

értékű folytonos függvény,
 tartományon x eleget tesz a $Bx = g$
 peremfeltételnek, ahol
 B a $C^m(\bar{G}, \mathbb{R}^m)$ nalan lineáris
 térben létezőt lin. operátor g ennek
 a térnek eleme, és nem függ csak a
 peremfkt. értékeitől, azaz $Bx = 0$, ha
 x nulla $\bar{G}$ négy pontján... (?)

$$G =]a, b[, \quad \bar{G} = [a, b]$$

$$C^m(\bar{G}, \mathbb{R}^m) \quad x: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$$

x m -szer folytonosan differenciálható

$$\|x\|_m = \|x\|_{\text{sup}} + \|\dot{x}\|_{\text{sup}} + \dots + \|x^{(m)}\|_{\text{sup}}$$

$$x(a) = 2, \quad x(b) = 5 \quad \} \text{ ez egy jó peremfeltétel}$$

- amit peremfkt. vessz. az elég kicsi.

λ - való, hogy lin. legyen

Tétel Tegyük fel, hogy x -nek S -ben
 lokális minimuma, azaz $\tilde{x} \in M$
 létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha

$$\|x - \tilde{x}\|_m < \delta \text{ akkor } S(x) \leq S(\tilde{x}), \text{ ahol } \tilde{x} \text{ is megeng.}$$

$$\text{Jf. } L \in C^1(Q)$$

Ekkor teljesül az Euler-Lagrange differenciálegyenlet

$$L_x(t, x(t), \dot{x}(t) \dots x^{(m)}(t)) - \frac{d}{dt} \left(L_{x'}(t, x(t), \dot{x}(t) \dots x^{(m)}(t)) - \frac{d}{dt} (L_{x''}(t, x(t), \dot{x}(t) \dots x^{(m)}(t)) - \dots - \frac{d}{dt} L_{x^{(m)}}(t, x(t), \dots x^{(m)}(t)) \right) = 0$$

↑
x' deriváltja
deriv

$$\boxed{L_x - \frac{d}{dt} \left(L_{x'} - \frac{d}{dt} \left(\dots \right) \right) = 0}$$

Lagrange - feltétel

Q-ért. tart.

Ha L kétféle folyt. diffható, akkor

$$L \in C^2(Q)$$

$L_{x^{(m)}}, x^{(m)}(t, x(t) \dots x^{(m)}(t))$ bilineáris
formák pozitív szemidefinit
kvadrátikus forma mátrai

Hilbert tétele

Tegyük fel, hogy $L \in C^{(m+1)}(Q)$

és $L_{x^{(m)}}, x^{(m)}(t, x(t), \dots x^{(m)}(t))$

~~kvadrátikus~~ formával leírható
bilineáris

kvadrátikus forma parciális derivált
... $t \in G-u$.

Ekkor nem olyan korlátozott, + nekloggy
 x 2m - szer folytonosan differenciálható
 t - zen korlátozottan, és ott
 az Euler - Lagrange differenciál egyenl.
 egy 2m - ed rendű explicit
 differenciál egyenlettel ekvivalens.

Niagos Lagrange fv.

$L(t, x, x')$ → akkor niagos, ha
 valamelyik t^0 -l nem
 függ → lehet szer folyt. diff.

$m=1$, és $L \in C^2(Q)$

- ha L nem függ $x' - t^0$ -l, vagy
 lineáris x' -ben, akkor x -re
 egyenlet adódik.

$$L_x - \frac{d}{dt} L_{x'} = 0$$

$L_x(t, x(t)) = 0$ → ez x fv.-re
 egy egyenlet
 x' lin. fv.-re

$$L(t, x, x') = A(t, x)x' + B(t, x)$$

$$\begin{aligned}
 A_x(t, x)x' + B_x(t, x) &= \frac{d}{dt}(A(t, x)) = A_t(t, x(t)) + \\
 &+ A_x(t, x(t)) \cdot x'
 \end{aligned}$$

