{pmatrix}$. (Az SVD-re tanult általános módszerrel: $A^TA = \begin{pmatrix} 2 & \\ & 2 \end{pmatrix}$ már diagonális, tehát - többek között - az $\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$ egységmátrix diagonalizálja. Ha ezt választjuk, az általános eljárást folytatva szintén a fenti SVD-re jutunk. Ha más ortogonális mátrixot választunk, az SVD más lesz, de ugyanazt az A^+-t adja.) A legkisebb négyzetes hibáról tanultak alapján a megoldás egyértelmű (mivel A oszlopai lineárisan függetlenek) és az $A^+b = \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \end{pmatrix}$.

4. *Legyen A egy $n \times n$-es komplex elemű mátrix és B az $\begin{pmatrix} & A \\ A & \end{pmatrix}$ alakú $2n \times 2n$-es mátrix, ahol az üresen hagyott helyeken csupa 0 áll. Mi az összefüggés A és B sajátértékei között? (Multiplicitások vizsgálata nem része a feladatnak.)*

A $0 \neq w = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ $(u, v \in \mathbb{C}^2)$ vektor akkor és csak akkor sajátvektora B-nek λ sajátértékkel, ha $Aw = \lambda w$, azaz $Av = \lambda u$ és $Au = \lambda v$. A $\lambda = 0$ esetben ez azzal egyenértékű, hogy $Av = Au = 0$. Innen 0 akkor és csak akkor sajátértéke B-nek, ha A-nak is. A $\lambda \neq 0$ esetben a két egyenlőség azzal helyettesíthető, hogy $u = \frac{1}{\lambda}Av$ és $A^2v = \lambda^2 v$. Tehát $\lambda \neq 0$ akkor és csak akkor sajátértéke B-nak, ha λ^2 sajátértéke A^2-nek, ami azzal egyenértékű, hogy λ vagy $-\lambda$ sajátértéke A-nak. (Pl. a Schur-felbontásból látható, hogy A^2 sajátértékei A sajátértékeinek a négyzetei.) A megoldás tehát: B sajátértékei A sajátértékei ± 1-gyel megszorozva.

5. *Ketten (Ursula és Vilmos) fej-vagy-írást játszanak egy kiegyensúlyozott pénzérmével. Ha fej jön ki, Ursula nyer 1 forintot Vilmostól, ha írás, akkor fordítva. Mind Ursulának, mind Vilmosnak korlátlanul áll a rendelkezésére pénz. Bennünket Ursula nyereményének modulo n vett maradéka érdekel, ahol $n > 2$ egész (ℓ forint veszteség $-\ell$ forint nyereségként értelmezendő, tehát például 1 forint veszteség maradéka $n-1$.) Milyen n-re konvergens Ursula modulo n vett nyereményének az eloszlása és konvergencia esetén mi a határeloszlás? (Kezdetben természetesen a nyeremény 0.)*

A Markov-lánc állapotai $0, 1, \ldots, n-1$. A nemnegatív valószínűségű átmenetek $j \to j+1$, illetve $i \to j-1$ (modulo n). Mindkét esetben a valószínűség 1/2. Az állapotátmenet-mátrix tehát $A = \frac{1}{2}P + \frac{1}{2}P^T$, ahol P a $(0, 1, \ldots, n-1)$ ciklushoz tartozó permutációmátrix. A G_A gráf, a $(0, 1, \ldots, n-1, n)$ kör, oda-vissza irányított élekkel, nyilván erősen összefüggő. Tudjuk, hogy ha A imprimitív, akkor valamely $s > 1$ egészre G_A csúcsai s részre oszthatók úgy, hogy élek csak az i-edik rész és az $i+1$-edik rész között mennek (ciklikusan, modulo s). Mivel oda-vissza élek vannak, ez csak úgy lehet, ha $s = 2$, azaz G_A, irányítatlan gráfként nézve 2 színnel színezhető. Ez pontosan akkor fordul elő, ha n páros. Ekkor az eloszlás "alternál": páros sok lépés után A nyereménye mindig páros, páratlan sok lépés után pedig mindig páratlan, tehát nem lehet konvergens. Ha viszont n páratlan, az A mátrix primitív, és így az eloszlás konvergál a stacionáriushoz, ami M dupla sztochasztikussága miatt az egyenletes eloszlás.

6. *Jelölje J_n azt az $n \times n$-es valós mátrixot, amelynek minden eleme 1, I_n pedig az $n \times n$-es egységmátrixot. Mennyi a $J_n - I_n$ mátrix determinánsa? ($J_n - I_n$ főátlójában csupa 0 áll, azon kívül csupa 1.)*

J_n szimmetrikus, így létezik létezik olyan U ortogonális mátrix, amelyre $U^{-1}J_nU$ diagonális, amelynek a főátlójában J_n sajátértékei állnak. J_n rangja 1, mert bármely lét oszlopa azonos. Így J_n magja $n-1$ dimenziós, és ugyanez igaz $U^{-1}J_nU$-ra is. Tehát $U^{-1}J_nU$ főátlójában $n-1$ 0 van. A maradék sajátérték például a következőképpen határozható meg: J_n pozitív elemű, így $\rho(J_n)$ is egy sajátérték. A legkisebb sorösszeg alsó, a legnagyobb pedig felső korlát $\rho(J_n)$-re, így $\rho(J_n) = n$. Tehát $U^{-1}J_nU$ főátlójában egy helyen n, a többi helyen 0 áll. Innen $U^{-1}(J_n - I_n)U = U^{-1}J_nU - I_n$ főátlójában főátlójában egy helyen $n-1$, a többi helyen -1 áll. Mivel hasonló mátrixok determinánsa ugyanaz, $\det(J_n - I_n) = \det U^{-1}(J_n - I_n)U = (-1)^{n-1}(n-1)$.