

A COULOMB TÖRVÉNY ÉS AZ ELEKTROMOS ERŐTÉR

Kétféle elektromosság van, pozitív és negatív. A különbség, úgy sejttem az, hogy az egyik kicsit drágább és tartósabb, a másik olcsóbb, de belemegy a moly.

STEPHEN LEACOCK, kanadai humorista
(Irodalmi Botlások 1910)

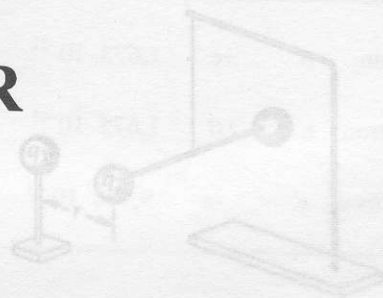
24.1 Bevezetés

Közismert az, hogy ha megfésüljük száraz hajunkat, a fésű feltöltődik, és papírdarabokat képes magához vonzani. A jelenség zavarba ejtő: a papírdarabok valahogyan megérik a feltöltött fésű jelenlétét anélkül, hogy érintkeznének vele. Mágneseknek van hasonló vonzó hatásuk vas- és acéltárgyakra.

Ezek a jelenségek régóta ismertek. Már a régi görögök felismerték, hogy ha borostyánkővet bizonyos anyagokkal megdörzsölnek, akkor a borostyán képes kis tárgyakat magához vonzani. Az *elektromosság* szavunk a borostyán szó régi görög megfelelőjéből ered. *Elektron*: egy fosszilizálódott gyantafajta, amely dörzsölés hatására feltöltődik. Manapság amikor atomokról beszélünk, akkor az elektron szó azokat a negatív töltéseket jelöli, amelyek az atommagokat körülveszik. Az elektromosságra vonatkozó ismeretünk bizonyos anyagok feltöltődésének felismerésével kezdődtek és az elektromos és mágneses jelenségeket elegánsan leíró Maxwell egyenletek megalkotásához vezettek (35. fejezet).

Számos kitűnő kutató hosszas erőfeszítésének köszönhető ennek a jelenségkörnek a feldolgozása. Csaknem 200 év telt el Newton *Principiájának* kiadása (1687) és James Clark Maxwell hasonlóan úttörő „*Treatise on Electricity and Magnetism*” című könyvének megjelenése között (1873). Noha ez a majdnem két évszázad hosszú időszaknak tűnik a fizika fejlődésében, ezalatt számos tudós küszködött az elektromágneses jelenségek értelmezésével, és számos nagyszerű megfigyelés történt, amellyel e kirakós játék egyes darabjait össze lehetett illeszteni. Maxwell zsenialitása kellett végül ahhoz, hogy az összes jelenséget egységes elmélet keretén belül lehessen értelmezni.

A fejlődés lassúságának talán az is oka lehetett, hogy a mechanikai és az elektromos jelenségek alapvetően különbözőek. A mechanikai jelenségek tanulmányozását nagyban elősegítették a köznapi tapasztalatok, amelyeket az emberek tárgyak mozgatásával és mozgásuk megfigyelésével szereztek. Az elektromágnesességgel kapcsolatban egyáltalán nem volt hasonló érzékszervi tapasztalat (kivéve ami a statikus elektromosságra és a mágnesekre vonatkozott). Az elektromágnesesség sokkal elvontabb és megfoghatatlanabb, mint a mindennapos megfigyeléseinkkel érzékelhető jelenségek. Továbbá, az elekt-

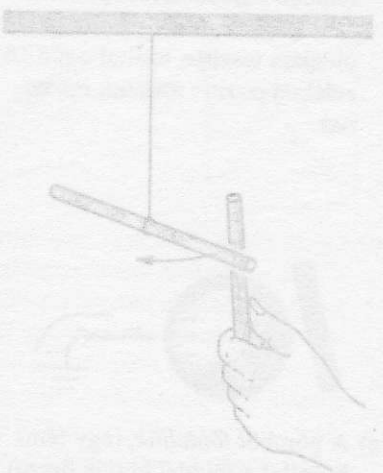


24-2 ábra

Torzión mérleg. A q_1 és q_2 töltések közötti kölcsönhatás miatt a vízszintes rúdról lelógó szál elcsavartodik. (Hasonlítsuk össze a 16-10 ábra gravitációs torziós ingájával.)



a) Amikor közelmérvél dörzsöltünk meg egy kéménygumi rúddal a szomszédos rúd magához vonzza a rúd megdörzsölt végét.



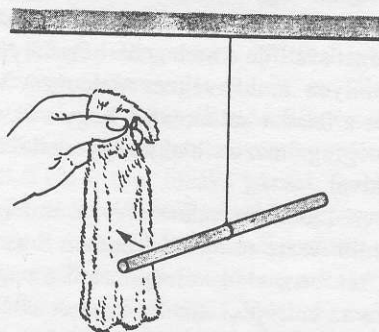
b) Két ilyen megdörzsölt rúd taszítja egymást.

24-1 ábra

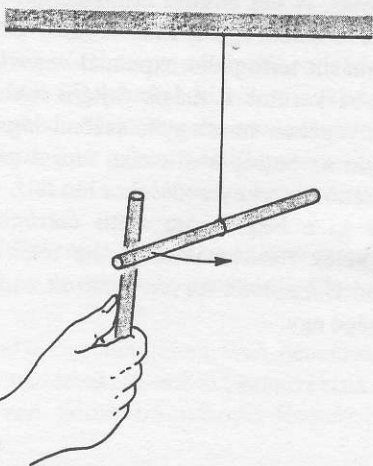
Az elektromos erők vonzóerők és taszítóerők lehetnek.

romos és mágneses kvalitatív kísérletek kivitelezése sokkal bonyolultabb, mint a mechanikai kísérleteké. Az elektromos erők olyan nagyok, hogy már kicsiny elektromos többlettöltés fellépte – valahol a mérőberendezésben – könnyen meghamisíthatja a kísérletet. Richard Feynman magyarázatát idézve, ha ketten karnyújtásnyira állnak egymástól és mindkét embernek mindössze 1%-nyival több elektrontól állna a teste, mint protonból, kettejük között olyan taszítóerő lépne fel, amekkorával a Földünkével azonos tömegű testet lehetne felemelni.

Az elektromos erők mindenütt jelen vannak körülöttünk. Az ún. „közelre ható erők” mindegyike, azok tehát, amelyekről Newton harmadik törvénye szól, (egyenlő nagyságú, de ellentétes irányú erők), például a láncszemek közötti erő, a ceruzahegy és a papír közötti erő, az út és az autógumi közötti erő, végső soron elektromos eredetű. Minden ilyen természetű erő elektromos töltések közötti vonzáson, illetve taszításon alapul. Az elektromosság és mágnesesség tárgyalását olyan erők tanulmányozásával kezdjük, amelyek elektromos töltéssel rendelkező, egymáshoz képest nyugalomban levő testek között lépnek fel. Az elektromos jelenségek e csoportját az **elektrosztatika** tárgyalja.



- a) Amikor szőrmével dörzsölünk meg egy keménygumi rudat, a szőrmedarab magához vonzza a rúd megdörzsölt végét.



- b) Két ilyen megdörzsölt rúd taszítja egymást.

24-1 ábra

Az elektromos erők vonzóerők és taszítóerők lehetnek.

24.2 Elektrosztatikus erők

Ha egy keménygumi (ebonit) rudat szőrmedarabbal dörzsölünk meg, a rúd új tulajdonságokat mutat. Például, könnyen magához vonz papírdarabokat, elhajlít egy vízugarat, anélkül, hogy hozzá érne. Mialatt dörzsöljük, a rúd megváltozik: azt mondjuk, hogy a rúd *elektromossá* válik, *feltöltődik*, noha igazából nem értjük, mit is jelentenek ezek a kifejezések.

Néhány egyszerű kísérlet elvégzésével pontosítsuk fogalmainkat. Először is, fuggesszünk fel ebonitrudat cérnaszállal (24-1 ábra). Ha szőrmedarabot közelítünk a rúdhhoz, lényeges kölcsönhatást nem észlelhetünk. Ha azonban a szőrmedarabot és a rudat összedörzsöljük, a szőrmé magához vonzza a rudat még viszonylag nagyobb távolságból is. A fellépő vonzóerőt **elektrosztatikus erőnek** nevezzük és arra következtethetünk, hogy

Az elektrosztatikus erők (éppúgy, mint a gravitációs erők) vonzóerők lehetnek.

Most dörzsöljük meg egy másik ebonitrudat a szőrmével. Észrevehetjük, hogy ez a második rúd a felfüggesztett, és korábban szintén szőrmével megdörzsölt rudat taszítja. Arra következtethetünk, hogy

Az elektrosztatikus erők (a gravitációs erőkkel ellentétben) taszítóerők is lehetnek.

Mínt hogy a feltöltött tárgyak egymás érintése nélkül hatnak egymásra, arra is következtethetünk, hogy

Az elektrosztatikus erők (éppúgy, mint a gravitációs erők) az üres téren keresztül is hatnak.

Ugyanezt az eredményt kapnánk, ha a kísérleteket vákuumban végeztük volna el.

Newton gravitációs törvényének ismeretében meg tudjuk becsülni a rúd és a szőrmé között ható erőket és abból kvalitatíve arra következtethetünk, hogy

hogy az elektromosság sokkal erősebb és hatótávolságban sokkal nagyobb, mint a gravitáció. Továbbá, az elektrosztatikus erőkkel szemben a gravitációs erők mindig vonzóerők.

Az elektrosztatikus erők sokkal nagyobbak, mint a gravitációs erők.

Hogy a két feltöltött tárgy közötti kölcsönhatás természetét jobban megérthessük, célszerű a kísérleti berendezést továbbfejleszteni olyanná, mint amilyen a 24-2 ábrán látható. Az eszköz ahhoz a torziós ingához hasonló, mint amilyent Henry Cavendish (1731–1810) használt a gravitációs erők mérésére. A feltöltött tárgyak kicsiny gömbök, amelyeken q_1 és q_2 nagyságú elektromos töltés van. (Ebben az esetben a gömbök között ható gravitációs erők elhanyagolhatóan kicsinyek az elektromos erőkhez képest.) q_1 és q_2 numerikus értéke (amelyet később definiálunk) a tárgyak töltésére jellemző. Minthogy a gömbök kicsinyek, *pontszerű töltésnek* tekinthetők.

A töltések közötti erő úgy határozható meg, hogy megmérjük a forgatónyomatékokat, amely a felfüggesztő szál adott mértékű elcsavarásához szükséges. A gömbök közötti r távolság közvetlenül mérhető. Olyan méréssorozatot végezve, melyben mind a gömbök távolságát, mind pedig a gömbök töltését változtatjuk, arra a következtetésre jutunk, hogy *pontszerű töltések* esetében:

Az elektrosztatikus erők (éppúgy, mint a gravitációs erők) a távolság négyzetével fordítottan arányosak, azaz nagyságuk az $1/r^2$ függvény szerint változik. Röviden az ilyen törvényeket „reciprok négyzetes” törvénynek is nevezzük.

Az elektrosztatikus erők kölcsönösek, olyan értelemben, hogy Newton harmadik (hatás-ellenhatás) törvénye érvényes rájuk.

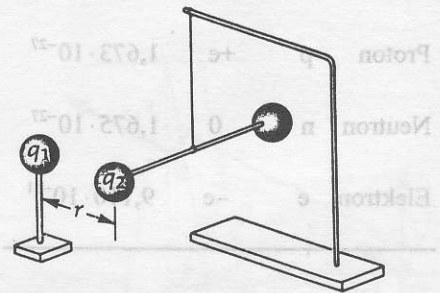
Az elektrosztatikus erő a kölcsönhatásban résztvevő *pontszerű* töltések szorzatával arányos.

Ezen megállapításaink tömör képletbe sűrítethetők össze: két, egymástól r távolságra lévő q_1 és q_2 *pontszerű* töltés között ható erőt az alábbi egyenlettel adhatjuk meg:

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (24-1)$$

ahol k egy arányossági tényező. Ezt az eredményt először 1785-ben közölte Charles Augustin de Coulomb francia fizikus, aki a fent leírthoz hasonló torziós mérleggel végezte kísérleteit.

Itt anélkül beszéltünk feltöltött tárgyról és töltésről, hogy valóban tudnánk, hogy a töltés micsoda. Az 1740-es években Benjamin Franklin úgy vélekedett, hogy a töltés olyan, mint egy folyadék, és minden objektum valamennyit tartalmaz belőle. Amikor üvegrudat dörzsölt meg selyemszövettel, úgy találta, hogy az üveg elektromossá vált és papírdarabokat vonzott magához. Franklin feltételezte, hogy a dörzsölés nem teremtett új töltéseket, hanem csak az „elektromos folyadékból” valamennyit átvitt a szövetről az üvegre, és így ezután az üvegnek a folyadékból többlete, a selyemnek azzal egyenlő hiánya lett. Franklin javasolta a pozitív és negatív előjelek használatát ezen különbség jellemzésére; ennek értelmében az üvegnek *pozitív töltése*, a selyemnek pedig azzal egyenlő nagyságú *negatív töltése* lett. Hasonlóképpen, a szőrmével dörzsölt keménygumi vagy műanyag rúd negatív töltésűvé válik, mialatt a szőrmé pozitív töltésű lesz. Igazából minden anyag többékevésbé feltöltődik, amikor más anyaggal dörzsölik. Franklin éppúgy választhatta volna a pozitív és negatív előjeleket ellenkező értelemben is: ma ugyanis már tudjuk, hogy a selyemkendővel megdörzsölt üvegrúd azért pozitív töltésű, mert valamennyi negatív töltésű elektron az üvegről átmegy a selyemre (és nem a pozitív töltések mozognak a selyemről az üvegre), tehát a tényleges töltésátvitel éppen ellenkezője annak, mint amit Franklin elmélete



24-2 ábra

Torziós mérleg. A q_1 és q_2 töltések közötti kölcsönhatás miatt a vízszintes rúdról lelógó szál elcsavarodik. (Hasonlítsuk össze a 16-10 ábra gravitációs torziós ingájával.)

24-1 táblázat

Részecske

neve jelölése töltése tömege(kg)

Proton p +e $1,673 \cdot 10^{-27}$ Neutron n 0 $1,675 \cdot 10^{-27}$ Elektron e -e $9,110 \cdot 10^{-31}$ 

állít. Franklin úgy gondolta, hogy az elektromos folyadék *megmaradó mennyiség*, vagyis a folyadék teljes mennyisége zárt rendszerben állandó. Noha a későbbiekben az ún. egyfolyadékos elméletéről kiderült, hogy hibás, a *töltésmegmaradás* a fizika egyik alapvető elvévé vált: nem ismerünk olyan kísérleti eredményt, amely nincs összhangban vele.

Modern szemléletünk szerint, az elektromos töltés az anyag egyik alapvető tulajdonsága. A semleges neutronokon kívül, az atomok pozitív töltésű protonokat és negatív töltésű elektronokat tartalmaznak. A negatív elektron töltésének nagysága pontosan egyenlő a pozitív protonéval (legalábbis a 10^{-22} relatív hibahatárú kísérletek szerint), noha a proton és az elektron tömege jelentősen különbözik egymástól (24-1 táblázat).