- ha L nem függ $x - t^0$ -l

$$\frac{d}{dt} L_{x'}(t, x'(t)) = 0$$

$$L_{x'}(t, x'(t)) = C$$

- ha L nem függ t -től és x'' folytonos

$$\frac{d}{dt} (L(x, x') - L_{x'}(x, x') x') = 0$$

$$L(x, x') - L_{x'}(x, x') x' = C$$

↑
a gáz. solész. nem ilyen, ez egy elsořrendű differenciál

$$\frac{d}{dt} (L(x, x') - L_{x'}(x, x') x') = L_x \cdot x' + L_{x'} x'' - L_{x'x} x' - L_{x'x'} x''$$

$$L_x - L_{x'x} x' - L_{x'x'} x'' = 0$$

Multi indexek:

term. szorzatokból áll. vektor

$$L = (L_1, \dots, L_k) \in \mathbb{K}^k$$

$$|L| = k_1 + k_2 + \dots + k_k \quad (\text{beorden. összeg})$$

$$L! = k_1! k_2! \dots k_k!$$

$$Z = (z_1, \dots, z_k) \in \mathbb{K}^k$$

$$Z^L = z_1^{k_1} z_2^{k_2} \dots z_k^{k_k}$$

$$P(Z) = \sum_{|L| \leq m} a_L Z^L$$

↑
~~Képlet~~ legfeljebb m -ed fokú polinom

Alud L egy $\dim$ n -es $\mathbb{R}^n$ -es
 nyílt Q részalmanak értelmezett
 folytonos f , és amelyre G kezdőit
 $Bu = g$, ahol $Bu \in C^m(\bar{G}, \mathbb{R}^m)$ -et
 egy $\dim$. $\mathbb{R}^n$ -ben leképezett

(?) neutráltan létezik

$M = S(u) \rightarrow$ lokális min.

$\leftarrow$ olyan f , melyre
 a tartomány $\mathbb{R}^n$ -ben
 (erősen) G - ∂G a f -
 a $\dim$ n -es $\mathbb{R}^n$ -ben

rögz. n -es $\mathbb{R}^n$ -ben azt jelenti hogy a tartomány
 nem rektifikálható.

Metrikus $\mathbb{R}^n$ -ben értelmezett normális
 ekkor f $\mathbb{R}^n$ -ben tartó

$$\text{spt}(f) = \{x : f(x) = \emptyset\}$$

$$K^m(G, \mathbb{R}^m)$$

$\uparrow$

G - u folytonosan differenciálhatóak
 és kompakt tartó

2011. 11. 05

$S(u) = \int_{\bar{G}} L(x, u(x), u'(x), \dots, u^{(m)}(x)) dx \rightarrow \text{loc. min}$
 funkcionál $\bar{G}$ u a megeng. f. halm. van.

Tétel: Tegyük fel, hogy $S(u)$ -nek u -ban
 lokális minimuma van M -en, azaz
 létezik $\delta > 0$, hogy $S(u) \leq S(\tilde{u})$
 minden $\tilde{u} \in M$, $\|u - \tilde{u}\| < \delta$ -ra.

Ekkor ha az $u \in C^{m+1}(\bar{G}, \mathbb{R}^n)$ és
 $L \in C^{m+1}(Q)$, akkor teljesül az
 Euler-Lagrange differenciálegyenlet

$$\sum_{|k| \leq m} (-1)^{|k|} \frac{\partial^k L}{\partial x_k} (x, u(x), u'(x), \dots, u^{(m)}(x)) = 0$$

~~derivált~~ $\frac{\partial}{\partial x_k}$
 derivált

vektorszerű parciális

Fontos, hogy $2m$ -szer derivált.

lokális min. igazolás,
 ellenpélda

Weierstrass példája

$$S(f) = \int_0^1 (x f'(x))^2 dx \geq 0$$

$$f(-1) = -1$$

$$f(1) = 1$$

$$f_u(x) = \frac{\arctg u x}{\arctg u}$$

→ ezek elég tesznek
 a perem feltételeknek

$$S(f_u) \rightarrow 0 \quad (u \rightarrow \infty) \text{ de sosem veszi fel a } 0\text{-át}$$

$$(0, \dots, 0)$$

$$(1, \dots, 0) \bar{z}_1$$

$$(0, 1, \dots, 0) \bar{z}_2$$

$$(2, 2, 0, \dots, 0) \bar{z}_1^2 \bar{z}_2^2$$

P egy polinom

$$P(\lambda) = \sum_{|\lambda| \leq m} a_\lambda \lambda^\lambda$$

$$\lambda^\lambda = \lambda_1^{\lambda_1} \lambda_2^{\lambda_2} \dots \lambda_k^{\lambda_k}$$

μ :

$$P(\bar{z}) = \bar{z}_1^2 + \bar{z}_2^2 + \dots + \bar{z}_k^2$$

$$P(\bar{z}) = A = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_k^2$$

Toll-dimenziós probléma

rögzített peremű probléma: $u, m, k \in \mathbb{N}^+$

$G \subset \mathbb{R}^k$ korlátos tartomány

Nemely

lehet pont-
gömb. ötv. ötv.

nyílt határ. és ötv. ötv.

