Kalkulus

Sáfár Orsolya

Függvények határértéke, folytonossága

Környezet

Definíció: Legyen $a \in \mathbb{R}$ és $r > 0$ tetszőleges. Ekkor az a szám r sugarú környezete a $(a - r, a + r)$ intervallum, jele $K_r(a)$.

Köznapi nyelven megfogalmazva: Az r sugarú környezet az a-hoz r-nél is közelebb lévő számok.

Definíció: Legyen $a \in \mathbb{R}$ és $r > 0$ tetszőleges. Ekkor az a szám r sugarú kipontozott környezete a $(a - r, a) \cup (a, a + r)$ halmaz, jele $\dot{K}_r(a)$.

Másképpen: minden a-hoz r-nél közelebb lévő szám, kivéve magát a-t.

A torlódási pont

Definíció: Legyen $H \subset \mathbb{R}$ és $a \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Azt mondjuk, hogy az a szám a H halmaz torlódási pontja, ha $\forall r > 0$-ra $\dot{K}_r(a) \cap H \neq \emptyset$.

Másképpen megfogalmazva akkor lesz egy a szám egy H valós számokból álló halmaz torlódási pontja, ha H-nak tetszőlegesen közel van a-hoz eleme (de ez a közeli elem nem lehet maga a).

Példa: Az $H = [1, 2]$ intervallum torlódási pontja az $a = 1.5$ szám.

Példa 2: Az $H = (1, 2)$ intervallum torlódási pontja az $a = 2$ szám.

Példa 3: Az $H = (1, 2)$ intervallumnak nem torlódási pontja az $a = 2.000000000000000000000001$ szám.

Függvény határértéke

Definíció: Legyen $a \in \mathbb{R}$ az $f(x)$ függvény értelmezési tartományának, D_f-nek torlódási pontja. Azt mondjuk hogy az $f(x)$ függvény határértéke az a pontban a $A \in \mathbb{R}$ szám, ha $\forall \varepsilon > 0$-ra $\exists \delta > 0$ hogy ha $x \in D_f$ és $x \in \dot{K}_\delta(a)$ akkor $f(x) \in K_\varepsilon(A)$. Jele: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.

Környezetek helyett abszolút értékkel megfogalmazva a fenti definíciót:

Definíció (ugyanaz pepitában): Legyen $a \in \mathbb{R}$ az $f(x)$ függvény értelmezési tartományának, D_f-nek torlódási pontja. Azt mondjuk hogy az $f(x)$ függvény határértéke az a pontban a $A \in \mathbb{R}$ szám, ha $\forall \varepsilon > 0$-ra $\exists \delta > 0$ hogy ha $x \in D_f$ és $0 < |x - a| < \delta$ akkor $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Példa

Példa: Legyen $f(x) = \frac{|x|}{x}$. Ez a függvény az $x = 0$ kivételével mindenütt definiált, azaz $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Így a 0 D_f torlódási pontja, azaz vizsgálhatom, hogy van-e a függvénynek 0-ban határértéke.

Másrészt ha $a = 0$, akkor a függvény értékeknek közel kell esniük valamilyen fix A számhoz, ha 0-hoz közeli értékeket helyettesítek be f-be. Ez nem teljesül, mert a függvény 0-hoz tetszőlegesen közeli helyen felvesz 1-et (ha pozitív számot helyettesítek be), illetve -1-et, ha negatív számot. Így nem kerülök közel egyetlen rögzített A-hoz sem, azaz a függvénynek nincs határértéke 0-ban.

Példa

Példa 2: Legyen $f(x) = \frac{x^2}{x}$. Ez a függvény az $x = 0$ kivételével mindenütt definiált, azaz $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Így a 0 D_f torlódási pontja, azaz vizsgálhatom, hogy van-e a fv-nek 0-ban határértéke.

Másrészt ha $a = 0$, akkor a függvény értékeknek közel kell esniük valamilyen fix A számhoz, ha 0-hoz közeli értékeket helyettesítek be. Ez most teljesül, mert a függvény 0-hoz tetszőlegesen közeli is értelmezett, és $f(x) = x$ mindenütt, ha $x \neq 0$. Itt $a = 0$ és $A = 0$, így ha $0 < |x - a| < \delta$ ebben az esetben $0 < |x| < \delta$ és ha $\delta = \varepsilon$-t választok, akkor $|f(x) - A| = ||x| - 0| = |x|$ tényleg kisebb lesz ε-nál.