24.3 Vezetők és szigetelők

Célszerű az anyagokat aszerint osztályozni, hogy mennyire képesek az elektromos töltéseket vezetni. *Vezető* anyagban, az elektromos töltések szabadon mozoghatnak. A legtöbb fém elektromosan jó vezető, mert az atomok külső elektronjai, „a vezetési elektronok” könnyen mozoghatnak az anyagon keresztül, míg a pozitívan töltött atommagok helyhez kötöttek. Bizonyos folyadékokban és ionizált gázokban mind a pozitív, mind a negatív töltéshordozók képesek mozogni. Másfelől, az olyan anyagokat, mint az üveg, a fa, és a műanyagok, a *szigetelők* csoportjába soroljuk, ugyanis az elektromos töltések ezekben sokkal kevésbé mozgékonyak. Ha valamilyen módon töltést juttatunk egy szigetelő felületének bizonyos tartományára, az ott is marad. Tökéletes szigetelő nincs!; a legjobb szigetelő vezetőképessége kb. 10^{-25} -ödrésze a rézének, tehát az anyagok vezetőképességének tartománya viszonylag széles. A *félvezetők* (például szilícium és germánium) vezetőképessége e két szélső érték közötti: ezen anyagok vezetőképessége lényegesen megváltoztatható azáltal, hogy minimális mennyiségű (néhány milliomodrésznyi) más anyaggal szennyezzük őket.

Ha ebonitrudat vagy üvegrudat megdörzsölünk egy darab szőrmevel, illetve selyemmel, akkor a töltések azon a helyen maradnak, ahol képződtek. A feltöltött rudak papírdarabokat vonzanak magukhoz, ezzel bizonyítva, hogy össztöltésük nem zérus. Ellenkező a helyzet vezető anyagoknál: ha egy réz darabra vagy más vezető anyagra töltést juttatunk, a vezető anyag egyáltalán nem vonzza magához a papírdarabokat: a vezetőre juttatott elektronok kezünkön és testünkön keresztül azonnal a földre távoznak. (Ha a vezetőre pozitív töltéseket juttatnánk, azok a földben lévő negatív elektronokat testünkön keresztül azonnal magukhoz vonzanák és így történne meg a töltések semlegesítődése.) A föld ebből a szempontból úgy viselkedik, mint elektronok korlátlan kapacitású tára, amely gyakorlatilag korlátlan számú elektrontud elnyelni vagy kiadni magából. Ahhoz, hogy egy vezetőn töltéseket tudjunk tartani, a vezetőt el kell szigetelnünk a környezetétől. A 24-3 ábrán azt illusztráltuk, hogyan lehet egy tárgyat úgy feltölteni, hogy a „töltésszükség” (a feltöltött rúd) nem is érinti a feltöltendőt. Ezt az eljárást *megosztásos* feltöltésnek nevezzük.

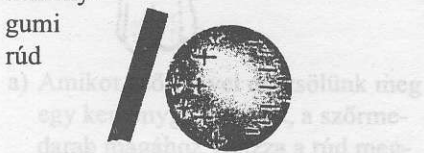
Bizonyos anyagokat szupravezetőknek nevezünk, ezek tökéletes vezetőkké válnak abban az értelemben, hogy bennük az elektronok mozgását akadályozó hatások megszűnnek. Szupravezetést először 4 K-re lehűtött fémeken figyeltek meg, de újabb kutatások szerint egyes fémötvözetek és keramikus anyagok ennél sokkal magasabb hőmérsékleten is szupravezetővé válnak. E szokatlan tulajdonság magyarázatát a kvantummechanika adja meg (28-10 ábra).

24-2 ábra
Törzsis mérték. A d és d' töltések közötti kölcsönhatás mint a vízszintes rúdól felőlről származó gravitációs törzsis ingásvál.

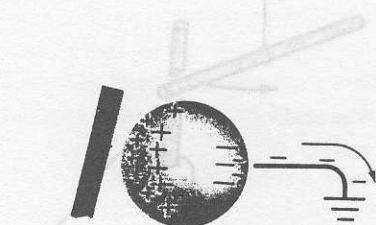


a) Semleges, elszigetelt fémgömb

töltött keménygumi rúd



b) Ha a negatívan töltött rudat a gömbhöz közelítjük, a rúd a fémbe szabadon mozgó elektronok egy részét a gömb másik oldalára taszítja, ezáltal a rúd közelében pozitív töltések maradnak.

c) A gömböt földeljük, (egy fémhuzallal a földdel kötjük össze), jelölése: \oplus . Az elektronokat a rúd elektronjai taszítják, és ezért a földre folynak.

24-3 ábra

Fémgömb feltöltése megosztással

24.4 A Coulomb törvény

A (24-1) képlet a két pontszerű töltés között ható erő reciprok négyzetes törvényét adja meg. Ahhoz, hogy a képlet alkalmas legyen kvantitatív alkalmazásra, definiálnunk kell a töltések egységét, és kísérletileg meg kell határozni a k arányossági tényezőt. Az SI mértékrendszerben a töltés egysége 1 coulomb (C). A töltésegységet definiálni lehetne ugyan a (24-1) képlet alapján is, ám kísérletileg egyszerűbb, és sokkal pontosabb, ha az 1 coulomb töltést úgy definiáljuk, hogy ez az a töltésmennyiség, amely egy áramvezető teljes keresztmetszetén 1 másodperc alatt áthalad, ha az áramerősség 1 amper. Viszont, az amper (A) két párhuzamos áramvezető között ható elektromágneses eredetű erő nagyságával definiáljuk. Erre a későbbiekben még visszatérünk (30. fejezet).

Egyetlen elektron töltését e elemi töltésnek nevezzük:

$$\text{AZ ELEKTRON TÖLTÉSÉNEK NAGYSÁGA} \quad e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C} \quad (24-2)$$

Ez a legkisebb töltés, amit valaha is észleltek: azonos nagyságú pozitív töltése van a protonnak.

A (24-1) képlet k együtthatójának értékét kísérletileg $8,99 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$ nagyságúnak találták: jó közelítéssel

$$k = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2} \quad (24-3)$$

Célszerű az arányossági tényezőt oly módon megadni, hogy tartalmazza a 4π tényezőt. Ennek az az előnye, hogy más, a Coulomb törvényénél gyakrabban alkalmazott egyenletekben a 4π tényező nem jelenik meg. Tehát, a k arányossági tényező a következő alakban fejezhető ki:

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

ahol ϵ_0 a vákuum áteresztő képessége, melynek numerikus értéke:

$$\text{VÁKUUM ÁTERESZTŐ KÉPESSÉGE} \quad \epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2} \quad (24-4)$$

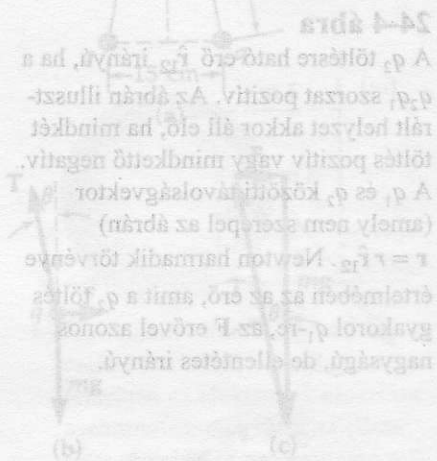
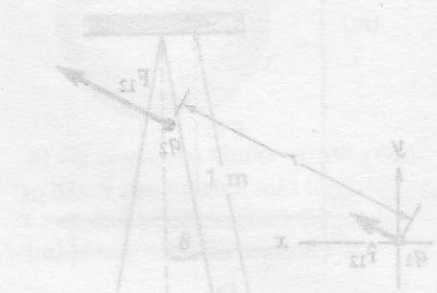
A Coulomb törvényt tehát (24-1) alapján a következő alakban adjuk meg:

$$\text{A COULOMB TÖRVÉNY} \quad F = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (24-5)$$

$$\text{vagy, SI egységekben} \quad F = \left(9 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2} \right) \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (24-6)$$

ahol q coulombban, r méterben adandó meg és F newtonban adódik.

Két pontszerű töltés között ható Coulomb erő Newton harmadik törvényének megfelelő (erő-ellenérő) kölcsönhatási erő: az egyik töltésre éppen ugyanakkora, de ellentétes irányú erő hat, mint a másikra. A Coulomb törvény vektoriális alakja a következő:



24-6 ábra A 24-1 példához



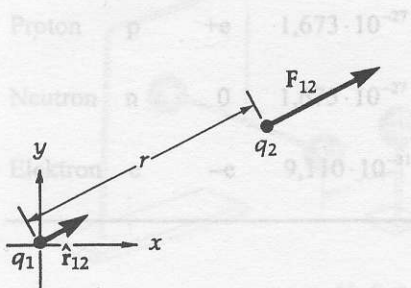
a) Egyszerű elektroszkóp, amit még a XVIII. században szerkesztettek, és még manapság is használatos töltések jelenlétének kimutatására. Két vékony fémlejtő fémrúd által csatolkozott egy fémgömbhöz. Ezt a szerkezetet szigetelt anyagból készített üvegpalánnyal egy üvegpáncélra teszik. Ha a fémgömbre töltést juttatunk, a töltés eloszlik a fémgömb és a lejtők között; ez utóbbiak azonos előjelű töltések miatt egymást taszítják.

24-5 ábra Az elektroszkóp

24-1 táblázat

Részecske

neve jelölése töltése tömege(kg)



24-4 ábra

A q_2 töltésre ható erő \hat{r}_{12} irányú, ha a $q_2 q_1$ szorzat pozitív. Az ábrán illusztrált helyzet akkor áll elő, ha mindkét töltés pozitív vagy mindkettő negatív. A q_1 és q_2 közötti távolságvektor (amely nem szerepel az ábrán) $\mathbf{r} = r \hat{r}_{12}$. Newton harmadik törvénye értelmében az az erő, amit a q_2 töltés gyakorol q_1 -re, az \mathbf{F} erővel azonos nagyságú, de ellentétes irányú.



a) Egyszerű elektroszkóp, amit még a XVIII. században szerkesztettek, és még manapság is használatos töltések jelenlétének kimutatására. Két vékony fémfólia fémrúd által csatlakozik egy fémgömbhöz. Ezt a szerkezetet szigetelő anyagból készített dugóval egy üvegbúra alá tesszük. Ha a fémgömbre töltést juttatunk, a töltés eloszlik a fémgömb és a fóliák között; ez utóbbiak, azonos előjelű töltéseik miatt, egymást taszítják.

24-5 ábra

Az elektroszkóp

A COULOMB TÖRVÉNY VEKTORIÁLIS ALAKJA

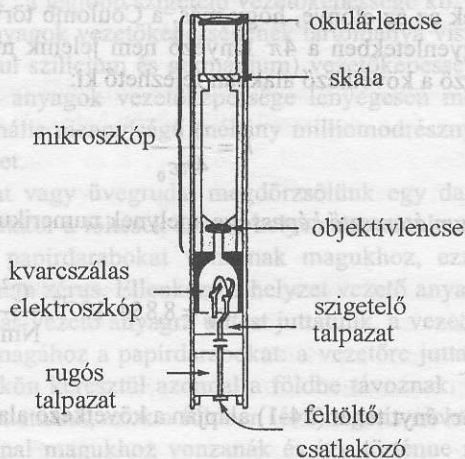
$$\mathbf{F}_{12} = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}_{12} \quad (24-7)$$

ahol \mathbf{F}_{12} az az erő, amellyel a q_1 töltés hat a q_2 -re, és \hat{r}_{12} a q_1 -től a q_2 felé mutató egységvektor (24-4 ábra). A továbbiakban mindig így használjuk az egységvektorokat és az indexeket: az \hat{r} egységvektort mindig az erő forrásából kiindulva rajzoljuk, a felé az objektum felé, amelyre az erő hat. (Az indexek sorrendje könnyen megjegyezhető: helyes sorrend esetén az olvasó a \rightarrow nyilat képzelheti közéjük. Így $\hat{r}_{1 \rightarrow 2}$ az 1. pontból mutat a 2. pont felé, és $\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2}$ az az erő, amelyet az 1. töltés gyakorol a 2.-re.) A Coulomb törvény kölcsönhatási erőt ír le, tehát ha az indexek sorrendjét felcseréljük, akkor azt az azonos nagyságú, de ellentétes irányú $\mathbf{F}_{2 \rightarrow 1}$ erőt kapjuk, amelyet a q_2 töltés gyakorol q_1 -re. A (24-7) egyenlettel akkor kapunk helyes \mathbf{F} irányt, ha a következő előjel-konvenciót fogadjuk el:

Pozitív töltésekhez + előjel negatív töltésekhez – előjel tartozik

Azonos előjelű töltések között taszítóerők, különböző előjelűek között vonzóerők lépnek fel.

A Coulomb törvény a két pontszerű töltés között fellépő elektrosztatikus kölcsönhatást írja le. A továbbiakban felhasználjuk Coulomb törvényét néhány pontszerű töltés közötti erő, valamint egy pontszerű töltés és egy



b) Modern, precíziós elektroszkóp, amelyet masszív felépítése miatt zsebben hordható doziméterként is használnak, mert kimutatja és méri az ionizáló sugárzásokat. Az elektroszkóp elektródái közül az egyik stabil fémlektroda, a másik pedig mozgó, U alakúra hajlított, bearanyozott kvarcszál. Használat előtt az elektroszkópot feltöltik, és emiatt a kvarcszál elhajlik. A szál helyzete egy skála előtt a beépített mikroszkóppal megfigyelhető. Ha a dozimétert ionizáló sugárzás éri, a kamrában lévő gáz kismértékben vezetővé válik; némi töltés az elnyelt sugárzással arányos mértékben „elszivárog”, és a szál a skála előtt elmozdul. A szál helyzetének leolvasását az teszi lehetővé, hogy az átlátszó talpazaton át fény jut a szálhoz és a lencsékhez. (Az ábra közlését a Dosimeter Corporation of America cég tette lehetővé.)

vonal mentén vagy térfogat mentén vett töléseeloszlás között fellépő erő kiszámítására.

Éppúgy, mint a tömegpontok közötti $F = Gm_1m_2/r^2$ gravitációs erő esetében, kísérletileg úgy találjuk, hogy a pontszerű töltésre ható elektrosztatikus erők összegezhethők, vektoriálisan összeadhatók. Ezt nevezzük a **szuperpozíció elvének**. Minthogy Newton gravitációs törvénye és a Coulomb törvény matematikai alakja azonos, a két törvényből hasonló következtetések vonhatók le. Például megmutattuk, hogy két egyenesleges tömegeloszlású szilárd gömb közötti gravitációs erő ugyanakkora, mintha az egyes gömbök tömegei a középpontjukban lennének koncentrálnva. Hasonlóan, két homogén töléssűrűségű gömb között ható elektrosztatikus erő éppen akkora, mintha a gömbök teljes töltése a középpontjukban lenne. Abban az esetben, ha a gömb elektromos töltése csak a sugár mentén változik, vagyis a töléseeloszlás gömbszimmetrikus, az elektrosztatikus erő ugyanakkora, mintha a teljes töltés a középpontban lenne: ez is teljesen analóg a gravitáció esetével.