Az M a megerősített $\bar{G}$ -re osztályozott
összes olyan $u \in C^m(\bar{G}, \mathbb{R}^n)$ függvényekből,
amelyekre a következő integrál
elvételezhető.

$$S(u) = \int_{\bar{G}} L(x, u(x), u'(x), \dots, u^{(m)}(x)) dx$$

Optimális irányítás

• Irányítási feladat

$t_0, t_1 > t_0$ változó időpont

$x: [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ állapot és } függvényként
 $w: [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^m$ vezérlés } tekint.

↑
 t_0 és t_1 -en előírt

- Jf. teljesül a következő vezérlési egyenlet:

$$\dot{x}(t) = a + \int_{t_0}^t f(t, x(t), w(t)) dt$$

- Teljesül egy

$g(t_1, x(t_1)) = 0$ alakú határfeltétel
a t_1 pontban

- $w(t) \in W$, ha $t \in [t_0, t_1]$ vezérlési kör.
(a vezérlés nem vehet ki a halmazból)

Az irányítási feladat:

az $\int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), w(t)) dt$ minimumát kell
keresni

az a vezérlési funkcionál

~~az~~ f az $[t_0, \infty[\times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ nyílt
illetve L

környezetét $\mathbb{R}^n$ -re illetve $\mathbb{R}$ -re képező

folytonosan differenciálható függvények

g a $[t_0, \infty[\times \mathbb{R}^n$ egy nyílt környezetét $\mathbb{R}^n$ -be képezik, C^1 folyt.

→ Az ismeretlen x függvény folyt.,
 w -nek véges sok skaláris helye van és
első fajúak.

$$x'(t) = f(t, x(t), w(t)) \quad x(t_0) = a$$

$$x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^t f(t, x(t), w(t)) dt$$

(ha differenciálható egyenlet van azt
másképp tudom vezetni)

→ Ha a négpont rögzített ($= \tilde{b}$), akkor

$$\tilde{x}(t) = t \text{ fr. bevezetése, } \tilde{x}(t) = \tilde{b}$$

$$\tilde{x}(t) = t_0 + \int_{t_0}^t dt$$

(plusz vezérlési ucsod.,
bágy bejött a
rögz. négpont)

Ha f vagy L függ x' -től, akkor

$$x'(t) = \tilde{w}(t) \text{ (új vezérlési változót}$$

vezeték be)

Ha még x'' is szerepel, akkor $x'(t) = \tilde{x}(t)$

új állapotváltozót vezeték be. Ezután

alkalmazhatom az előző tüköket

folymatosan differenciálható függvények

g a $[t_0, \infty[\times \mathbb{R}^n$ egy nyílt környezetét
 $\mathbb{R}^n$ -be képezik, C^1 folyt

→ Az ismeretlen x függvény folyt.,
munka véges sok skalardísi helpe van és
első fajta.

$$x'(t) = f(t, x(t), w(t)) \quad x(t_0) = a$$

$$x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^t f(t, x(t), w(t)) dt$$

(ha differenciálegyenlet nem az
ismeretlen x függvény)

→ Ha a négpont rögzített ($= \tilde{b}$), akkor

$$\tilde{x}(t) = t \text{ für. Nevezetese, } \tilde{x}(t) = \tilde{b}$$

$$\tilde{x}(t) = t_0 + \int_{t_0}^t dt$$

(plusz vezérlési ucsod.,
hogy bejűjön a
rögz. négpont)