Példa

Példa 3: Legyen $f(x) = -2x + 4$. Igazoljuk definíció szerint, hogy $f(x)$ határértéke az 1 pontban 2!

Azt kell tehát belátnunk, hogy $|f(x) - 2| < \varepsilon$ valahányszor $0 < |x - 1| < \delta$. Nekünk kell megkeresnünk azt a δ mennyiséget, úgy, hogy ε értéke már ismert.

$$|f(x) - 2| = |-2x + 4 - 2| = |-2x + 2| = 2|x - 1|$$

Azt kaptunk tehát, hogy $|f(x) - 2| = 2|x - 1|$-nek kell kicsinek lennie, ε-nál is kisebbnek, ha $|x - 1|$ kicsi. Innen látszik, hogy a $\delta = \varepsilon/2$ jó választás lesz, hiszen ha $0 < |x - 1| < \frac{\varepsilon}{2}$, akkor $|f(x) - 2| < \varepsilon$.

A végtelen környezete

Definíció: Legyen $r > 0$ tetszőleges. Ekkor az ∞ r sugarú (kipontozott) környezete alatt az $\left(\frac{1}{r}, \infty\right)$ intervallumot értjük, jele: $K_r(\infty)$.

Köznapi nyelven megfogalmazva: ez a környezet az $\frac{1}{r}$-nél nagyobb lévő számok.

Definíció: Legyen $r > 0$ tetszőleges. Ekkor az $-\infty$ r sugarú (kipontozott) környezete alatt az $\left(-\infty, -\frac{1}{r}\right)$ intervallumot értjük, jele: $K_r(-\infty)$.

Függvény határértéke végtelenben

Definíció: Legyen $a = \infty$ az $f(x)$ függvény értelmezési tartományának, D_f-nek torlódási pontja. Azt mondjuk hogy az $f(x)$ függvény határértéke az a-ban a $A \in \mathbb{R}$ szám, ha $\forall \varepsilon > 0$-ra $\exists \delta > 0$ hogy ha $x \in D_f$ és $x \in \dot{K}_\delta(a)$ akkor $f(x) \in K_\varepsilon(A)$. Jele: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$.

Környezetek helyett abszolút értékkel megfogalmazva a fenti definíciót:

Definíció (ugyanaz pepitában): Legyen ∞ az $f(x)$ függvény értelmezési tartományának, D_f-nek torlódási pontja. Azt mondjuk hogy az $f(x)$ függvény határértéke a végtelenben a $A \in \mathbb{R}$ szám, ha $\forall \varepsilon > 0$-ra $\exists \frac{1}{\delta} > 0$ hogy ha $x \in D_f$ és $x > \frac{1}{\delta}$ akkor $|f(x) - A| < \varepsilon$.
(Szokás $\dfrac{1}{\delta}$ helyett P-t írni a könnyebb olvashatóság kedvéért.)

Példa

Példa: Igazoljuk, hogy az $f(x) = \dfrac{x^2+5}{3x^2+2}$ függvény határértéke végtelenben $\dfrac{1}{3}$!

$$\left| f(x) - \frac{1}{3} \right| = \left| \frac{3(x^2+5) - (3x^2+2)}{3(3x^2+2)} \right| = \frac{13}{9x^2+6}$$

Másrészt:

$$\frac{13}{9x^2+6} < \frac{13}{9x^2} = \frac{13}{9}\frac{1}{x^2} < \varepsilon,$$

ha $x > \sqrt{\dfrac{9\varepsilon}{13}}$. Így $P = \sqrt{\dfrac{9\varepsilon}{13}}$ jó választás.