24-1 PÉLDA

Két elhanyagolható méretű, 2 g-os tömegű gömb azonos pontban van 1 m hosszú fonalra felfüggesztve. Töltést juttatunk a gömbökre, amelyek ennek következtében egymástól 15 cm-nyire eltávolodnak. a) Feltételezve, hogy a két töltés ugyanakkora, számítsuk ki a töltés nagyságát. b) Csak egy megoldás van?

MEGOLDÁS

Rajzoljuk meg a jobb oldali gömb vektorábráját (24-6b ábra). (Szimmetria okok miatt tulajdonképpen mindegy, hogy a *jobb* vagy a *bal* gömböt választjuk ki, ugyanis a gömböknek azonos tömegük, töltésük van, azonos hosszúságú fonalakkal vannak felfüggesztve. Ennélfogva mind a Coulomb-, mind a gravitációs erők azonosak a két gömbön. Az egyedüli különbség a Coulomb-erő iránya.)

a) A gömbre ható erők eredője zérus, tehát a három erővektor zárt vektor háromszöget alkot (24-6c ábra), melynek alapján:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{F}{mg} = \frac{0,075 \text{ m}}{1 \text{ m}} = 0,075$$

F nagyságát a Coulomb-törvény szabja meg, ezt behelyettesítve:

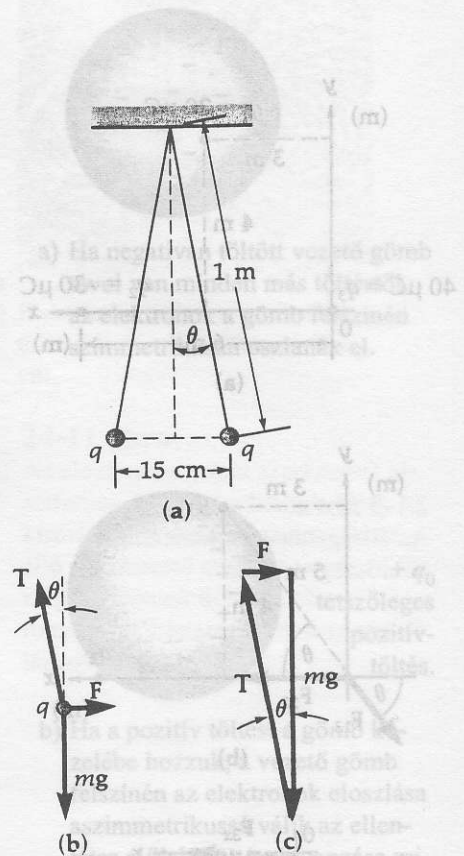
$$\operatorname{tg} \theta = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{q^2}{r^2 mg}$$

Ezt az egyenletet q^2 -re megoldva az kapjuk, hogy:

$$q^2 = (4\pi\epsilon_0) r^2 mg \operatorname{tg} \theta$$

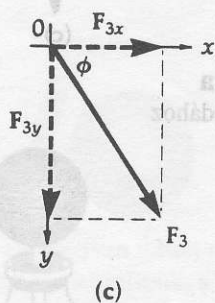
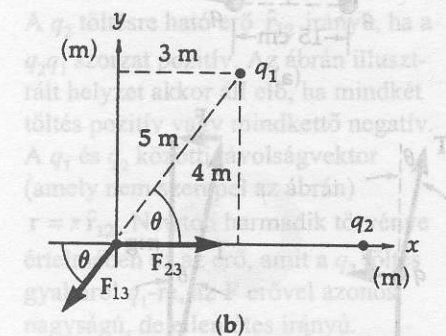
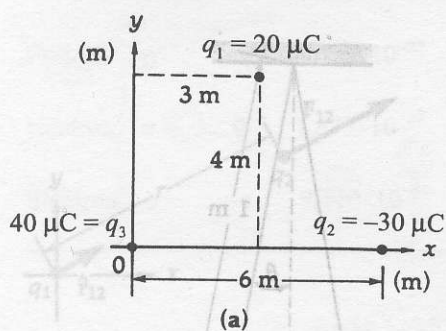
SI egységek értékeit behelyettesítve:

$$q^2 = \left(\frac{1}{9 \times 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}} \right) (0,075)(15 \times 10^{-2} \text{ m})^2 \cdot (2 \times 10^{-3} \text{ kg}) \left(9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) = 3,68 \times 10^{-15} \text{ C}^2$$



24-6 ábra

A 24-1 példához



24-7 ábra
A 24-2 példához

a) Egyszerű elektroszkóp, amit még a XVIII. században szerkesztettek, és még manapság is használatos töltések jelenlétének kimutatására. Két vékony fémfólia fémgömb által csatlakozik egy fémgömbhöz. Ezt a szerkezetet szigetelő anyagból készített dugóval egy üvegbúra alá tesszük. Ha a fémgömbre töltést juttatunk, a töltés eloszlik a fémgömb és a fóliák között; ez utóbbiak, azonos előjelű töltéseik miatt, egymást taszítják.

24-5 ábra
Az elektroszkóp

Mint ahogy a töltések egymással egyenlőek,

$$q = \sqrt{3,68 \times 10^{-15} \text{ C}^2} = \pm 6,07 \times 10^{-8} \text{ C}$$

b) Két lehetőség van: vagy mindkét töltés pozitív, vagy mindkettő negatív. Mint ahogy a töltések (elektronok) tömege elhanyagolhatóan kicsiny, ezek mennyisége nem befolyásolja a gömbök tömegét, és így a két gömb töltése akár különböző nagyságú (de azonos előjelű) is lehet. Mindaddig, amíg a két töltés szorzata $3,68 \times 10^{-15} \text{ C}^2$, a két gömb a feladatban megadott mértékben távolodik el egymástól.

24-2 PÉLDA

Három pontszerű töltés a 24-7a ábrán látható módon helyezkedik el. Az egyes töltések nagysága $q_1 = 20 \mu\text{C}$, $q_2 = -30 \mu\text{C}$ és $q_3 = 40 \mu\text{C}$. Számítsuk ki a q_3 töltésre ható eredő erőt.

MEGOLDÁS

Először kiszámítjuk azon erők x és y komponensét, amelyeket az egyes töltések gyakorolnak q_3 -ra (24-7b ábra). A kettős-index jelölésmódot használjuk: F_{13} azt az erőt jelenti, amellyel q_1 hat q_3 -ra.

q_1 hatása q_3 -ra

Mint ahogy ezek azonos előjelű töltések, a közöttük ható erő taszító. Elemi trigonometriával azt kapjuk, hogy $r_{13} = 5 \text{ m}$ és $\theta = 53,1^\circ$. Ezt felhasználva:

$$F_{13} = k \frac{q_1 q_3}{r_{13}^2} = \left(9 \times 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2} \right) \frac{(20 \mu\text{C})(40 \mu\text{C})}{(5 \text{ m})^2}$$

$$F_{13} = 0,288 \text{ N}$$

q_2 hatása q_3 -ra

Mint ahogy ezek különböző előjelű töltések, közöttük vonzó erő hat.

$$F_{23} = k \frac{q_2 q_3}{r_{23}^2} = \left(9 \times 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2} \right) \frac{(-30 \mu\text{C})(40 \mu\text{C})}{(6 \text{ m})^2}$$

$$F_{23} = 0,300 \text{ N}$$

Az x és y komponensek nagysága:

$$F_{13x} = F_{13} \cos(180^\circ + 53,13^\circ) = -0,173 \text{ N}$$

$$F_{13y} = F_{13} \sin(180^\circ + 53,13^\circ) = -0,230 \text{ N}$$

A q_3 töltésre ható F_3 eredő erő x komponense $F_{3x} = (-0,173 \text{ N} + 0,300 \text{ N}) = 0,127 \text{ N}$. Az y komponens nagysága $-0,230 \text{ N}$. Így a q_3 töltésre ható F eredő erő:

$$F_3 = \sqrt{F_{3x}^2 + F_{3y}^2} = \sqrt{(0,127 \text{ N})^2 + (-0,230 \text{ N})^2} = 0,263 \text{ N}$$

F_3 irányát a 24-7c ábrán definiált ϕ szög adja meg, amelyet az alábbi módon számíthatunk ki:

$$\phi = \arctg\left(\frac{F_{3y}}{F_{3x}}\right) = \arctg\left(\frac{-0,230 \text{ N}}{0,127 \text{ N}}\right) = 61,1^\circ$$

24.5 Az elektromos erőter

Gondoljunk vissza egy pillanatra a gravitációs erőter fogalmára (16.6 fejezet). Az erőter fogalmának bevezetése nagyon hasznos, mert így elkerülhetők a gravitációs törvényből következő távolba ható erő feltételezésének fogalmi nehézségei. Például, e törvény szerint a Föld erőt gyakorol egy műholdra, noha közöttük csak az űr van. Newton és számos későbbi tudós számára egyáltalán nem volt ellenszenves az üres téren át ható erő gondolata; a távolba hatás eszméjének ellentmondásosságát nem érzékelték. Az erőter fogalma modern gondolat. A gravitációs kölcsönhatások leírásának ezen változata szerint a Föld g gravitációs térerősséget hoz létre a műhold helyén: így ez már nem távolba hatás.

A g gravitációs térerősség adott pontban az oda képzelt, m_0 egységnyi tömegű testre ható erővel definiálható: $g = F/m_0 = -(GM/r^2)\hat{r}$. Az E elektromos térerősséget analóg módon definiáljuk: Az erőteret létrehozó q töltés és egy tetszőleges q_0 pozitív töltés között $F = 1/(4\pi\epsilon_0)(qq_0/r^2)\hat{r}$ erő hat. A térerősség ennek az erőnek és a q_0 töltésnek a hányadosa:

E ELEKTROMOS TÉRERŐSSÉG

$$E = \frac{F}{q_0} = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)\left(\frac{q}{r^2}\right)\hat{r} \quad (24-8)$$

tehát az E elektromos térerősség az egységnyi töltésre ható erő. Az E térerősség SI egysége 1 newton/coulomb (N/C).

Meg kell említsünk néhány gyakorlati problémát: Feltételezzük, hogy a q_0 töltés jelenléte nem változtatja meg az erőteret létrehozó többi töltés eloszlását. Például, ha a töltések vezető felületén helyezkednek el, és ezek közelébe töltést viszünk, az előbbieket elmozdulnak a felületen, és így az erőter megváltozik² (24-8 ábra). Ezt a problémát elkerülendő, pontosítsuk a térerősség definícióját oly módon, hogy E legyen F/q_0 arány határértéke ha q_0 töltés tart a zérushoz:

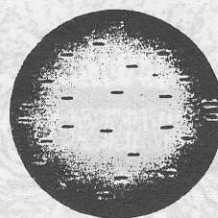
E ELEKTROMOS TÉRERŐSSÉG

$$E = \lim_{q_0 \rightarrow 0} \frac{F}{q_0} \quad (24-9)$$

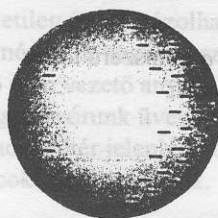
E logikailag pontos „méréstechnikai” definíció szerint E meghatározását kicsi és még kisebb q_0 töltésekkel kell elvégezni, és E a mért F/q_0 értékek $q_0 \rightarrow 0$ határértéke. Ily módon a töltés hatása az eredeti töltéeloszlásra elhanyagolhatóan kicsinnyé válik³.

² Mérések elvégzése során gyakran találkozunk ilyen problémákkal. Például, ha folyadék hőmérsékletét mérjük, a hőmérő belemerítésekor megváltozik a folyadék hőmérséklete.

³ Gyakorlatban, még ez a sokkal pontosabb definíció sem alkalmazható a kísérleti nehézségek miatt. Például, az e elemi töltésnél kisebb q_0 töltés nem létezik. Az E térerősség az itt leírtól sokkal könnyebben meghatározható az elektromos potenciál (26. fejezet) megméréssel, és az azon alapuló számítással.



a) Ha negatívan töltött vezető gömb távol van minden más töltéstől, az elektronok a gömb felszínén szimmetrikusan oszlanak el.

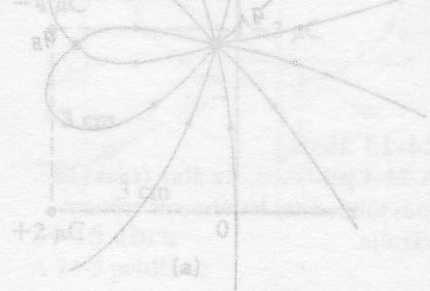


+ q_0
tetszőleges pozitív töltés.

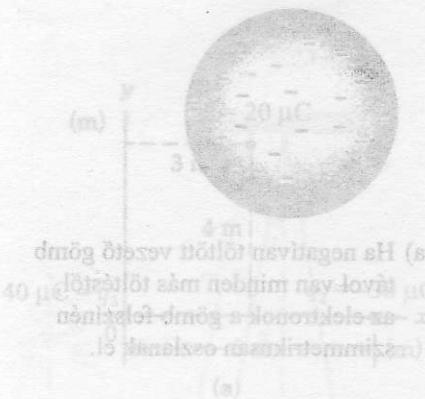
b) Ha a pozitív töltést a gömb közelébe hozzuk, a vezető gömb felszínén az elektronok eloszlása aszimmetrikussá válik az ellenétes előjelű töltések vonzása miatt.

24-8 ábra

Bizonyos körülmények között, a tetszőleges q_0 töltés megváltoztatja a elektromos erőteret. Hogy megkerüljük ezt a problémát a (24-9) térerősség definíciót alkalmazzuk.



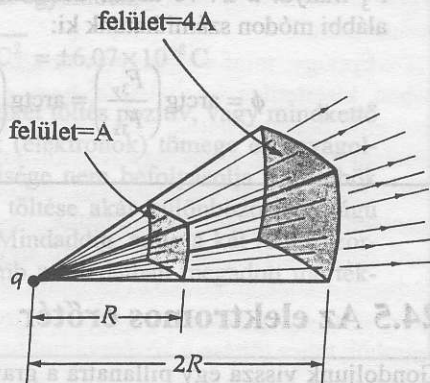
24-10 ábra
Az elektromos erőter szerkesztését ki-
csizgított, nem egyenlő nagysági
pozitív töltés környezetében. Az
erőter szerkesztése jobban megérthető,
ha elképzeljük azt, hogy hogyan néz
ki az erővonal-struktúra három dimen-
zióban. Az egyes töltéseken végződő
erővonalak számából azt állapítjuk
meg, hogy $|E_x| = 3|E_y| = 4|E_z|$.
A 24-3 példányhoz lásd pozitív és



24-9 ábra

Az elszigetelt q pontszerű töltés térerősség-vonalai

a) A q elszigetelt pontszerű töltés elektromos erővonalainak szokásos, kétdimenziós ábrázolási módja. Az ábra az erőter szerkezetének hozzávetőleges keresztmetszete.



b) A q pontszerű töltésből kiinduló erővonalak vázlatos, három dimenziós perspektivikus képe. A vonalak R és $2R$ sugarú koncentrikus gömbfelületen haladnak át.