Ha f vagy L függ x' -től, akkor

$$x'(t) = \tilde{w}(t) \text{ (új vezérlési változót
vezeték be)}$$

Ha még x'' is szerepel, akkor $x'(t) = \tilde{x}(t)$

új állapotváltozót vezeték be. Ezután

alkalmazható az előző trükköt

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), w(t)) dt = c \quad \text{feltétel esetén}$$

ig $\tilde{x}$ változó

$$\tilde{x}(t) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), w(t)) dt, \quad \tilde{x}(t_1) = c$$

$$h(t_1) = F(x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), w(t)) dt \rightarrow \text{minimális}$$

(Bolza-probléma)

$h(t_0) = F(a)$, emiatt az ekvivalens a következővel:

$$h(t_1) - h(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} h'(t) dt \rightarrow \text{minimális}$$

az azal ekvivalens, hogy:

$$\int_{t_0}^{t_1} \tilde{L}(t, x(t), w(t)) dt \rightarrow \text{minimális}$$

~~azaz~~

$$\tilde{L}(t, x, w) = F'(x) f(t, x, w) + L(t, x, w)$$

Pontyagin -féle maximumelv: x, w, t az előző pontban megfogalmazott irányítási feladatot megoldó, és $H(t, x, w, p, \lambda) := \mu f(t, x, w) - \lambda L(t, x, w)$.

Létezik olyan $\lambda \geq 0$ és $L \in \mathbb{R}^{m^*}$,

amelyek mellett nulla, és

μ függvény ami $\mu: [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^{m^*}$

m dimenz.
terek est.
lin. funk.
csúszók

~~$$H(t, x(t), u(t), p(t), \lambda) = \max$$~~
$$H(t, x(t), u(t), p(t), x) = \max_{w^* \in W} H(t, x(t), w^*, u(t), x)$$

a maximum of vesic. fl.

az optikailis ismétlés minden foly-

definite fəvərləyə olan $p_0: [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$

polytomas figgvenig, hogy w (are opt.

nevezés) minden folytonossági pontjában

$$p_0(t) = H(t, x(t), w(t), p(t), x) \text{ e's } p_0' = H_t$$

és a négyzetben helyesül a
"bűntudat" transzverzális feltevel

$$p_0(t_1) = L g_t(t_1, x(t_1))$$

$$H = p \cdot f - \lambda L$$

A 2 minuten
gymnastik problemlösen
mit D, es ha

new 0, also
velaptat 1-vel

Isapisolat a maximum problémával

$$x: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), x'(t)) dt \rightarrow \min.$$

$$t_0 = a \quad \tilde{x}(t) = t_0 + \int_{t_0}^t dt \quad \tilde{x}(t_1) = b \\ (\tilde{x}(t) \equiv t)$$

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t w(t) dt \quad x(t_1) = x_1$$

$$H(x, \tilde{x}, w, p, \tilde{p}) = p w + \tilde{p} (1 - x L(\tilde{x}, x, w))$$

ez lesz a Pontryagin fűle fű.

$$p' = -H_x = -x L_x \quad p(t_1) = -\lambda \quad \tilde{p}' = -H_{\tilde{x}} = -x L_{\tilde{x}}$$

megállási feltétel

$$\tilde{p}(t_1) = -\lambda$$

ez a
végigérték
el van írva

$$H(x(t), \tilde{x}(t), w(t), p(t), \tilde{p}(t)) =$$

$$= \max_{w^* \in W} H(x(t), \tilde{x}(t), w^*, p(t), \tilde{p}(t))$$

$$p_0(t) = H(\dots) \quad p_0' = H|_{t=0} \quad p_0(t_1) = 0 \\ p_0 = 0$$

$x = 1$ véla szűható

$$H_m(x(t), \tilde{x}(t), w(t), p(t), \tilde{p}(t)) = 0$$

↑

H_m szerinti deriváltja

$$p - L_w(\tilde{x}, x, w) = 0$$

$$p = L_{x'}(t, x, x')$$

$$p' = -L_x$$

$H_m = 0$ m egyenlet, w -re megoldjuk

$2n+1$ diff. egyenlet $(x, p, p_0) \rightarrow a + n$ kezdeti érték
+ $n+1$ egyenlet (transzverzális)

$$p(t_1) = -L_{x'}(t_1, x(t_1))$$

~~az~~ n feltétel p n db koordinátára

$$p_0(t_0) = L_{p_0}(t_0, x(t_0)) + 1 \text{ feltétel}$$

maximális $\rightarrow$ vez. $\rightarrow L_{u+1}$ d.e. $\rightarrow$

$\rightarrow 2n+1$ konstans $\rightarrow$ ezek vannak

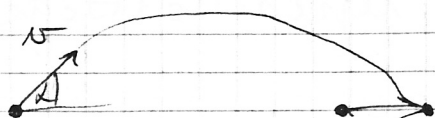
egyenletek, és kére!

elválasztás: megértes megköt. és d.e.
felírása

2011.11.07.