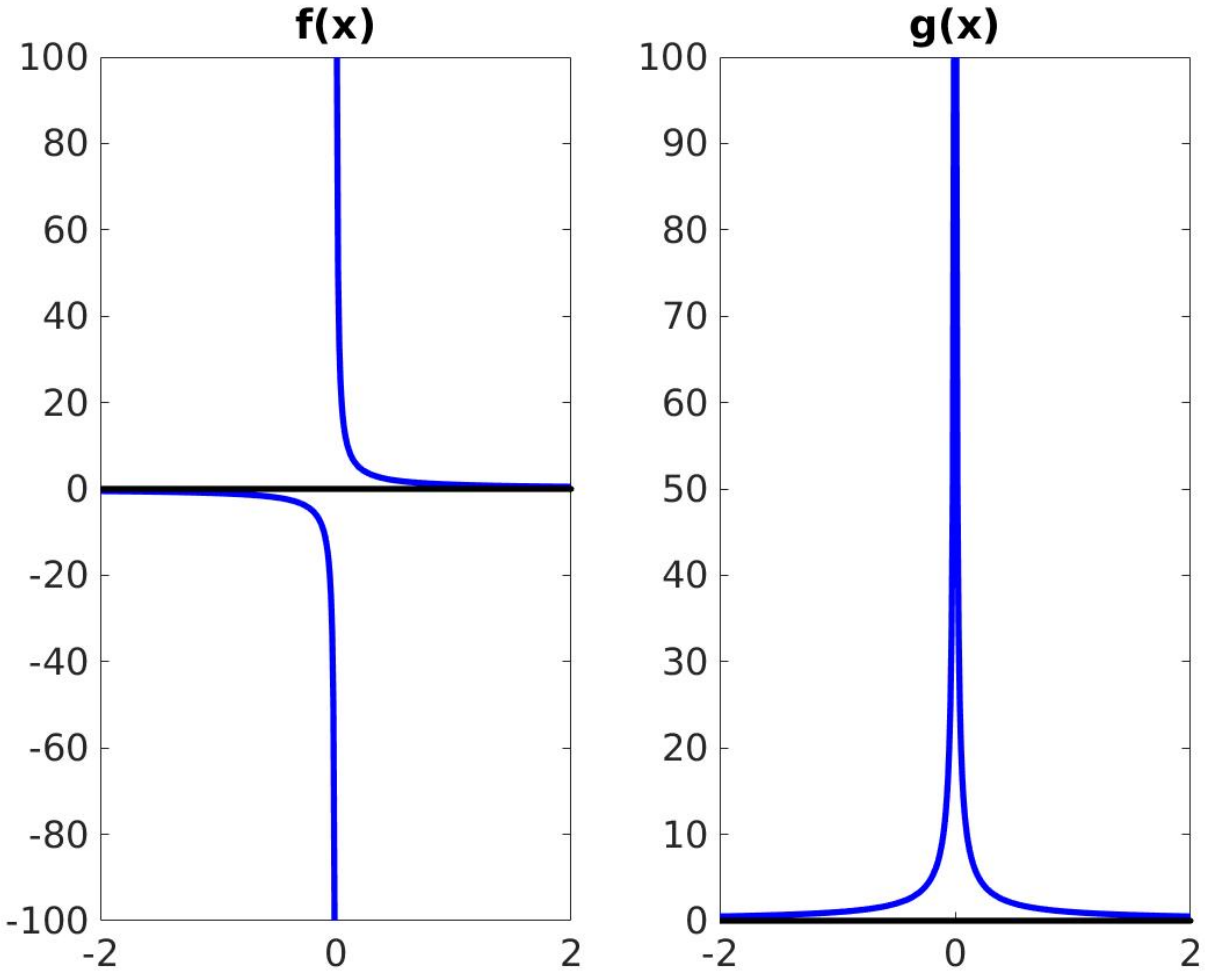
Példa

Próbáljuk meg kitalálni az eddigiek alapján, hogy mi lehet a $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \infty$ definíciója!

Definíció: Legyen $a = 1$ az $f(x)$ függvény értelmezési tartományának, D_f-nek torlódási pontja. Azt mondjuk hogy az $f(x)$ függvény határértéke az 1-ben ∞, ha $\forall \frac{1}{\varepsilon} > 0$-ra $\exists \delta > 0$ hogy ha $x \in D_f$ és $x \in \dot{K}_\delta(1)$ akkor $f(x) > \frac{1}{\varepsilon}$. (Itt is lehet $\frac{1}{\varepsilon}$ helyett $P > 0$-t írni.)

Példa

Tekintsük az $f(x) = \frac{1}{x}$ és a $g(x) = \frac{1}{|x|}$ függvényeket. Mi lehet a határértékük a 0-ban?



