

Sztochasztika 2 félév vizsga

Felsőbb matematika informatikusoknak D

2014. június 19. 8:15. Munkaidő: 70 perc. Minden feladat $6\frac{1}{4}$ pontot ér.

1. Az X nemnegatív egész értékű valószínűségi változó generátorfüggvénye

$$g(z) = \frac{8 + 6z + 4z^2 + 3z^3 + 3z^4}{24}.$$

- a.) Mennyi X várható értéke?
- b.) Mennyi a $\mathbb{P}(X = 0)$ valószínűség?
- c.) Mennyi a $\mathbb{P}(X = 4)$ valószínűség?
2. Móricka az írásbeli vizsgán kapkod: egy feladattal 3 perc várható értékű, exponenciális eloszlású, az előzményektől független véletlen időt tölt, majd $\frac{2}{3}$ valószínűséggel a következő feladatra ugrik, $\frac{1}{3}$ valószínűséggel pedig az előzőre. Kivétel ez alól, ha már az utolsó feladatnál jár, mert akkor biztosan az előzőre ugrik, vagy ha az elsőnél jár, mert akkor biztosan a másodikra. A vizsgán 4 feladat van, és Móricka a munkát az elsővel kezdi.
- Jelöljük $X(t)$ -vel azt, hogy t perc elteltével Móricka éppen melyik feladattal foglalkozik.
- a.) Adjuk meg az $X(t)$ folytonos idejű Markov lánc állapotterét, gráf-reprezentációját és infinitezimális generátorát!
- b.) Közelítőleg mennyi a valószínűsége, hogy Móricka 70 perc elteltével éppen a 4-es feladattal foglalkozik? Miért?
- c.) Hosszú távon az idő mekkora hányadát tölti Móricka az 1-es feladattal? Miért?
3. A Pistikét egy éjszaka alatt megcsípő szúnyogok száma Poisson eloszlású valószínűségi változó, számunkra ismeretlen λ paraméterrel. Az egyes éjszakákon a csípések száma független a korábbi éjszakák csípésszámától. Néhány reggelen az anyukája megszámolta Pistikén a friss csípéseket, és a következő számokat kapta: 5; 9; 11; 9; 11; 11; 13; 9; 9; 8; 8. Adjunk maximum likelihood becslést a λ paraméter értékére!
4. A 10 kilogrammos kiszerezésű útszóró só egy zsákjába ténylegesen bekerülő só tömege normális eloszlású valószínűségi változó, általunk és a fogyasztóvédelmi hatóság által sem ismert várható értékkel és szórással. A fogyasztóvédelmi hatóság mintát vett a termékből, megmérte a tömegeket, és a következő értékeket kapta (kg-ban): 10.1; 9.8; 9.7; 10.4; 10.1; 10.2; 9.7; 10.0; 9.9; 10.2. Vizsgáljuk meg 95%-os szinten a gyártónak azt az állítását, mint hipotézist, hogy a várható érték legalább 10.

Segítség: Az adatsor elemeinek összege 100.1, négyzeteik összege 1002.49.