Léveildőzés módszere

- d.e. megoldás, és kezdeti és végfeltételek



$\rightarrow$ ide akarunk
előzni egy
d-gyíval

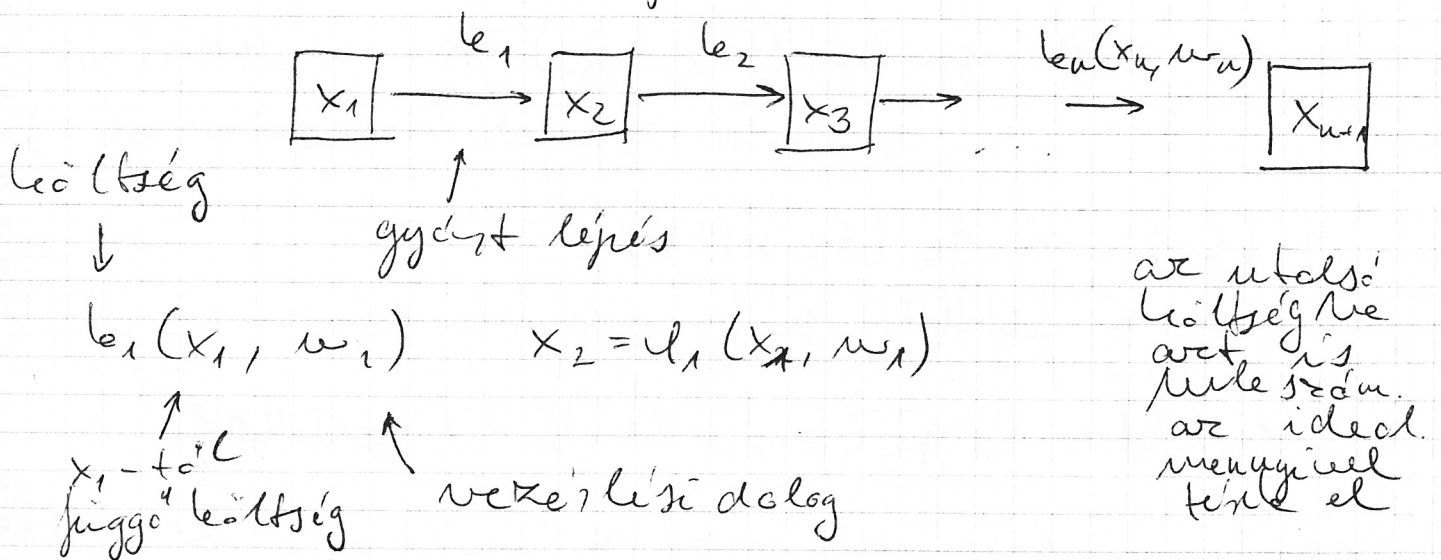
A kezdeti feltételek + $k \rightarrow$ d.e. megoldás

k változtatásával megkeressük azt a megoldást ami a végpontbeli feltételeket is kielégíti.

(ezzel kapunk egy numerik. módszert)

Diszkrét irányítási feladat

- egyértelmű eljárás, x_1 állapot van a rendszerünk (leírja mitől indulunk ki)



$$l_2(x_2, u_2) \quad x_3 = \varphi_2(x_2, u_2)$$

$$x_1 \in \mathbb{R}^N, u_1 \in U_1 \subset \mathbb{R}^M, l_1(x_1, u_1), x_1 = \varphi_1(x_1, u_1)$$

$$x_2 \in \mathbb{R}^N, u_2 \in U_2 \subset \mathbb{R}^M, l_1, l_2, \dots, l_n, \varphi_1, \dots, \varphi_n \text{ adott}$$

$$K_r(x_r, u_r, u_{r+1}, \dots, u_n) = \sum_{j=r}^n l_j(x_j, u_j)$$

az utolsó $n+1-r$ lépés költsége