Az elektromos erővonalak

Az elektromos erőteret **térerősség-vonalak** (vagy ahogy Faraday nevezte, **erővonalak**) segítségével szemléltethetjük. Tekintsünk egy izolált q pontszerű töltést és annak erőterét, valamint egy tetszőleges q_0 töltést. Coulomb törvénye vektoralakban a következő:

$$\mathbf{F} = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \left(\frac{qq_0}{r^2} \right) \hat{\mathbf{r}} \quad (24-10)$$

Az $\mathbf{E} = \mathbf{F}/q_0$ térerősség:

A q PONTSZERŰ TÖLTÉS TÉRERŐSSÉGE

$$\mathbf{E} = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \left(\frac{q}{r^2} \right) \hat{\mathbf{r}} \quad (24-11)$$

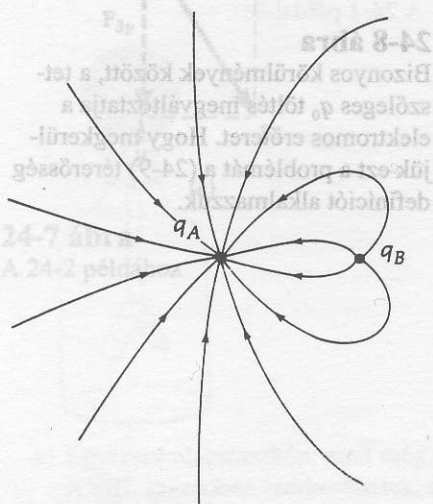
ahol az $\hat{\mathbf{r}}$ egységvektor sugárirányban, az erőteret létrehozó q töltéstől kifelé mutat. Ha q pozitív, \mathbf{E} sugárirányban kifelé, ha q negatív, \mathbf{E} befelé mutat. A térerősség nagysága kifelé a távolság négyzetével fordított arányban csökken. Az erőter eme tulajdonságai a q töltésből induló, és egyenletesen minden irányban kifelé tartó térerősség-vonalakkal szemléltethetők (24-9 ábra).

ELEKTROMOS TÉRERŐSSÉG-VONALAK

1. A vonalak iránya mindenütt megegyezik a térerősség irányával.
2. A térerősség-vonalakra merőleges, egységnyi felületen áthaladó erővonalak száma az elektromos erőter **térerősségével** arányos.

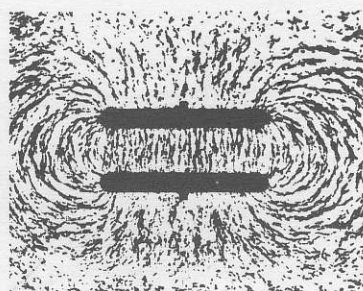
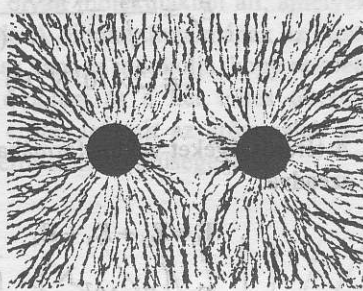
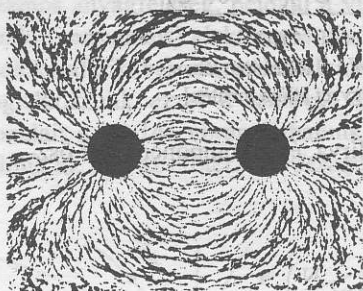
A második állítás a térerősség-vonalak nagyon hasznos tulajdonságára mutat rá. Ahol sűrűn vannak, ott az erőter „erős”, ahol ritkán, ott „gyenge”. Elszigetelt pontszerű töltés esetében, a reciproknégyzetes távolságfüggés geometriai megfontolások alapján nyilvánvaló. Képzeljünk el egy ponttöltést, és vele koncentrikusan gömbfelület-sorozatot (24-9b ábra). Minthogy a térerősség-vonalak sugárirányúak, (és szimmetrikusak) az egyes gömbfelületeket metsző erővonalak száma azonos. Az egyes gömbfelületek területe a sugár négyzetével arányos; minthogy \mathbf{E} térerősség arányos az **egységnyi felületen áthaladó erővonalak számával**, \mathbf{E} térerősség a távolság négyzetével fordítottan arányos.

A háromdimenziós erőterek ábrázolása bonyolult. Talán a legjobb, ha az erőterek (kétdimenziós) keresztmetszetét ábrázoljuk, mint a 24-9a ábrán. A két-



24-10 ábra

Az elektromos erőter szerkezte két elszigetelt, nem egyenlő nagyságú pontszerű töltés környezetében. Az erőter szerkezte jobban megérthető, ha elképzéljük azt, hogy hogyan néz ki az erővonal-struktúra három dimenzióban. Az egyes töltéseken végződő erővonalak számából azt állapíthatjuk meg, hogy $|q_A| = 3|q_B|$ és hogy q_A pozitív és q_B negatív.



a) Elektromos erőtér két, ellentétes töltésű rúd körül

b) Elektromos erőtér két, azonos töltésű rúd körül

c) Elektromos erőtér két, ellentétes töltésű lemez között és rajtuk kívül.

dimenziós ábrák alapján azonban mindig célszerű elképzelni, gondolati úton rekonstruálni az erőtér valódi szerkezetét megértendő, a teljes, háromdimenziós teret.

Az egyes töltésekből kiinduló erővonalak száma tulajdonképpen önkényes. Például, $1 \mu\text{C}$ töltéshez akár 100, akár 1 millió erővonal is hozzárendelhető. Bármely, kényelmesen használható „skalafaktor” választhatunk. Azonban bármelyiket választjuk is, $3 \mu\text{C}$ töltésből pontosan háromszor annyi erővonalnak kell kiindulnia, mint egy $1 \mu\text{C}$ töltésből (24-10 ábra). Vegyük észre, hogy a töltések közelében az erővonalak szimmetrikusan veszik körül az egyes töltéseket. Nagyon nagy távolságból a töltésegysétes egyszerű pontszerű töltésnek tűnik (amelynek töltése a töltések összege), így az erővonalak a töltésegysétestől távol szimmetrikusak, olyanok, mintha egyetlen pontszerű töltésből erednének.

Az elektromos térerősség-vonalak mindig a pozitív töltésekről indulnak és a negatív töltésen végződnek. Ha csak az egyik töltésfajta van jelen (vagy a rendszer össztöltése nem zérus) az erővonalak a „végtelenben végződnek”. Egyik esetben sem szabad az erővonalakat szó szerint venni: jegyezzük meg, hogy erővonalak a valóságban nem léteznek, pusztán elméleti segédeszközök, amelyekkel az elektromos erőtér fogalmát jobban megérthetjük. Erőterek viszont valóban léteznek abban az értelemben, hogy műveletekkel definiálhatók és kísérletileg meghatározhatók.

24-3 PÉLDA

Három pontszerű töltés van egy 3 cm élhosszúságú négyzet három csúcán (24-12 ábra). Számítsuk ki a negyedik csúcson az E elektromos térerősséget.

MEGOLDÁS

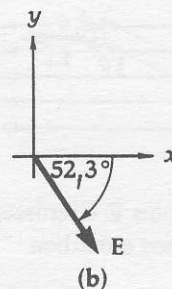
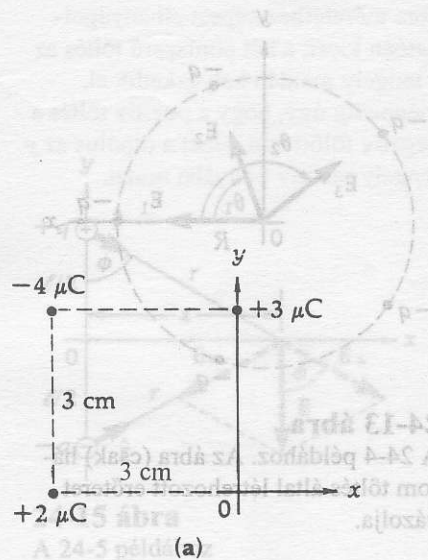
A szuperpozíció elvét használjuk fel: kiszámítjuk az egyes töltések által keltett térerősség irányát és nagyságát a negyedik csúcson. Az eredő E térerősség az $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3$ vektorösszeggel számítható:

$$E_2 = \frac{kq_2}{r_2^2} = \frac{(9 \times 10^9 \text{ Nm}^2 / \text{C}^2)(2 \times 10^{-6} \text{ C})}{(3 \times 10^{-2} \text{ m})^2}$$

$$= (2 \times 10^7 \text{ N/C}) \quad [+x \text{ irányú}]$$

$$E_3 = \frac{kq_3}{r_3^2} = \frac{(9 \times 10^9 \text{ Nm}^2 / \text{C}^2)(3 \times 10^{-6} \text{ C})}{(3 \times 10^{-2} \text{ m})^2}$$

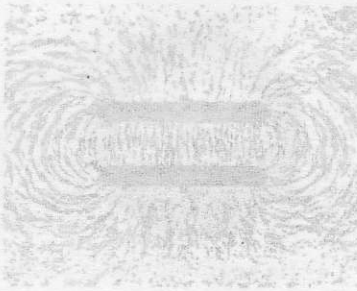
$$= (3 \times 10^7 \text{ N/C}) \quad [-y \text{ irányú}]$$



24-12 ábra
A 24-3 példához

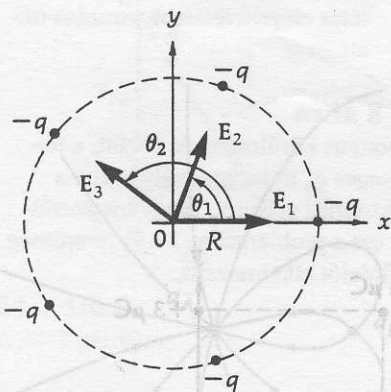
24-11 ábra

Az elektromos erőtér szerkezetét kísérletileg úgy ábrázolhatjuk, hogy kisméretű, hosszúkas szemcsékből álló nem vezető anyagot (a képen fűmagot) szórunk üveglemezre. Elektromos erőtér jelenlétében a szemcsék láncokba rendeződnek.



24-11 ábra
Az elektromos erőter szerkezetét ki-
szelvényes ábrán lehet szemléltetni.
A képen látható ábrán a pozitív töltésű
lapos kondenzátor között és rajta ki-
vált.

24-12 ábra
Az elektromos erőter szerkezetét ki-
szelvényes ábrán lehet szemléltetni.
A képen látható ábrán a pozitív töltésű
lapos kondenzátor között és rajta ki-
vált.



24-13 ábra

A 24-4 példához. Az ábra (csak) há-
rom töltés által létrehozott erőteret
vázolja.

24-10 ábra

Az elektromos erőter szerkezetét két
elszigetelt, nem egyenlő nagyságú
pontszerű töltés környezetében. Az
erőter szerkezetét szemléltethetjük,
ha elképzeljük azt, hogy hogyan néz
ki az erővonal-struktúra három dimen-
zióban. Az egyes töltéseken végződő
erővonalak számából azt állapíthatjuk
meg, hogy $|q_1| = |q_2|$ esetén a
pozitív és q_2 negatív

$$E_4 = \frac{kq_4}{r_4^2} = \frac{(9 \times 10^9 \text{ Nm}^2 / \text{C}^2)(4 \times 10^{-6} \text{ C})}{(3\sqrt{2} \times 10^{-2} \text{ m})^2}$$

$$= (2 \times 10^7 \text{ N/C}) \quad \begin{matrix} \text{[a } -4 \mu \text{ C töltés irányában} \\ \text{a négyzet átlója mentén]} \end{matrix}$$

A térerősségeket vektor formában felírva, és a komponenseket ösz-
szeadva:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 + \mathbf{E}_4$$

$$\mathbf{E} = \left(2 \times 10^7 \frac{\text{N}}{\text{C}}\right) \hat{x} - \left(3 \times 10^7 \frac{\text{N}}{\text{C}}\right) \hat{y} +$$

$$\left[\left(\frac{2 \times 10^7 \text{ N}}{\sqrt{2} \text{ C}}\right) \hat{x} - \left(\frac{2 \times 10^7 \text{ N}}{\sqrt{2} \text{ C}}\right) \hat{y} \right]$$

$$\mathbf{E} = \left(3,414 \times 10^7 \frac{\text{N}}{\text{C}}\right) \hat{x} - \left(4,414 \times 10^7 \frac{\text{N}}{\text{C}}\right) \hat{y}$$

$$\mathbf{E} = \left(5,58 \times 10^7 \frac{\text{N}}{\text{C}}\right) [52,3^\circ \text{ kal a } +x \text{ tengely alatt}]$$

24-4 PÉLDA

Öt azonos nagyságú, negatív pontszerű töltés helyezkedik el szim-
metrikusan egy kör kerülete mentén. Számítsuk ki a térerősséget a
kör középpontjában.

MEGOLDÁS

A töltések elhelyezkedését a 24-13 ábrán vázoltuk fel. A koordiná-
tatengelyeket úgy választottuk meg, hogy az illeszkedjék a töltés-
rendszer szimmetriájához. Látható, hogy $\theta_1 = 360^\circ/5$ és $\theta_2 =$
 $(2)(360^\circ/5)$. A térerősség x és y komponenseit az alábbiak szerint
számíthatjuk ki:

$$E_x = \frac{kq}{R^2} (1 + 2\cos\theta_1 + 2\cos\theta_2)$$

$$= \frac{kq}{R^2} (1 + 0,6180 - 1,6180) = 0$$

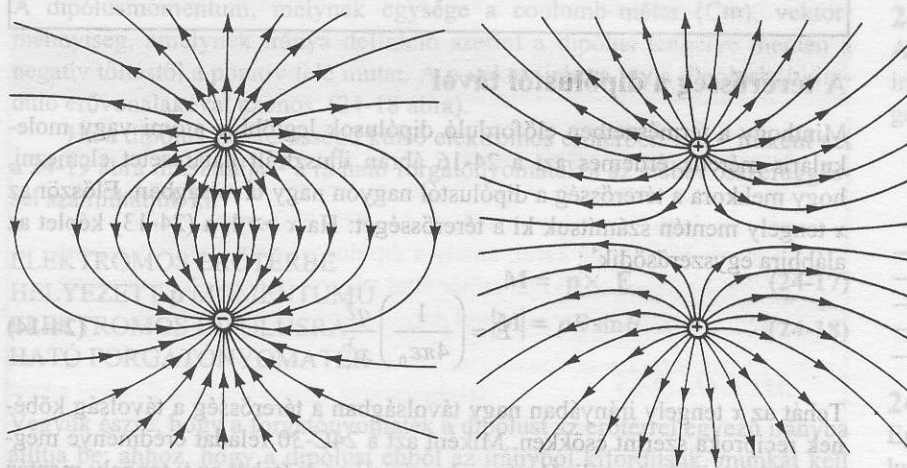
Hasonlóképpen, $E_y = \frac{kq}{R^2} (0 - \sin\theta_1 - \sin\theta_2 + \sin\theta_1 + \sin\theta_2) = 0$

Megmutatható, hogy a térerősség a kör középpontjában zérus,
függetlenül attól, hogy hány, szimmetrikusan elrendezett, azonos
nagyságú töltés helyezkedik el a kör kerülete mentén, és attól is,
hogy a töltések száma páros vagy páratlan.

24.6 Az elektromos dipólus

Az elektromos dipólus olyan töltéskonfiguráció, amelyet számos gyakorlati
szempontból fontos esetben alkalmazunk modellként. Két azonos nagyságú,
de ellentétes előjelű, egymástól a térben elválasztott pontszerű töltés alkotja.

