Kombinatorikus optimalizálás (VISZMA06)

2. ZH javítókulcs (2016. 03. 12.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. Mutyi bácsi komoly, nagy gondban van. Barátait különféle cégek felügyelőbizottságaiba szeretné kinevezni, úgy, hogy a kinevezettek a lehető legtöbb „hasznot" hajtsák. Minden egyes barát ígéretet kapott arra, hogy pontosan két bizottságnak lesz tagja, és különféle, itt nem részletezett háttéralkuk eredményeképp hősünk minden egyes bizottságba legfeljebb három tagot tud delegálni. Mutyi bácsi szerencsére minden egyes barátjáról pontosan tudja, hogy kinevezése esetén mennyi „hasznot" hajt az egyes bizottságokban. Természetesen a cél az összhaszon maximalizálása. Segítsünk Mutyi bácsinak! Írjunk fel egy ILP feladatot, amelynek megoldása választ ad a dilemmára. Állapítsuk meg, hogy a felírt ILP probléma optimális megoldása bizonyosan optimális megoldása lesz-e az egészértékűségi kikötések elhagyásával kapott LP problémának is.

   Készítsünk el egy G páros gráfot, melynek csúcsai Mutyi bátyánk barátai illetve a kérdéses felügyelőbizottságok, az élek pedig a lehetséges kinevezéseket jelentik. Minden $e = uv$ élhez adott egy $x(e)$ változó, melynek értéke attól függően 1 ill. 0, hogy az u barátot kinevezik-e a v pozícióra vagy sem. Ugyanezen e élhez tartozik egy $c(e)$ szám is, ami a kinevezés esetén adódó profitot jelent. (2 pont)
   A feladatban szereplő feltételek az alábbi ILP problémát határozzák meg:

$$\begin{aligned} \max c \cdot x \quad & \text{ha } \mathbf{0} \leq x \in \mathbb{R}^{E(G)} \\ x(e) \in \mathbb{Z} \quad & \forall e \in E(G) \\ x(e) \leq 1 \quad & \forall e \in E(G) \\ \sum_v x(uv) = 2 \quad & \text{minden } u \text{ barátra} \\ \sum_u x(uv) \leq 3 \quad & \text{minden } v \text{ bizottságra} \end{aligned}$$

   (3 pont)
   Az fenti ILP-ben az együtthatómátrix egy egységmátrixból és a G páros gráf incidenciamátrixából áll. (1 pont)
   Az órán tanultuk, hogy páros gráf incidenciamátrixa TU tulajdonságú, továbbá, hogy egy TU mátrixot egyetlen egyes kivételével nullákat tartalmzó sorokkal kiegészitve TU mátrixot kapunk. (1 pont)
   A TU mátrixokról tanultak szerint a kérdezett LP feladatnak bármely c célfüggvényhez tartozó optimális megoldásai között van olyan, melynek minden koordinátája egész, (2 pont)
   ezért a feladat kérdésere igenlő a válasz: az ILP feladat tetszőleges optimális megoldása egyúttal optimuma a relaxált LP feladatnak is. (1 pont)

---

2. Legyen $\mathcal{M} = (E, \mathcal{F})$ egy független halmazaival megadott tetszőleges matroid, k pedig nemnegatív egész. Alkossák az $\mathcal{F}^k$ halmazrendszert az E alaphalmaz mindazon részhalmazai, amelyekből elhagyható legfeljebb k elem úgy, hogy egy $\mathcal{F}$-beli halmazt kapjunk. Igaz-e, hogy $(E, \mathcal{F}^k)$ bizonyosan matroid?

   A függetlenségi axiomák teljesülését kell ellenőrizni az $\mathcal{F}^k$ rendszerre. (1 pont)
   Az (F1) axiomából $\emptyset \in \mathcal{F}$, ezért $\emptyset \in \mathcal{F}^k$ is teljesül $\mathcal{F}^k$ definíciója miatt. (2 pont)
   Tegyük fel most, hogy $X \subseteq Y \in \mathcal{F}^k$. Az $\mathcal{F}^k$ definíciója miatt létezik egy $Z \subseteq Y$ halmaz, amire az teljesül, hogy $|Z| \leq k$ és $Y \setminus Z \in \mathcal{F}$. Mivel $X \setminus Z \subseteq Y \setminus Z \in \mathcal{F}$, ezért az $\mathcal{F}$ rendszerre fennálló (F2)

