Valószínűségszámítás vizsga
Műszaki informatikus BSc
2015. január 21.

1. Egy hibátlan érmével dobunk háromszor. Jelölje X illetve Y a dobott fejek illetve írások számát. Számolja ki $Z = XY$ várható értékét és szórását.
   Megoldás: $X \in B\left(3, \frac{1}{2}\right)$ és $Y = 3 - X$. Így $Z = 3X - X^2$.
   $\mathbf{P}(X=0) = \mathbf{P}(X=3) = \frac{1}{8}, \mathbf{P}(X=1) = \mathbf{P}(X=2) = \frac{3}{8}, \mathbf{E}X = \frac{3}{2}, \mathbf{E}X^2 = \frac{3}{4} + \frac{9}{4} = 3$
   $\mathbf{E}X^3 = 1 \cdot \frac{3}{8} + 8 \cdot \frac{3}{8} + 27 \cdot \frac{1}{8} = \frac{54}{8}, \mathbf{E}X^4 = 1 \cdot \frac{3}{8} + 16 \cdot \frac{3}{8} + 81 \cdot \frac{1}{8} = \frac{132}{8}$
   $\mathbf{E}Z = 3 \cdot \mathbf{E}X - \mathbf{E}X^2 = \frac{9}{2} - \frac{6}{2} = \frac{3}{2}, \mathbf{E}Z^2 = \mathbf{E}\left(9X^2 + X^4 - 6X^3\right) =$
   $= 9 \cdot \mathbf{E}X^2 + \mathbf{E}X^4 - 6 \cdot \mathbf{E}X^3 = 27 + 16,5 - 40,5 = 3 \Longrightarrow \boldsymbol{\sigma} Z = \frac{\sqrt{3}}{2}$

2. Egy kommunikációs csatorna 0 vagy 1 számjegyeket tud továbbítani. Sajnos a hálózati zavarok miatt minden számjegy továbbításába (egymástól függetlenül) 0,2 valószínűséggel hiba csúszik. Tegyük fel, hogy egy fontos egybites információt szeretnénk a csatornán átküldeni. Hogy a hiba esélyét csökkentsük, a 0 helyett 00000-t és az 1 helyett 11111-et küldünk, a vételi oldalon pedig " többségi értelmezést" alkalmazunk, azaz azt a számjegyet fogjuk venni, amelyikből több van a sorozatban. Mennyi a valószínűsége, hogy ilyen módon az adatátvitelbe hiba csúszik, azaz tévesen dekódolunk?
   Megoldás: Az információt hibásan kapjuk, ha az ötből legalább három bit megsérült. Ennek esélye:
   $\binom{5}{3} \cdot 0,2^3 \cdot 0,8^2 + \binom{5}{4} \cdot 0,2^4 \cdot 0,8 + \binom{5}{5} \cdot 0,2^5 \approx 0,058.$

3. Tekintsük a $[0,10]$ intervallumot, melyet három részre osztunk: $[0,3], [3,5]$ és $[5,10]$. Ha egymástól függetlenül véletlenszerűen kiválasztunk három pontot, mekkora valószínűséggel történik az meg, hogy a pontok közül 1-1-1 esik a három kiválasztott részbe?
   Megoldás: Legegyszerűbben a polinomiális eloszlással tudjuk ezt kiszámítani. Tekintsük a $Pol\left(3, \frac{3}{10}, \frac{2}{10}, \frac{5}{10}\right)$ polinomiális eloszlást! A keresett valószínűség a $p_{1,1,1}$ eloszlásértéknek felel meg, azaz $\frac{3!}{1!1!1!}\frac{3}{10} \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{5}{10} = \frac{180}{1000} = 0,18$

4. Legyenek $X, Y \in N(0,1)$ függetlenek és $T = \min\{X, Y\}$ és $W = \max\{X, Y\}$. Számolja ki a T és W *együttes* sűrűségfüggvényét!
   Megoldás: Felhasználjuk a $\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}\left(\bar{A}B\right)$ összefüggést:
   $\mathbf{P}(T < r, W < s) = \mathbf{P}(W < s) - \mathbf{P}(T \geq r, W < s) =$
   $= \mathbf{P}(X < s, Y < s) - \mathbf{P}(r \leq X < s, r \leq Y < s) = \Phi(s)^2 - (\Phi(s) - \Phi(r))^2;$
   Deriválva r és s szerint:
   $f_{T,W}(r,s) = 2\varphi(r)\varphi(s) = \frac{1}{\pi}e^{-\frac{r^2+s^2}{2}}, r \leq s.$

5. Tekintsük a $(0, \vartheta)$ intervallumon egyenletes eloszlású $X_1, X_2, ..., X_n$ statisztikai mintát, $\vartheta > 0$. Bizonyítsuk be, hogy a $T = \frac{n+1}{n} \cdot X_n^*$ statisztika a ϑ paraméter torzítatlan becslése. (A képletben $X_n^* = \max\{X_1, X_2, ..., X_n\}$, az n-edik rendezett minta-statisztika.)

Megoldás: Azt kell bizonyítani, hogy $\mathbf{E}T = \vartheta$. Az $U(0, \vartheta)$ eloszlás eloszlásfüggvénye és sűrűségfüggvénye:

$$F_\vartheta(x) = \begin{cases} 0 & , x \le 0 \\ \frac{x}{\vartheta} & , 0 < x < \vartheta \\ 1 & , x \ge \vartheta \end{cases} \quad , f_\vartheta(x) = \begin{cases} \frac{1}{\vartheta} & , 0 < x < \vartheta \\ 0 & , \text{különben} \end{cases}$$

Az $X_n^* = \max\limits_{i=1,\ldots,n} X_i$ rendezett minta statisztika eloszlásfüggvénye és sűrűségfüggvénye és várható értéke:

$$F_n^*(x) = \mathbf{P}(X_n^* < x) = [F_\vartheta(x)]^n = \begin{cases} 0 & , x \le 0 \\ \left(\frac{x}{\vartheta}\right)^n & , 0 < x < \vartheta \\ 1 & , x \ge \vartheta \end{cases}$$

$$f_n^*(x) = \begin{cases} n \cdot \frac{x^{n-1}}{\vartheta^n} & , 0 < x < \vartheta \\ 0 & , \text{különben} \end{cases}$$

$\mathbf{E}X_n^* = \int\limits_0^\vartheta x \cdot n \cdot \frac{x^{n-1}}{\vartheta^n} dx = \frac{n}{\vartheta^n} \int\limits_0^\vartheta x^n dx = \frac{n}{n+1}\vartheta$. Így $\mathbf{E}T = \frac{n+1}{n} \cdot \mathbf{E}X_n^* = \vartheta$.

6. Legyenek X_1, X_2, X_3 teljesen független normális eloszlású változók. Milyen eloszlást követnek az $Y = \frac{X_1}{\sqrt{\frac{X_2^2+X_3^2}{2}}}$, a $Z = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2$, és a $V = \frac{2X_1^2}{X_2^2+X_3^2}$ valószínűségi változók?
   Megoldás: Speciális, a normális eloszlásból származó eloszlásokat kapunk. Y 2 szabadságfokú Student- vagy t-eloszlású, Z 3 szabadságfokú χ^2-eloszlású, V pedig 1,2 szabadságfokú F- vagy Fisher eloszlású.