Számos anyagféleség, például a víz is, olyan molekulákból áll, amelyek állandó (permanens) elektromos dipólusok. A dipólus fogalmának az atom- és molekulafizikában számtalan alkalmazása van, ez indokolja, hogy részletesen foglalkozunk ezzel a témával. Egy dipólust és a két töltés térerősség-vonalait a 24-14a ábrán láthatunk: az erőter irányát az erővonalak érintői jelölik ki, míg az erőter *térerősségét* az erővonalak sűrűsége jelzi.



a) Elektromos dipólus erőtere: a pontszerű töltések azonos nagyságúak, de ellenkező előjelűek. b) Azonos nagyságú, és azonos előjelű pontszerű töltések elektromos erőtere (pozitív töltések).

24-14 ábra

Két pontszerű töltés által létrehozott elektromos erőter. Mint mindig, amikor három dimenziós erőter két dimenziós metszetét ábrázoljuk, képzeljük el a három dimenziós struktúrát is. Ebben a két esetben az erővonalstruktúra a két töltést összekötő vonalra, mint tengelyre hengerszimmetrikus.

24-5 PÉLDA

Tekintsünk egy, az *y* tengely mentén fekvő elektromos dipólust (24-15 ábra). Számítsuk ki az elektromos térerősség irányát és nagyságát *x* távolságban, az *x* tengely mentén.

MEGOLDÁS

Legyen a töltések távolsága ℓ (24-15 ábra). Kiszámítjuk a pozitív töltéstől származó E_+ térerősséget, a negatív töltéstől származó E_- térerősséget, és vektoriálisan összegezzük őket. Azzal kezdjük, hogy a pontszerű töltés elektromos tere $E = (kq/r^2)\hat{r}$. Az \hat{r} egységvektor a q töltéstől a kérdéses pont irányába mutat, és r a pont és a q töltés távolsága. Így $r^2 = (\ell/2)^2 + x^2$, továbbá E_+ és E_- azonos nagyságúak.

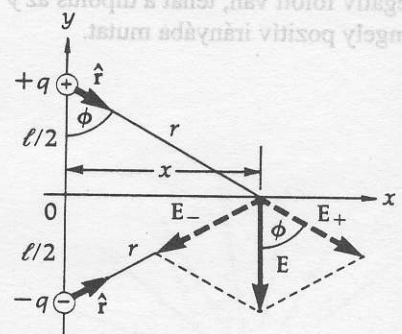
$$E_+ = E_- = \frac{kq}{(\ell/2)^2 + x^2} \quad (24-12)$$

Ha E_+ és E_- vektorokat összeadjuk, az *x* komponensek összege szimmetriaookokból zérus, az *y* komponensek összege:

$$E = \left(\frac{kq}{(\ell/2)^2 + x^2} \right) \cos \phi$$

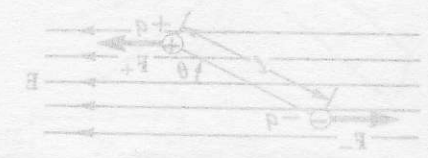
ahol $\cos \phi$ az alábbi alakban adható meg:

$$\cos \phi = \frac{(\ell/2)}{\sqrt{(\ell/2)^2 + x^2}}$$



24-15 ábra

A 24-5 példához



24-17 ábra
Elektromos dipólus E térerősségű hengeres elektromos erőterében.

Elvégezve a $k = 1/4\pi\epsilon_0$ behelyettesítést:

$$\mathbf{E} = - \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{q\ell}{[(\ell/2)^2 + x^2]^{3/2}} \hat{y} \quad (24-13)$$

Az \mathbf{E} térerősség ebben az x tengelyen lévő pontban az y tengellyel párhuzamosan, az y tengely negatív irányába mutat.

A térerősség a dipólustól távol

Mínt hogy a természetben előforduló dipólusok legtöbbször atomi vagy molekuláris méretű, érdemes azt a 24-16 ábrán illusztrált határesetet elemezni, hogy mekkora a térerősség a dipólustól nagyon nagy távolságban. Először az x tengely mentén számítsuk ki a térerősséget: Ha $x \gg \ell$, a (24-13) képlet az alábbira egyszerűsödik⁴:

$$E \approx \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{q\ell}{x^3} \quad (24-14)$$

Tehát az x tengely irányában nagy távolságban a térerősség a távolság köbének reciproka szerint csökken. Miként azt a 24C-30 feladat eredménye megmutatja, a térerősség a dipólustengely irányában is (tehát az y tengely mentén is) a távolság köbének reciproka szerint csökken. Általánosságban is megmutatható, hogy a dipólus körül *bármely irányban*, nagy távolságban a térerősség a távolság köbének reciprokéval változik. Ha a koordinátarendszer középpontja a dipólus középpontjába esik, és az attól számított távolságot jelöljük r -rel; az előző képletet az alábbi általános alakban írhatjuk fel:

AZ ELEKTROMOS

TÉRERŐSSÉG A DIPÓLUSTÓL TÁVOL ($r \gg \ell$)

$$E \propto \frac{q\ell}{r^3} \quad (24-15)$$

A (24-15) egyenlet szerint, ha q nagyságát megkétszerezzük, mialatt ℓ -et felére csökkentjük, a térerősség ugyanakkora marad. Tulajdonképpen q és ℓ bármilyen kombinációja (feltéve hogy $q \cdot \ell = \text{konstans}$) nagy távolságban ugyanakkora térerősséget eredményez. Más szóval nagy távolságokban, a térerősséget a $q \cdot \ell$ szorzat szabja meg. Kiténtetett szerepe miatt e szorzatnak külön neve van: ez az *elektromos dipólusmomentum*.

Az elektromos dipólusmomentum

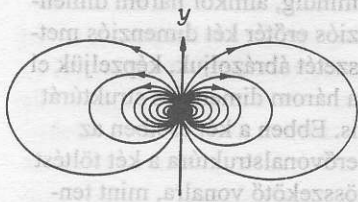
Az elektromos dipólus viselkedése különösen érdekes, ha \mathbf{E} térerősségű homogén elektromos erőterbe kerül (24-17 ábra). Mínt hogy az erőter homogén, a pozitív q töltésre ható \mathbf{F}_+ erő ugyanakkora nagyságú, de ellentétes irányú, mint a negatív q töltésre ható \mathbf{F}_- erő. A dipólusra ható eredő erő zérus, így a dipólusra ható forgatónyomaték bármely tengelyre azonos. A 10. fejezetben levezetett összefüggés alapján az \mathbf{M} forgatónyomaték:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

melynek nagysága $M = F_+ \ell \sin \theta = (q\ell)E \sin \theta$

Az \mathbf{M} forgatónyomaték csökkenő q szögek irányában forgatja el a dipólust. Az összefüggés vektoralakban is felírható az alábbi módon:

⁴ Az $x \gg \ell$ egyenlőség nem jelenti azt, hogy x végtelen nagy lenne. A (24-13) nevezőjében lévő két tagot összehasonlítjuk, megállapíthatjuk, hogy ha $x \gg \ell$, az $(\ell/2)^2$ tag sokkal kisebb x -nél, és így $(\ell/2)^2$ elhanyagolható a dipólustól távol.



24-16 ábra

Dipólus elektromos erőtere. Képzeljünk el a teljes három dimenziós térerősség-strukturát amely az y tengely körül hengersizmetrikus. A dipólus az ábra méreteihez képest elhanyagolhatóan kicsi; a két pontszerű töltés az y tengely mentén helyezkedik el, mégpedig úgy, hogy a pozitív töltés a negatív fölött van, tehát a dipólus az y tengely pozitív irányába mutat.



24-17 ábra

Elektromos dipólus \mathbf{E} térerősségű homogén elektromos erőterben.

$$\mathbf{M} = (q\ell) \times \mathbf{E}$$

ahol $q\ell = p$ az elektromos dipólusmomentum vektora, amely a negatív töltéstől a pozitív töltés felé mutat. Az \mathbf{M} irányát a vektorszorzat határozza meg.

A p ELEKTROMOS
DIPÓLUSMOMENTUM

$$p = q\ell$$

(ahol ℓ a pozitív
töltés felé mutat)

(24-16)

A dipólusmomentum, melynek egysége a coulomb-méter (Cm), vektormennyiség, amelynek iránya definíció szerint a dipólus tengelye mentén a negatív töltéstől a pozitív felé mutat. A p vektor iránya így a dipólusból kiinduló erővonalakéval azonos (24-18 ábra).

Ha a dipólus \mathbf{E} térerősségű külső elektromos erőterben van – miként azt a 24-19 ábra illusztrálja – a rá ható forgatónyomatékok az alábbi összefüggéssel számíthatjuk ki:

ELEKTROMOS ERŐTÉRBE
HELYEZETT p MOMENTUMÚ
ELEKTROMOS DIPÓLUSRA
HATÓ FORGATÓNYOMATÉK

$$\mathbf{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{E} \quad (24-17)$$

$$|\mathbf{M}| = pE \sin \theta \quad (24-18)$$

Vegyük észre, hogy a forgatónyomaték a dipólust az erőtérrel egyező irányba állítja be; ahhoz, hogy a dipólust ebből az irányból kifordítsuk, munkát kell végeznünk. Vagyis, külső elektromos erőter jelenlétében a nem pontosan az erőter irányába álló dipólusoknak elektromos potenciális energiájuk van. Az elektromos erőter *konzervatív*, így az általa végzett munka a rendszer potenciális energiáját csökkenti, azaz ΔU negatív. Egyenes vonalú mozgásnál, a potenciális energia változása:

$$U_b - U_a = - \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}$$

Ha egy \mathbf{M} forgatónyomaték $d\theta$ szögelfordulást eredményez, a potenciális energia változása:

$$U_\theta - U_{\theta_0} = - \int_{\theta_0}^{\theta} \mathbf{M} \cdot d\boldsymbol{\theta}$$

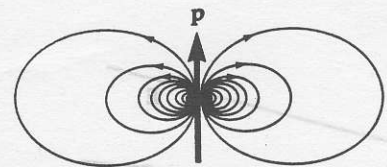
A 24-19 ábrán, a jobbkéz-szabály értelmében a $d\boldsymbol{\theta}$ vektor (amely θ megváltozását jelenti) az ábra síkjára merőlegesen, fölfelé mutat, míg a \mathbf{M} forgatónyomaték vektor lefelé. Ennélfogva a $\mathbf{M} \cdot d\boldsymbol{\theta}$ szorzat negatív. $|\mathbf{M} \cdot d\boldsymbol{\theta}| = M \cos 180^\circ d\theta = -(M d\theta) = -(pE \sin \theta d\theta)$ (Megjegyzendő, hogy itt θ az \mathbf{M} és \mathbf{E} közötti szöget, és nem az \mathbf{M} és $d\boldsymbol{\theta}$ közötti 180° -os szöget jelenti!)

$$U_\theta - U_{\theta_0} = - \int_{\theta_0}^{\theta} (-pE \sin \theta) d\theta = -pE(\cos \theta - \cos \theta_0)$$

A potenciális energiaskála zéruspontját úgy megválasztva, hogy $U_{\theta_0} \equiv 0$, ha $\theta_0 = 90^\circ$,

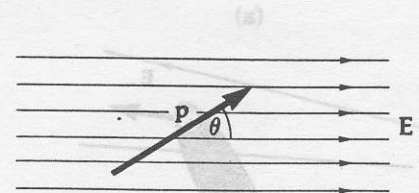
$$U - 0 = -pE(\cos \theta - 0) = -pE \cos \theta$$

amelyet a következő skalárszorzattal írhatunk fel:



24-18 ábra

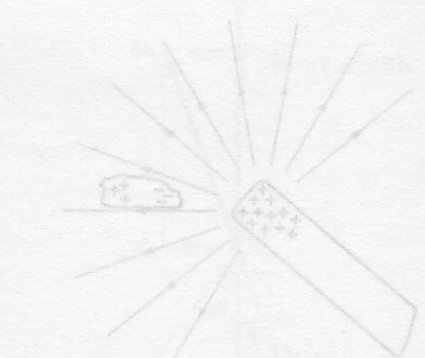
A p dipólusmomentum-vektor abba az irányba mutat, amerre a dipólus tengelyén az elektromos tér.



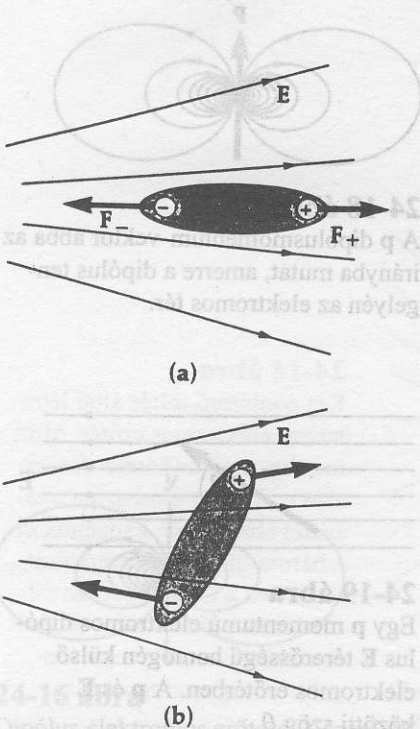
24-19 ábra

Egy p momentumú elektromos dipólus \mathbf{E} térerősségű homogén külső elektromos erőterben. A p és \mathbf{E} közötti szög θ .

24-20 ábra
Ha a dipólus inhomogén elektromos
erőterbe kerül, akkor a nagyobb térerősségű hely felé mutató erő hat rá.

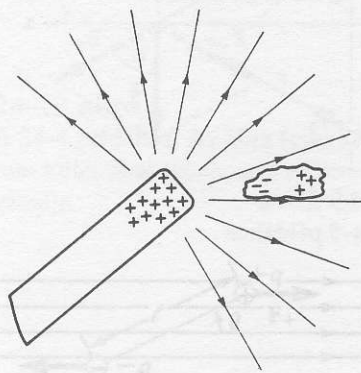


24-21 ábra
Egy fölfelé fordított dipólus inhomogén elektromos erőterben (vagy más anyagban). A dipólus erővonalak inhomogén teret jelentenek; a papírlapok a négyzet térerősség felé mozdulnak el.



24-20 ábra

Ha a dipólus inhomogén elektromos erőtérbe kerül, akkor a nagyobb térerősségű hely felé mutató erő hat rá.



24-21 ábra

Egy töltött rúd elektromos erőtere dipólusokat indukál töltetlen papírdarabokban (vagy más anyagban). A széttartó erővonalak inhomogén erőteret jelentenek; a papírdarabok a nagyobb térerősség felé mozdulnak el.

ELEKTROMOS ERŐTÉRBE HELYEZETT DIPÓLUS U POTENCIÁLIS ENERGIÁJA $U = -(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E})$ (24-19)
($U = 0$, HA \mathbf{p} ÉS \mathbf{E} EGYMÁSRA MERŐLEGESEK)

A dipólus potenciális energiája tehát akkor maximális, ha \mathbf{p} és \mathbf{E} ellentétes irányúak, és akkor minimális, ha azonos irányúak. (Célszerű a potenciális energiaskála zéruspontjának azt tekinteni, amikor \mathbf{p} és \mathbf{E} egymásra merőlegesek.)