Jobboldali határérték

Noha $g(x)$-nek van határértéke 0-ban, $f(x)$-nek nincsen. Valójában teljesen másképp viselkedik a függvény a negatív számokra, mint a pozitívakra. Hogy jellemezni tudjuk $f(x)$ viselkedését bevezetjük a féloldali határérték fogalmát:

Definíció: Legyen $a \in \mathbb{R}$ az $f(x)$ függvény értelmezési tartományának, D_f-nek torlódási pontja. Azt mondjuk hogy az $f(x)$ függvény jobboldali határértéke az a pontban a $A \in \mathbb{R}$ szám, ha $\forall \varepsilon > 0$-ra $\exists \delta > 0$ hogy ha $x \in D_f$ és $0 < x - a < \delta$ akkor $f(x) \in K_\varepsilon(A)$. Jele: $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = A$.

A megfelelő definícióból látjuk, hogy $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = \infty$ és $\lim\limits_{x \to 0-} f(x) = -\infty$.

Átviteli elv

Egy függvény határértékék hasonlóan számíthatjuk ki, mint egy sorozatét. Sőt,

Átviteli elv: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ akkor és csakis akkor ha minden $(x_n) \subset D_f$ sorozatra, amelyre $x_n \neq a$ és $x_n \to a$ esetén $f(x_n) \to A$.

Ebben a tételben mind a mind A lehet tetszőleges valós szám, ∞ és $-\infty$ is.

Ennek az állításnak egyenes következménye, hogy a függvény határértéke egyértelmű, és minden művelet elvégezhető vele, ami a sorozatok határértékével elvégezhető volt.

Példa

Igazoljuk, hogy $\nexists \lim\limits_{x\to\infty} \sin(x)$!

Tekintsük az $x_n = n\pi$ sorozatot. Ezen sorozat mentén vizsgálva a függvényértékeket $f(x_n) = \sin(n\pi) = 0$. Azaz $f(x_n) \to 0$.

Vegyünk egy másik sorozatot, legyen $\tilde{x}_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$. Ekkor $f(\tilde{x}_n) = \sin(\frac{\pi}{2} + 2n\pi) = 1$. Emiatt ezen sorozat mentén $f(\tilde{x}_n) \to 1$.

A határérték egyértelmű, így minden végtelenhez tartó sorozat mentén a függvényértékeknek ugyanoda kellene tartaniuk. Mivel ez nem teljesül, ezért nem létezik határértéke $\sin(x)$-nek a végtelenben.

Folytonosság

Definíció: Azt mondjuk, hogy az $f(x)$ függvény folytonos az $a \in D_f$ pontban, ha $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$ és $f(a) = A$.

Ha $f(x)$ és $g(x)$ folytonos a-ban, akkor

- $f(x) + g(x)$,
- $f(x) - g(x)$,
- $f(x)g(x)$,
- Ha még $g(a) \neq 0$, akkor $f(x)/g(x)$

is folytonos a-ban.

Ezen túl folytonos függvény inverze is folytonos (ha létezik) az $f(a)$ pontban.

Ha $g(x)$ folytonos a-ban és $f(x)$ folytonos $g(a)$-ban, akkor $f(g(x))$ kompozíció is folytonos a-ban.

Nevezetes határértékek

Az alábbi függvény határértékek a sorozatok határértékéből következik átviteli elvvel és a függvények folytonosságának felhasználásával:

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$$

$$\lim_{x\to 0+} x^{x} = 1$$

Ha $p, c > 0$, $c \neq 1$ és $a > 1$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log_c x}{x^p} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^p}{a^x} = 0$$

Nevezetes határértékek - folyt.

Az alábbi függvény határértékek a sorozatok határértékéből következik átviteli elvvel és a függvények folytonosságának felhasználásával:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Nevezetes folytonos függvények

Nevezetes folytonos függvények ($n \in \mathbb{N}$) a teljes $\mathbb{R}$-en:

- x^n
- sin
- cos
- exp
- arctan
- $|x|$

Nevezetes folytonos függvények

Nevezetes folytonos függvények ($n \in \mathbb{N}$) a teljes értelezési tartományukon:

- $\log_a(x)$
- $\tan(x)$
- $\arcsin(x)$
- $\arccos(x)$
- $\sqrt[n]{x}$