axioma miatt $X \setminus Z \in \mathcal{F}$. is teljesül. Mivel $|Z| \leq k$, ezért legfeljebb k elem elhagyásával X-ből az $\mathcal{M}$ egy függetlenjét kaphatjuk, vagyis (F2) is teljesül $\mathcal{F}^k$-ra. (3 pont)
(F3) ellenőrséséhez tegyük fel, hogy $X, Y \in \mathcal{F}^k$ és $|X| < |Y|$. Az $\mathcal{F}^k$ definíciója miatt léteziknek olyan, legfeljebb k méretű A és B halmazok, amelyre $X' := X \setminus A$ és $Y' := Y \setminus B$ az $\mathcal{M}$ független halmazai. Ha az A halmaz választható k-nál szigorúan kisebb méretűnek, akkor $Y \setminus X$ tetszőleges e elemére $X \cup \{e\} \in \mathcal{F}^k$ teljesül. Ha pedig az A halmaz mindenképpen k elemű, akkor az X' és Y' olyan $\mathcal{F}$-beli függetlenek, amelyre $|X'| < |Y'|$ teljesül, így a $\mathcal{F}$ rendszerre fennálló (F3) axioma miatt van olyan $e \in Y' \setminus X'$, amelyre $X' \cup \{e\} \in \mathcal{F}$ áll. Ám ekkor $e \notin A$ az A tett feltevés miatt, vagyis ekkor $e \in Y \setminus X$, továbbá $X \cup \{e\} \in F^k$ is fennáll, hiszen $(X \cup \{e\}) \setminus A = (X \setminus A) \cup \{e\}$. (3 pont)
Azt kaptuk, hogy $\mathcal{F}^k$-ra teljesül mindhárom függetlenségi axioma, tehát $(E, \mathcal{F}^k)$ minden $\mathcal{M}$ és minden k esetén matroid. (1 pont)

---

3. A jobb oldalon látható mátrix oszlopainak súlya (balról jobbra halava) rendre $3, 7, 5, 13, 11$ és 2. Találjunk egy olyan lineárisan független részhalmazát e mátrix oszlopainak, melynek összsúlya a lehető legnagyobb.

$$\begin{pmatrix} 6 & 7 & -5 & 3 & 9 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & -3 & -2 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

Az órán azt tanították, hogy a mátrix oszlopai matroidot alkotnak a lineáris függetlenségre, (1 pont) ezért a keresett maximális súlyú független halmaz (ugyancsak az órán tanultak szerint) megtalálható a mohó algoritmussal, amely csökkenő súlysorrendben dönt arról, hogy a soron következő elemet beveszi-e az elkészített független halmazba. (1 pont)
Az is elhangzott, hogy a mátrixon végrehajtott elemi sorekvivalens átalakítás nem befolyásolja az oszlopok meghatározta matroidot. (1 pont)
Ezért felírjuk azt a mátrixot, amelyet a feladatban megadott mátrixból az oszlopok csökkenő súlysorrendbe rendezésével kapunk, majd ezt elemi sorekvivalens átalakítások segítségével lépcsős alakra hozzuk. (1 pont)
Lásuk:

$$\begin{array}{rrrrrr}
\boxed{4} & \boxed{5} & \boxed{2} & \boxed{3} & \boxed{1} & \boxed{6} \\
\hline
3 & 9 & 7 & -5 & 6 & 1 \\
1 & 3 & 2 & -1 & 2 & 0 \\
-2 & -6 & -1 & -3 & -4 & 0 \\
\hline
1 & 3 & 2 & -1 & 2 & 0 \\
3 & 9 & 7 & -5 & 6 & 1 \\
-2 & -6 & -1 & -3 & -4 & 0 \\
\hline
1 & 3 & 2 & -1 & 2 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 3 & -5 & 0 & 0 \\
\hline
1 & 3 & 2 & -1 & 2 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\
\hline
\end{array}$$

(3 pont)

A kapott mátrixból kell balról jobbra haladva mohó algoritmussal kiválasztani a független oszlopokat. Ahogy a gyakorlaton is láttuk, pontosan a vezéregyest tartalmazó oszlopokat fogjuk választani, (2 pont)
a válasz tehát, hogy a maximális összsúlyú lineárisan független rendszert a feladatban megadott mátrix második, harmadik és negyedik oszlopai alkotják. (1 pont)

Aki a válaszban a permutált mátrix oszlopairól beszél, és a válasz az első, második és negyedik oszlop, az az utolsó pontot nem kapja meg.