24-6 PÉLDA

Egy, a környezetétől elszigetelt vízmolekula permanens elektromos dipólusmomentuma $6,24 \times 10^{-30}$ Cm. a) Számítsuk ki az erre a dipólusra ható forgatónyomatékokat, ha 300 N/C térerősségű külső elektromos erőtérbe kerül, amely a dipólus irányával 60° -os szöveget zár be; b) Számítsuk ki az erőtér által végzett munkát, ha a dipólust ebből a helyzetéből az erőtérrel párhuzamos irányba forgatja.

MEGOLDÁS

a) A (24-17) egyenlet szerint

$$\mathbf{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$$

$$M = p E \sin \theta = (6,24 \times 10^{-30} \text{ Cm})(300 \text{ N/C})(\sin 60^\circ)$$

$$M = 1,62 \times 10^{-27} \text{ Nm}$$

b) Az erőtér által végzett munka az elektromos potenciális energia megváltozása ellenkező előjellel:

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \mathbf{M} \cdot d\theta = -\Delta U = -[U_\theta - U_{\theta_0}] = -[-pE(\cos \theta - \cos \theta_0)]$$

$$W = [(6,24 \times 10^{-30} \text{ Cm})(300 \text{ N/C})(\cos 0^\circ - \cos 60^\circ)]$$

$$W = 9,36 \times 10^{-28} \text{ J}$$

Dipólus inhomogén erőtérben

Ha egy dipólus inhomogén elektromos erőtérbe kerül, akkor a töltéseire ható erő nem egyenlő, mert az egyes q töltések helyén a térerősség nem azonos. Ennek következtében a dipólusra nemcsak forgatónyomaték, hanem olyan eredő erő is hat, amely a nagyobb térerősségű helyek irányában mozgatja (24-20 ábra). Számos molekulának van permanens elektromos dipólusmomentuma, mert a pozitív töltések súlypontja nem esik egybe a negatívakéval. Ha ilyen, ún. *poláros molekulák* szabadon mozoghatnak, akkor az erőtér nagyobb térerősségű tartománya felé mozdulnak el.

Elektromos erők indukált dipólusmomentumot hozhatnak létre anyagokban, ha az erőtér a töltéseloszlás kismértékű átrendeződését okozza. Az anyag pozitív töltései kis mértékben az elektromos erőtér irányában, a negatív töltések azzal ellentétes irányban mozdulnak el⁵. A 24-21 ábrán töltött rúd vége környékén kialakult inhomogén (széttartó) elektromos erőtérbe került töltés nélküli papírdarab (vagy más hasonló anyag) látható. A papírdarabra, indukált dipólusmomentuma miatt a nagyobb térerősségű tartomány irányába mutató erő hat, ugyanis az ábrán jelölt negatív töltések nagyobb térerősségű helyen vannak, mint a pozitívak. Ez az effektus független a rúd töltésének előjelétől.

⁵ Ennek mikroszkopikus részleteit a 27-4 fejezetben tárgyaljuk.

24.7 Folytonos töltéseloszlások által létrehozott elektromos erőkerek

A gyakorlatban ritkán találkozunk olyan esettel, amikor izolált töltések szerepelnek: a töltések rendszerint egy tartományban egymáshoz közel helyezkednek el, és így *folytonos töltéseloszlással* közelíthetjük őket. A folytonos töltéseloszlás elhelyezkedhet vonal vagy felület mentén, ill. térfogatban. Mindegyik esetben, az E térerősség kiszámítását úgy végezzük, hogy az egyes dq töltéselemek által a P pontban létrehozott dE térerősségvektorokat összegezzük.

Egy dq töltéselem által létrehozott dE térerősség

$$dE = k \frac{dq}{r^2} \hat{r}$$

Az összes töltéselem által létrehozott E teljes térerősség

$$E = k \int \frac{dq}{r^2} \hat{r}$$

Az integrálásnál figyelembe kell venni, hogy az integrál alatt vektorok szerepelnek. Az általunk vizsgált példákban leegyszerűsíti a számítást, ha figyelembe vesszük a töltéseloszlás szimmetriáját.

Az egyes töltés eloszlástípusokat a 24-2 táblázat szerint λ , σ , ill. ρ jelöli.

24-2 TÁBLÁZAT

Töltéseloszlás	Jellemző paraméter	SI egység
Vonalmenti	λ , egységnyi hosszra jutó töltés	C/m
Felületmenti	σ , egységnyi felületre jutó töltés	C/m ²
Térfogati	ρ , egységnyi térfogatra jutó töltés	C/m ³

Vegyük észre, hogy az egyes töltéssűrűség-féleségek egységei különbözőek, ugyanis az, hogy hogyan választjuk meg a dq töltéselemet, függ a töltéseloszlás konkrét típusától:

Töltések vonal mentén

$$dq = \lambda dx$$

Töltések felület mentén

$$dq = \sigma dA$$

Töltések térfogatban

$$dq = \rho dV$$

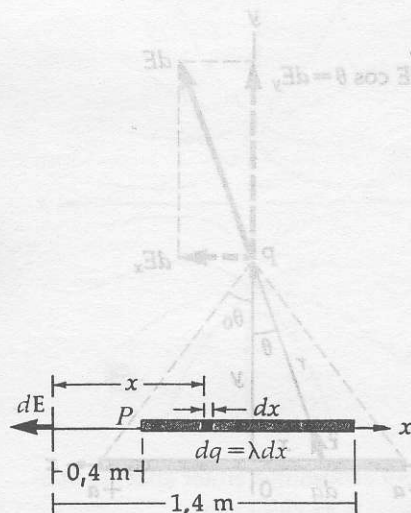
A következő példákban figyeljük meg, hogy hogyan kell megválasztani a dx , dA és dV elemi mennyiségeket, hogy megfeleljenek a töltéseloszlás szimmetriájának. A probléma megoldásának legkritikusabb pontja dq megválasztása: ehhez mindig tanácsos olyan ábrát készíteni amelyik a dq elemi töltést és az általa létrehozott dE térerősséget ábrázolja.

24-7 PÉLDA

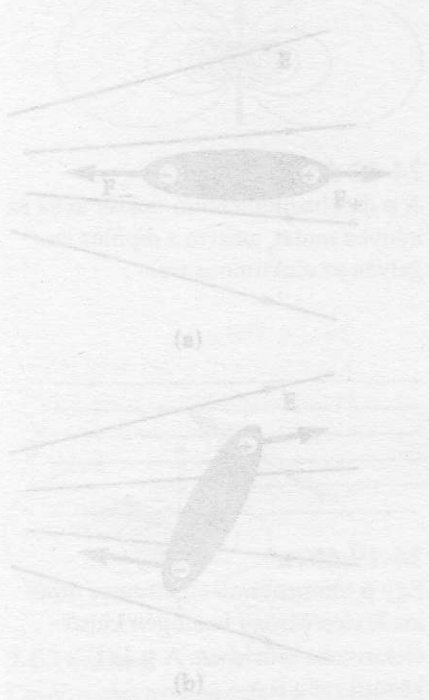
Vékony, egyenes, 1 m hosszú szigetelő rúd töltése $5 \mu\text{C}$ töltés, ami az x tengely mentén elhelyezkedő rúdon hosszában egyenletesen oszlik el. Számítsuk ki az E elektromos térerősséget az x tengelyen a rúd egyik végétől 0,4 m-nyire lévő P pontban (24-22 ábra).

MEGOLDÁS

A λ lineáris töltéssűrűség a rúdon $\lambda = 5 \mu\text{C/m}$. Legyen a P pont a koordinátarendszer középpontja, és a rúd helyezkedjen el az x ten-

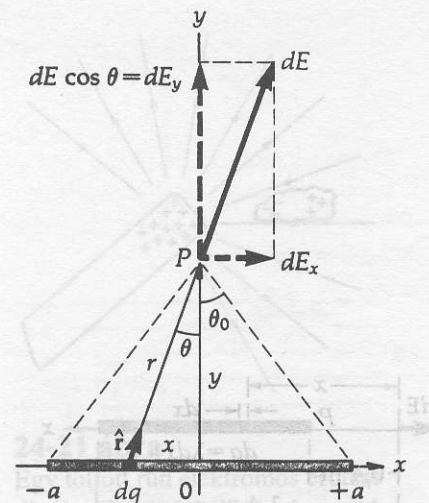


24-22 ábra
A 24-7 példához.



24-20 ábra

Ha a dipólus inhomogén elektromos erőtérbe kerül, akkor a nagyobb térerűségű hely felé mutató erő hat rá.



24-23 ábra

A 24-8 példához. λ egyenletes vonalmenti töltéssűrűség az $x = -a$ és $x = +a$ helyek között.

gely mentén. Válasszuk meg az elemi töltést⁶ úgy, hogy $dq = \lambda dx$; ez az elemi töltés dE térerősséget hoz létre P -ben. Összegezve az egyes dE vektorokat, észrevehetjük, hogy mindegyikük azonos irányú, és ezért skalárként adhatjuk össze őket. Az integrálás tulajdonképpen egydimenziós skalár mennyiség összegzése az $x = 0,4$ és $x = 1,4$ m határok között.

$$\begin{aligned} E &= k \int \frac{dq}{r^2} = k \int_{0,4\text{m}}^{1,4\text{m}} \frac{\lambda dx}{x^2} = -k\lambda \left[\frac{1}{x} \right]_{0,4\text{m}}^{1,4\text{m}} \\ &= \left(9 \times 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}} \right) \left(5 \times 10^{-6} \frac{\text{C}}{\text{m}} \right) \left(\frac{1}{1,4 \text{ m}} - \frac{1}{0,4 \text{ m}} \right) \\ &= -8,04 \times 10^4 \frac{\text{N}}{\text{C}} \quad (\text{az } x \text{ tengely negatív irányában}) \end{aligned}$$

24-8 PÉLDA

Legyen az $x = -a$ és $x = +a$ pontok közötti szakaszon egyenletes λ vonalmenti töltéssűrűség (24-23 ábra). Számítsuk ki az E elektromos térerősséget a felezősíkon y távolságban lévő P pontban.

MEGOLDÁS

Miként minden példában, amelyben töltéseloszlások szerepelnek, választanunk kell egy dq elemi töltést; kiszámítjuk a vizsgált pontban a dq -tól származó dE térerősséget; majd az összes töltéstől származó dE komponensek összegezésével meghatározzuk a teljes E térerősséget.

Vegyük észre a töltéseloszlás szimmetriáját⁷. Minden egyes, $+x$ helyen lévő dq elemi töltéshez találhatunk egy ugyanakkora dq töltést a $-x$ helyen. Az egyik dq -tól származó dE_x komponens éppen semlegesíti a másik dq éppen ellentétesen egyenlő dE_x komponense. Tehát, ha az összes dq -tól származó dE_x komponens összegezzük, zérus eredőt kapunk. Így hát csak a dE_y komponenseket kell összegeznünk, ami viszont skalárok összegzése, hiszen mindegyik dE_y komponens azonos irányba mutat. Az elemi töltés $dq = \lambda dx$. A Coulomb törvényt felhasználva:

$$dE = k \frac{dq}{r^2} = \frac{k\lambda dx}{r^2}$$

$$\text{és} \quad dE_y = dE \cos\theta = \frac{k\lambda \cos\theta dx}{r^2} \quad (24-20)$$

Három változónk van: x , r és θ . Fejezzük ki x -et és r -et θ függvényében:

$$r = \frac{y}{\cos\theta} \quad x = y \tan\theta \quad dx = y \sec^2\theta d\theta = y \frac{1}{\cos^2\theta} d\theta$$

Ezeket a (24-12) képletbe behelyettesítve azt kapjuk, hogy

⁶ Figyeljük meg, hogyan eredményez λ és dx szorzata töltés dimenziójú mennyiséget: [töltés / hosszúság] · [hosszúság] = [töltés]

⁷ A szimmetria-megfontolások nagyon fontosak a fizikában. Mindig figyeljünk arra, hogy valamilyen szimmetria nem teszi-e sokkal könnyebbé a probléma megoldását. A következő néhány fejezetben gyakran alkalmazunk szimmetria-megfontolásokat.

$$dE_y = \frac{k\lambda \cos\theta}{y} \left(\frac{1}{\cos^2\theta} \right) d\theta = \frac{k\lambda}{y} \cos\theta d\theta$$

A θ szög a $-\theta_0$ és $+\theta_0$ határok között változik. A szimmetria miatt, a $-\theta_0$ és $+\theta_0$ közötti integrál kétszerese a 0 és $+\theta_0$ közöttinek, és így, a G-II függelék integráltáblázatát használva, a P pontban a teljes E_y térerősséget az alábbi formula fejezi ki:

$$E_y = \int_{-\theta_0}^{+\theta_0} dE_y = \frac{2k\lambda}{y} \int_0^{\theta_0} \cos\theta d\theta = \frac{2k\lambda}{y} \sin\theta \Big|_0^{\theta_0} = \frac{2k\lambda}{y} \sin\theta_0$$

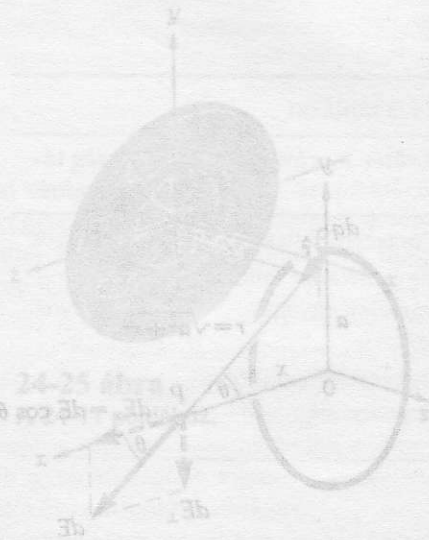
Mint ahogy $\sin\theta_0 = \frac{a}{\sqrt{a^2 + y^2}}$ és $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$,

$$E_y = \left(\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \right) \frac{\lambda a}{y\sqrt{a^2 + y^2}} \quad (24-21)$$

Vizsgáljunk meg egy határesetet: Úgy gondoljuk, hogy a töltésektől nagyon nagy távolságból, vagyis ha $y \gg a$, a töltésekből alkotott vonaldarab pontszerű töltésnek látszik és $Q = \lambda(2a)$, továbbá inverz négyzetes távolságfüggést várunk. Valóban, a (24-21) egyenlet az $y \gg a$ esetben az

$$E_y = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{Q}{y^2} \quad [\text{ha } y \gg a]$$

alakúra egyszerűsödik. A feladatok megoldásainak ellenőrzése a határesetek vizsgálata sok esetben egyszerű és hasznos módszer lehet.



A) Egy végtelen töltéseloszlás egy részének általános töltés eloszlása a P pontban az E_y erősséget hoz létre.

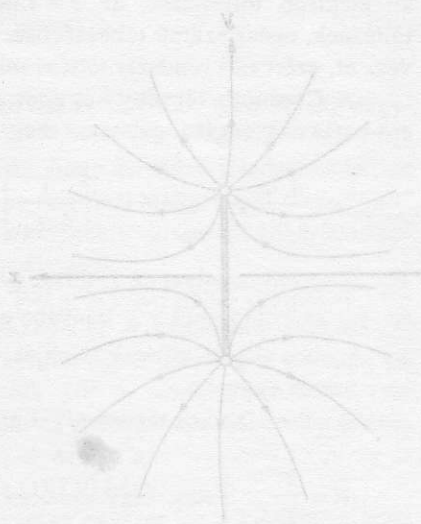
24-9 PÉLDA

Számítsuk ki az E térerősséget a végtelen hosszú, egyenes λ töltéssűrűségű egyenesről r távolságban.

