1. Vizsgazárthelyi megoldásokkal

2006/07 A3

1. Oldjuk meg az $y(x)' + y(x) = e^x$, $y(0) = 1$ kezdeti érték problémát Laplace-transzformációval!

MO. $Y \triangleq L(y)$, $y(0) = 1$, $y' + y = e^x \rightsquigarrow sY - 1 + Y = \frac{1}{s-1} \rightsquigarrow Y(s+1) = \frac{1}{s-1} + 1 \rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow Y = \frac{s}{(s-1)(s+1)}$. Ezt kell parciális törtekre bontani: $\frac{s}{(s-1)(s+1)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+1} =$

$= \frac{A(s+1) + B(s-1)}{(s-1)(s+1)} \rightsquigarrow s = A(s+1) + B(s-1) \underset{s=-1}{\rightsquigarrow} -1 = -2B \rightsquigarrow B = \frac{1}{2}$ és ($s = 1$-el)

$2A = 1 \rightsquigarrow A = \frac{1}{2} \rightsquigarrow Y = \frac{1}{2}\frac{1}{s-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+1} \rightsquigarrow y(x) = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x} \rightsquigarrow y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x$.

---

2. Adja meg azt az $x \mapsto y(x)$ függvényt, mely kielégíti az $x^3\,dx + y^3\,dy = 0$, $y(0) = -2$ kezdeti érték problémát!

MO. $g(x,y) = x^3$, $h(x,y) = y^3$, $g_y = 0 = h_x$, továbbá g és h az egész síkon, azaz egy egyszeresen összefüggő tartományon értelmezett, tehát a diff. egyenlet egzakt.

$F_x = g(x,y) = x^3$, $F_y = h(x,y) = y^3 \rightsquigarrow F = x^4/4 + c(y) \rightsquigarrow c'(y) = F_y = y^3 \rightsquigarrow c(y) = y^4/4 \rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow F = x^4/4 + y^4/4 \rightsquigarrow x^4/4 + y^4/4 = c$. Ennek $y = y(x)$ megoldásai az általános megoldás. A kezdeti érték problémához: $y(0) = -2$, $0^4/4 + y(0)^4/4 = c \rightsquigarrow c = 4 \rightsquigarrow x^4/4 + y^4/4 = 4 \rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow x^4 + y^4 = 16$, $y \le 0 \rightsquigarrow y(x) = -\sqrt[4]{16 - x^4}$, $x \in (-2, 2)$.

---

3. Legyen H az a háromszögvonal, melynek csúcsai (ilyen irányítással) a (3,0,0), (0,2,0), (-1,0,0) pontok az [x,y] síkban. Legyen $v(x,y,z) = (x^2 - 3y, y^2 + 5x, 0)$ egy vektor-vektor függvény. Számítsuk ki v vonalmenti integrálját H-n!

MO. $\operatorname{rot} v = (\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y})k = (5+3)k = 8k$, így Stokes-tétellel ($F$ a H által bezárt háromszöglap):

$\int_H v\,dr = \int_F \operatorname{rot} v\,df = \int_F 8\,k\,df = \int_F 8\,|df| = 8\int_F |df| = 8|F| = 8 \cdot 4 = 32$, mert $|F| = 4$ a háromszöglap területe.

(A jelölések: k a z irányú egységvektor, $\int_F v\,df$ a v felületmenti, $\int_F v\,|df|$ a v felszín szerinti integrálja. Felhasználtuk, hogy $\int_F v\,df = \int_F v_n\,|df|$, ahol v_n a v-nek a felületi normálisra eső vetülete.)

---

4. Legyen $f(x,y) = x|x| + jy|y|$. Állapítsa meg, hogy az origóban:

a) fennállnak-e a Cauchy–Riemann-differenciálegyenletek b) deriválható-e az f függvény!

MO. a) Igen: legyen $u(x,y) = x|x|$, $v(x,y) = y|y|$. $u_x(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{u(x,0) - 0}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x|x| - 0}{x} = \lim_{x\to 0}|x| = 0$ és ugyanígy $v_y(0,0) = 0$ és $u(0,y) = v(x,0) = 0 \rightsquigarrow u_y(0,0) = v_x(0,0) = 0$. **b)** Igen: u és v totálisan deriválhatóak, hiszen $\left|\frac{u(x,y) - (0,0)\cdot(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \left|\frac{x|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \le \left|\frac{x|x|}{\sqrt{x^2}}\right| = \left|\frac{x|x|}{|x|}\right| = |x| \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ és persze v analóg.

---

5. Számítsa ki az $f(z) = \frac{z^3}{z-4}$ függvény 100. deriváltját az origóban!

MO. Az $f(z) = \frac{z^3}{z-4}$ függvény origó körüli Taylor-sora: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n = f(z) = \frac{z^3}{z-4} =$

$= -\frac{z^3}{4-z} = -\frac{1}{4}\cdot\frac{z^3}{1-\frac{z}{4}} = -\frac{z^3}{4}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{4}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} z^{n+3}4^{-(n+1)} = -\sum_{n=3}^{\infty} z^n 4^{-n+2} \rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow \frac{f^{(100)}(0)}{100!}z^{100} = -4^{-98}z^{100} \rightsquigarrow f^{(100)}(0) = -4^{-98}\,100!$

6.

(a) Mit nevezünk egy differenciálegyenlet általános megoldásának?

(b) Adja meg a forrássűrűség/divergencia definícióját!

(c) Mondja ki a residuumtételt!

MO. (a) Az összes megoldást.

(b) Ha a $\lim_{k\to\infty}\frac{1}{|V_k|}\int_{F_k} v\,df$ határérték létezik és azonos minden az r_0-ra zsugorodó $(V_k)_{k=1}^{\infty}$ térrésszsorozat esetén, ahol V_k mérhető és térfogata $|V_k|$, F_k pedig az V_k kifele irányított mérhető felszínű határa, akkor ezt a v függvény r_0-beli forrássűrűségének nevezzük.

(c) Ha f reguláris az L rektifikálható/sima zárt egyszerű görbén és annak belsejében az $(a_i)_{i=1}^{n}$ pontok kivételével, melyek az L belsejébe esnek, akkor $\int_L f(z)\,dz = 2\pi j\sum_{i=1}^{n}\operatorname{res}_{z=a_i} f(z)$, ahol L irányítása pozitív.