MEGOLDÁS

A szimmetria miatt a térerősség mindenütt merőleges az egyenes töltéssűrűségű egyenesre. (Indoklás: a töltéseloszlásnak nincs aszimmetriája, ami miatt az erővonalak akár $+x$, akár $-x$ irányban görbülnek. Arra sincs semmi ok, hogy az erővonalak az egyenes köré hajoljanak. Következésképpen az erővonalak csak sugárirányúak lehetnek.) A számítás ugyanazt a gondolatmenetet követi, mint az előző példában; azonban, az y paramétert itt r helyettesíti; továbbá, az integrálást $q = -90^\circ$ és $q = +90^\circ$ határok között végezzük el (vagy $\theta = 0^\circ$ és $\theta = +90^\circ$ határok között, és a kapott érték kétszeresét vesszük). Így, a térerősség:

$$E_r = \frac{2k\lambda}{r} \sin\theta \Big|_0^{90^\circ} = \frac{2k\lambda}{r}$$



B) Az elektromos erőkter közelítő ábrája az xy síkban.

24-24 ábra
A 24-10 példához

VÉGTELEN HOSSZÚ
EGYENES MENTÉN
EGYENLETESEN ELHE-
LYEZKEDŐ TÖLTÉSEK
ELEKTROMOS ERŐTE-
RÉNEK A TÉRERŐSSÉGE

$$E_r = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \quad [\text{sugárirányú (24-22) erőtér}]$$

24-10 PÉLDA

Számítsuk ki az \mathbf{E} térerősséget egy vékony, egyenes töltéseloszlású, Q töltésű, r sugarú szigetelő körgyűrű tengelyén, a gyűrű középpontjától x távolságra lévő P pontban (24-24 ábra).

MEGOLDÁS

Olyan problémák megoldásakor, amelyek töltéseloszlásokat tartalmaznak, először ki kell választani azokat a dq töltéselemeket, amelyekről származó dE térerősségelemeket kiszámítjuk a vizsgált pontban; a teljes \mathbf{E} térerősséget az utóbbiak összegzésével kapjuk meg.

Vegyük észre a töltéseloszlás szimmetriáját. Minden egyes dq töltéselemhez található egy ugyanakkora dq elemet, a gyűrű másik oldalán. Az egyik dq -tól származó, az x tengelyre merőleges dE_{\perp} komponensét éppen semlegesíti a másik dq éppen ellentétesen egyenlő dE_{\perp} komponense. Tehát, ha az összes dE_{\perp} komponensét összegezzük, zérus eredőt kapunk. Így hát csak az x tengely irányába eső dE_x komponenseket kell összegeznünk, ami viszont skaláris integrálást jelent. Coulomb törvényét vektor alakban felírva:

$$d\mathbf{E} = k \frac{dq}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

A $d\mathbf{E}$ vektorok abszolút értékére az alábbi egyenlet írható fel:

$$dE = \frac{kdq}{(a^2 + x^2)}$$

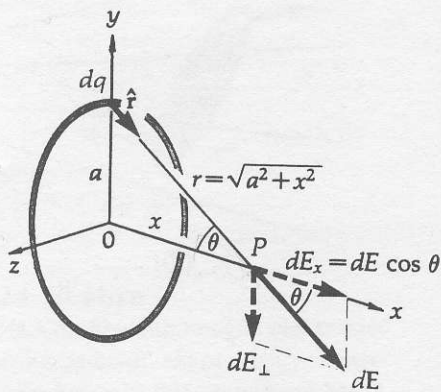
$$\text{Az } x \text{ komponens: } dE_x = \frac{kdq}{(a^2 + x^2)} \cos\theta = \frac{kdq}{(a^2 + x^2)} \left(\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} \right)$$

$$\text{Így} \quad E_x = \int dE_x = \int \frac{kxdq}{(a^2 + x^2)^{3/2}}$$

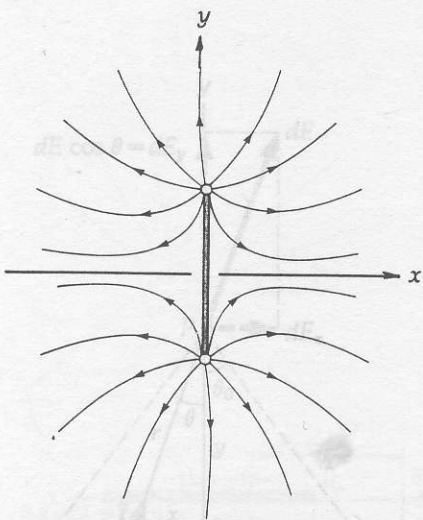
A körgyűrű mentén történő integrálás során mindegyik tényező konstans, és minthogy $\int dq = Q$, valamint $k = 1/4\pi\epsilon_0$:

$$E_x = \frac{kx}{(a^2 + x^2)^{3/2}} \int dq = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{xQ}{(a^2 + x^2)^{3/2}} \quad (24-23)$$

Az eredmény ellenőrzésére, vizsgáljunk meg két határesetet: Ha $x \rightarrow 0$, azaz, ahogy a gyűrű középpontja felé tartunk, $E \rightarrow 0$. Ez várható is, a középpontban ugyanis valamely töltéselem létrehozta dE -hez mindig találunk egy ellentétes irányú $-dE$ komponenset, amely a körgyűrű átellenes részének töltéselemétől származik. Szimmetriaokokból tehát, ha az összes ilyen térerősség-vektorpárt összegezzük, azt találjuk, hogy a középpontban $E = 0$. A másik határeset az, ha $x \gg a$. A tengelyen lévő, a gyűrűtől nagyon nagy



- a) Egyenes töltéseloszlású gyűrű. A dq elemi töltés a P pontban $d\mathbf{E}$ térerősséget hoz létre.



- b) Az elektromos erőtér közelítő szerkezete az xy síkban.

24-24 ábra

A 24-10 példához.

távolságban lévő pontból a gyűrű töltése pontszerű töltésnek látszik. A 24-13 egyenlet ezzel összhangban az alábbi alakúra egyszerűsödik, ha $x \gg a$:

$$E \Rightarrow \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{Q}{x^2}$$

Az elektromos erőkter szerkezetét a 24-24b ábra illusztrálja.

24-11 PÉLDA

Sima, nem vezető, R sugarú korong egyik körlapján σ homogén felületmenti töltéssűrűség van. Számítsuk ki az E elektromos térerősséget a korong tengelye mentén, attól x távolságban lévő P pontban. (24-25 ábra).

MEGOLDÁS

Felhasználva az előző példa megoldásának módszerét és eredményét, a korongot tekintjük r sugarú és dr szélességű gyűrűkből összeállítottnak. Szimmetriai okok miatt, az x pontban minden egyes gyűrű dE térerőssége az x tengely pozitív irányába mutat, így az egyes gyűrűk által létrehozott dE térerősségek összegezése egyszerű skalár integrálás, melynek eredményeként kapjuk meg az eredő E_x térerősséget.

Írjuk fel az r sugarú és dr szélességű gyűrűk töltésétől eredő dE térerősséget. A gyűrűk dA területe $dA = 2\pi r dr$, és az egyes gyűrűk dq töltése $dq = \sigma dA = 2\sigma\pi r dr$. A (24-23) egyenlet szerint a dq töltésű gyűrű által létrehozott dE_x térerősséget az alábbi egyenlet adja meg (a helyett r -et, Q helyett dq -t írva):

$$dE_x = \frac{kx dq}{(r^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{kx 2\pi\sigma r dr}{(r^2 + x^2)^{3/2}}$$

A teljes E_x térerősséget az összes gyűrűtől származó térerősség-tagok összegzésével kaphatjuk meg (végyük észre, hogy x konstans):

$$E_x = kx 2\pi\sigma \int_0^R \frac{r dr}{(r^2 + x^2)^{3/2}}$$

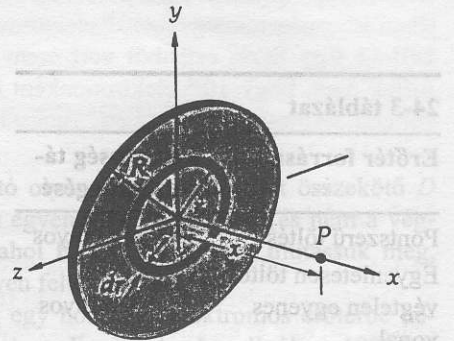
A II-G Függelékben leírtak szerint az integrál értéke

$$E_x = kx 2\pi\sigma \left(\frac{-1}{\sqrt{r^2 + x^2}} \right) \Bigg|_0^R$$

A határok konkrét értékét behelyettesítve azt kapjuk, hogy

$$E_x = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} \right) \quad (24-24)$$

Tekintsünk két határesetet. Elsőként vizsgáljuk meg, hogy milyen a térerősség a korongtól nagy távolságban (azaz ha $x \gg R$), annak tengelye mentén. Evégett a (24-24) utolsó tagjának számlálóját is, nevezőjét is osszuk el x -szel:



24-25 ábra
A 24-11 példához.

24-3 táblázat

Erőtér forrása	Térerősség távolságfüggése
Pontszerű töltés	1/r ² -tel arányos
Egyenletesen töltött végtelen egyenes vonal	1/r-rel arányos
Egyenletesen töltött végtelen sík	konstans

$$E_x = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{R}{x}\right)^2 + 1}} \right)$$

Az $(1 + b^2)^{-1/2} \cong 1 - b^2/2$ (ha $b^2 \ll 1$) közelítést alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$E_x \cong \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\frac{R^2}{2x^2} \right) = \frac{\sigma \pi R^2}{4\pi\epsilon_0 x^2} = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{Q}{x^2}$$

(Nagyon messze a korongtól)

ami a $Q = \sigma \pi R^2$ pontszerű töltésre vonatkozó Coulomb törvény. (Tulajdonképpen éppen ezt vártuk.)

A másik határesetben legyen $x \rightarrow 0$, (vagy analóg módon, $R \rightarrow \infty$); vagyis, a térerősség legyen olyan, mint egy végtelen nagy töltött sík közelében. Az $x \rightarrow 0$ határesetben a (24-24) az alábbi alakúra egyszerűsíthető:

$$E_x \cong \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad \text{[Nagyon közel a tárcsához]}$$

Az eredmény érdekes, ugyanis azt mutatja, hogy az elektromos erőtér homogén, és nem függ a töltött síktól való távolságtól. A következő fejezetben Gauss törvényének alkalmazásával ezt az eredményt egyszerűbben is levezetjük.

A 24-3 táblázatban néhány egyszerű geometriájú töltéseloszlás által létrehozott elektromos térerősség távolságfüggését foglaltuk össze.

Összefoglalás

A **q elektromos töltés**, (melynek nagyságát *coulomb* (C) egységben adjuk meg) pozitív és negatív lehet. A természetben előforduló töltések nagysága mindig az elektron töltésének, az $e = 1,602 \times 10^{-19} \text{ C}$ elemi töltésnek, egész számú többszöröse. Mivel töltés nem vész el, ezért zárt rendszer töltése mindig állandó.

A **Coulomb törvény** két pontszerű töltés közötti erő-hatás nagyságát fogalmazza meg:

$$F_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}_{12} \quad \text{ahol } k = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \cong 9 \times 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}$$

F_{12} az az erő, amelyet az 1. töltés gyakorol a 2. töltésre; \hat{r}_{12} az 1. töltésből a 2. irányába mutató egységvektor. Azonos előjelű töltések taszítják, ellentétes előjelűek vonzzák egymást.

Az **E elektromos térerősséget** az

$$E = \frac{F}{q_0} \quad \left[\text{vagy, még pontosabban: } E = \lim_{q_0 \rightarrow 0} \frac{F}{q_0} \right]$$

képlet definiálja, ahol q_0 tetszőleges kicsiny pozitív töltés. Az E térerősségű helyen a q pontszerű töltésre $F = qE$ erő hat. Különböző töltésektől eredő elektromos erők és térerősségek vektorként adódnak össze – ezt nevezzük a **szuperpozíció elvének**. Az üres téren át távolba ható elektromos erők értelmezésére bevezetett E elektromos térerősség a fizika egyik legfontosabb fogalmává vált.

Az **elektromos térerősségvonalak** (vagy erővonalak) olyan képzeletbeli vonalak, amelyeket az elektromos erőtér szerkezetének és tulajdonságainak szemléltetésére szerkesztünk meg. A térerősség vonalak mindig a pozitív töltésen kezdődnek és a negatív töltésen végződnek. Az elektromos térerősség, az erőtér bármely tartományában arányos az erővonalakra merőlegesen elhelyezkedő egységnyi nagyságú felületen áthaladó erővonalak számával.

Az **elektromos dipólus**: Két azonos nagyságú, ellentétes előjelű, egymástól ℓ távolságra lévő pontszerű töltés.

Az elektromos dipólusmomentum $p = q\ell$ (ahol ℓ a $-q$ -ból $+q$ -ba mutató vektor)

Az E térerősségű elektromos erőtérbe helyezett dipólusra ható **forogatónyomaték**: $M = p \times E$

Az E térerősségű elektromos erőtérbe helyezett dipólus **potenciális energiája**: $U = -(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E})$ (ahol $U \cong 0$, ha \mathbf{p} és \mathbf{E} merőlegesek egymásra)

A folytonos töltéeloszlásokat a λ , σ , ill. ρ görög betűkkel jelöljük.

Töltéseloszlás	Jellemző paraméter	SI egység	Töltéselem
Vonal mentén	λ , egységnyi hosszra jutó töltés	C/m	$dq = \lambda dx$
Felület mentén	σ , egységnyi felületre jutó töltés	C/m ²	$dq = \sigma dA$
Térfogatban	ρ , egységnyi térfogatra jutó töltés	C/m ³	$dq = \rho dV$

Kérdések

1. Ha felfújtt léggömbre töltéseket juttatunk, a gömb mérete kissé megnő. Miért?
2. Az elektromos erővonalak miért nem keresztezhetik egymást? Miért nem alkothatnak zárt hurkokat?
3. Tekintsünk egy inhomogén elektromos erőteret (melyben az erővonalak görbültek). Engedjük el egy eredetileg nyugalomban lévő elektront valahol ebben a térben. Magyarázzuk meg, hogy az elektron miért nem az erővonalak irányában fog mozogni.
4. Egy elektron az elektromos térerősségvonalakra merőlegesen mozog. Hat-e erő az elektrorra? Milyen az erővonalakkal párhuzamosan mozgó elektronok mozgása?
5. Két, tetszőleges előjelű és (nem zérus) nagyságú töltés egymástól D távolságra helyezkedik el. Va-

Feladatok

24.4 A Coulomb törvény

24A-1 Számítsuk ki, mennyi elektront kellene a Földre és a Holdra juttatni, hogy az ezek által létrehozott tasztítóerő éppen egyenlő legyen a Föld és a Hold közötti vonzóerővel?

24A-2 Képzeljünk el két tárgyat; legyen mindkettőn 1 C pozitív töltés; távolságuk legyen egyenlő New York és San Francisco közötti távolsággal (kb. 4140 km). Mekkora a két tárgy közötti tasztítóerő?

24A-3 Számítsuk ki a hidrogénatomban lévő proton és elektron között ható elektrosztatikus és gravitációs erők arányát.

24A-4 Két hélium atommag (melyek két protonból és két neutronból épülnek fel) egymástól 5×10^{-14} m távolságra helyezkednek el. a) Számítsuk ki a Coulomb-tasztítóerőt közöttük. b) Számítsuk ki a közöttük ható gravitációs vonzóerőt. c) Ha az atommagok szabadon mozoghatnak, mekkora mindegyiknek a kezdeti gyorsulása?

24A-5 Tekintsünk egy $+3 \mu\text{C}$ töltést, amely az $x = 4$ cm, $y = 0$ pontban valamint egy $-2 \mu\text{C}$ töltést, amely az $x = 0$, $y = 5$ cm koordinátájú pontban helyezkedik el. Számít-

Ha töltéseloszlásoktól származó térerősséget számítunk, kiválasztjuk a dq elemi töltést, majd kiszámítjuk az attól származó $d\mathbf{E}$ elemi térerősséget a vizsgált pontban. A teljes térerősség kiszámítására az összes elemi vektort összegezzük:

$$\mathbf{E} = \int d\mathbf{E} = k \int \frac{dq}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

Szimmetriamegfontolásokkal gyakran nagymértékben leegyszerűsíthetjük a számításokat.

jon található olyan pont a töltéseket összekötő D hosszúságú egyenes vonalon kívül (és nem a végételenben), ahol $\mathbf{E} = 0$? Ha igen, mutassuk meg, hol, és milyen feltételek esetén?

6. Tekintsünk egy homogén elektromos erőterbe helyezett dipólust. Fordítsuk el a dipólust 180° -kal (azaz a dipólusmomentumvektor az eredetihez képest legyen ellentétes irányú). Füg-g-e az elfordításhoz szükséges munkavégzés nagysága a dipólusvektornak a térerősséghez viszonyított eredeti orientációjától és az elfordítás síkjától?
7. A 24A-1 feladatban vajon számít-e az, ha az elektronokat a Föld és a Hold között egyenlően vagy egyenlőtlenül osztjuk el? Mi a helyzet akkor, ha csak egy elektront juttatunk a Holdra, a többi pedig a Földre? És ha az összes elektront a Földre juttatjuk?

suk ki, mekkora erő hat az origóban lévő $+6 \mu\text{C}$ nagyságú töltésre.

24A-6 Számítsuk ki, hogy az előző feladatban leírtak esetében mekkora az origóban a térerősség, ha a $+6 \mu\text{C}$ töltés nincs ott. Ellenőrizzük a választ a 24A-5 feladatra adott válasz felhasználásával.

24B-7 Két kicsiny, 100 g-os ezüst gömb egymástól 1 m-es távolságra helyezkedik el. Az ezüstgömb elektronjainak hanyadrészt kell az egyik gömbről a másikra átvinni, hogy közöttük 10^4 N vonzóerő hasson? (Az ezüstben atomonként 47 elektron van, és az egy gramm ezüstben lévő atomok száma az Avogadro szám és az ezüst atomsúlyának (107,9) hányadosa.)

24B-8 Richard Feynman egyszer azt a kijelentést tette, ha két ember karnyújtásnyira állna egymástól és mindkettőnek 1%-kal több elektronja lenne, mint protonja, a közöttük ható tasztítóerő akkora lenne, amivel egy Földnyi súlyt fel lehetne emelni. Igazolandó ezt az állítást, végezzünk el nagyságrendi becslést.

24B-9 Két pontszerű töltés a következőképpen helyezkedik el: egy $-3 \mu\text{C}$ töltés az origóban, és egy $+2 \mu\text{C}$ töltés attól $x = 0,15 \text{ m}$ távolságban. Keressük meg azt a helyet, ahol egy pozitív q' ponttöltésre ható erő zérus.

24B-10 Ha az anyag protonjainak és elektronjainak száma nem lenne pontosan azonos, akkor a csillagászati objektumok között elektrosztatikus taszítóerő lépne fel, amely esetleg nagyobb is lehetne, mint a közöttük ható gravitációs vonzóerő. Számítsuk ki, hogy kb. mennyivel kellene az egyik töltésfajtából többnek lennie mint a másiknak, hogy ez bekövetkezzen. Az anyag 1 kilogrammjában átlagosan mintegy 3×10^{26} elektron-proton pár van.

24B-11 Egy tiszta ezüsből vert érem tömege $2,49 \text{ g}$. Adjuk meg, hogy 10^{12} elektronként hányat kell eltávolítani, hogy az éremnek $1 \mu\text{C}$ töltése legyen? Az ezüst atomsúlya $107,870$, rendszáma 47 .

24.5 Az elektromos tér

24A-12 Fejezzük ki az elektromos térerősség egységét az SI mértékrendszer alapegységeivel (tömeg: kg; hosszúság: m; idő: s; elektromos áramerősség: A).

24A-13 Normális légköri viszonyok között, tiszta időben a föld felszíne felett az elektromos térerősség kb. 100 N/C , és a felszín felé irányul. Ha egy héliummal töltött játékléggömb éppen 50 g terhet képes felemelni, vajon mekkora töltést kell a léggömbre juttatni, hogy az még teher nélkül se tudjon felemelkedni? (Az ehhez szükséges töltés egyébként akkora, hogy a léggömbben ébredő taszítóerők elégségesek a léggömb szétrepedéséhez).

24B-14 Két, $+q$ és $-2q$ nagyságú pontszerű töltés helyezkedik el egymás közelében. Vázoljuk fel a két töltés környezetében az erővonalstruktúrát, figyelembe véve, hogy az egyik töltéshez kétszer annyi erővonal tartozik, mint a másikhoz.

24B-15 Egy homogén elektromos erőter térerőssége (derékszögű koordináta-rendszerben) $\mathbf{E} = E_0 \hat{y}$, ahol E_0 konstans. Egy m tömegű és $+q$ töltésű részecskét juttatunk a koordináta-rendszer origójába, $\mathbf{v} = v_0 \hat{x}$ sebességgel. Számítsuk ki a részecske pályájának az egyenletét.

24.6 Az elektromos dipólus

24A-16 Számos molekulának van elektromos dipólusmomentuma, mert a pozitív töltések (protonok) tömegközéppontja nem esik egybe a negatív töltésekével (elektronokéval). A vízmolekula dipólusmomentuma gázfázisban $6,24 \cdot 10^{-30} \text{ Cm}$. a) Számítsuk ki a vízmolekulára ható maximális forgatónyomatékat 10 N/C térerősségű elektromos erőterben. b) Számítsuk ki, hogy milyen nagyságrendű a vízmolekula dipólusának potenciális energiája ebben az erőterben.

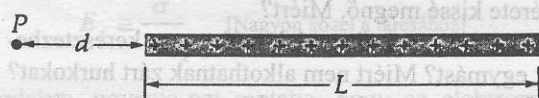
24A-17 A nátrium-fluorid molekula elektromos dipólusmomentuma $2,72 \cdot 10^{-29} \text{ Cm}$. Feltételezve egy túlegyszerűsített modellt, hogy ebben a molekulában az atomok mint egymástól független Na^+ és F^- ionok vannak jelen,

mekkora a két ion középpontjának a távolsága? (A pontos érték $1,93 \cdot 10^{-10} \text{ m}$.)

24B-18 A 24-11 ábra azt illusztrálja, hogyan lehet fűmagok segítségével az elektromos erőteret láthatóvá tenni, szemléltetni. Magyarazzuk meg, miért és hogyan állnak be a kicsiny, hosszúkás, szigetelő részecskék az elektromos erőter irányába.

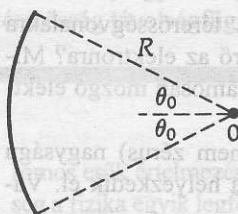
24.7 Töltéseloszlások elektromos erőtere

24B-19 A $+Q$ töltés egy L hosszúságú egyenes szakasz mentén oszlik el egyenletesen. Számítsuk ki az E elektromos térerősséget a vonal irányában lévő, annak végpontjától d távolságra lévő P pontban (24-26 ábra).



24-26 ábra

A 24B-19 feladathoz



24-27 ábra

A 24B-20 feladathoz

24B-20 Egy vékony, nem vezető rudat a 24-27 ábrán vázolt módon meghajlítunk úgy, hogy az egy R sugarú kör íve legyen, mely e kör középpontjából 2θ szög alatt látszik. Legyen e hajlított rúdon egyenletes pozitív λ töltéssűrűség. Számítsuk ki az E elektromos térerősséget a kör O középpontjában. (Útmutatás: számítsuk ki a $d\mathbf{l} = R d\theta$ hosszúságú szakasz dq töltésétől származó $d\mathbf{E}$ térerősséget. Használjuk ki a rendszer szimmetriatulajdonságát a $\theta = -\theta_0$ és $\theta = +\theta_0$ közötti integrál kiszámításakor.)

24B-21 Tekintsünk egy vékony, nem vezető, R sugarú korongot, amelynek egyik oldalán a felületi töltéssűrűség egyenletes eloszlásban σ . A 24-11 példában kiszámítottuk, hogy mekkora a térerősség a korong tengelye mentén, attól x távolságban. Mutassuk meg, hogy ha R végtelenhez tart (vagyis egyenletesen feltöltött végtelen lemezhez közelít), akkor a térerősséget az $E = \sigma/2\epsilon_0$ egyenlet írja le. (Vegyük észre, hogy az egyenletesen feltöltött végtelen lemez térerőssége ugyanekkora, függetlenül a siktól vett x távolságtól.)

További feladatok

24C-22 Két protont egymástól 2×10^{-13} m távolságra helyezünk el, majd elengedjük őket. a) Számítsuk ki a két proton végsebességét. b) Ha az egyik protont rögzítve tartanánk, akkor mekkora lenne a másik proton sebessége?

24C-23 Mutassuk meg, hogy két egymástól meghatározott távolságban lévő kis tárgy, amelyek között adott töltésmennyiség oszlik meg, akkor taszítja egymást a legnagyobb erővel, ha a töltés egyenlően oszlik meg közöttük.

24C-24 A $-e$ elektrontöltés első pontos meghatározását 1909 és 1917 között R. A. Millikan végezte el oly módon, hogy kicsiny feltöltött olajcseppecskék levegőben való mozgását vizsgálta. Vízszintes fémlemezek között függőleges elektromos erőtér létesített, akkorát, hogy a töltött cseppekre ható elektromos erőtér éppen kiegyenlítsa a gravitációs erőt. Ebből (és más mérésekből) Millikan meg tudta határozni a különböző cseppek ($-e, -2e, -3e \dots$) töltésének legnagyobb közös osztóját, azaz azt a legkisebb töltésmennyiséget (az elektron töltését), amellyel a cseppek töltése növekedhetett vagy csökkenhetett. Egy tipikus kísérletben, az $1,9 \times 10^{-13}$ N súlyú csepp akkor lebegett éppen, ha az egymástól 3 mm-re lévő fémlemezek közé 1200 V feszültségkülönbséget kapcsolt. a) Hány többlet-elektron van ilyenkor a cseppen? b) Ha az olaj sűrűsége 920 kg/m^3 , mekkora a csepp sugara?

24C-25 Millikan előző feladatban leírt olajcseppek kísérletében az olajcseppek olyan kicsinyek, hogy a megfigyelésre használt mikroszkóp látóterében csak mint fénylő pontok jelennek meg. Azért, hogy a cseppek sugarát (és innen a tömegüket) meghatározhassuk, a cseppek szabadesését vizsgáljuk. A (viszkózus) levegő az r sugarú, egyenletes v sebességgel eső olajcseppekre F fékezőerőt gyakorol, melynek nagyságát Stokes törvényével határozhatjuk meg: $F = 6\pi\eta r v$, ahol η a viszkozitási együttható. a) Mi η SI mértérendszerbeli egysége? b) Mutassuk meg, hogy amikor a beeső csepp eléri konstans végsebességét (amikor a viszkozitásból eredő fékezőerő éppen ellentétesen egyenlő a gravitációs erővel), akkor érvényes az alábbi egyenlet, amiből a szabadon eső csepp sugara meghatározható.

$$v = \frac{2gr^2}{9\eta} (\rho_0 - \rho_1)$$

Itt ρ_0 és ρ_1 az olaj, illetve a levegő sűrűsége.

24C-26 Két (fix helyzetű) $+Q$ nagyságú ponttöltés egymástól d távolságra helyezkedik el. Egy harmadik, pozitív q töltést a két előbbi töltést összekötő egyenes mentén mozgatunk. a) Mutassuk meg, hogy ha a q töltést egyensúlyi helyzetéből kissé (x távolságnyra, $x \ll d$) kimozdítjuk, akkor közelítőleg egyszerű harmonikus rezgő mozgást végez. b) Számítsuk ki az ehhez a mozgáshoz rendelhető k „rugóállandót”.

24C-27 Számítsuk ki azt a munkát, ami ahhoz szükséges, hogy egy R sugarú gömb felszínére Q töltést juttassunk. A feltöltést végezzük úgy, hogy infinitezimális dq elemi töltést viszünk a végtelenből a gömb felszínére mindaddig, amíg a gömb töltése a Q -t el nem éri.

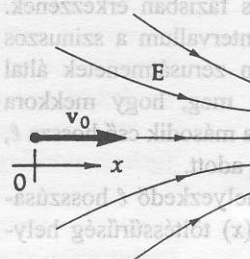
24C-28 Vízszintes irányban mozgó és $v = 8 \times 10^6$ m/s sebességű elektron a 24-28 ábrán vázolt két vízszintes eltérítő lemez közé repül. A lemezek 3 cm hosszúak, és a közöttük lévő távolság 1,5 cm; közöttük 40 V potenciálkülönbség van. Számítsuk ki azt a θ szöveget, amelyet a lemezek közül éppen kilépő elektron sebességvektorának iránya a vízszintessel bezár. Hanyagoljuk el azt, hogy a lemezek szélénél az erőtér inhomogén.



24-28 ábra

A 24C-28 feladathoz

24C-29 Miként az a 24-29 ábrán látható, egy elektron, amelynek az $x_0 = 0$ helyen $v_0 = 10^6$ m/s a kezdősebessége, az x tengely pozitív irányában halad olyan tértartományban, ahol az elektromos térerősséget az $E_x = (4 \text{ V/m}) \times (1 + 10^3 x)$ függvény adja meg (az x távolságot méterben kell megadni). Számítsuk ki azt a távolságot, ahol az elektron sebessége (legalábbis egy pillanatra) zérussá válik.



24-29 ábra

A 24C-29 feladathoz

24C-30 Az $x = +l/2$ pontban és az $x = -l/2$ pontban elhelyezkedő $+q$ és $-q$ töltés dipólust alkot. a) Vezessük le a térerősség $E(x)$ kifejezését x pozitív értékeire. b) Mutassuk meg, hogy ha $x \gg l$, akkor az elektromos térerősség $1/x^3$ -al arányos.

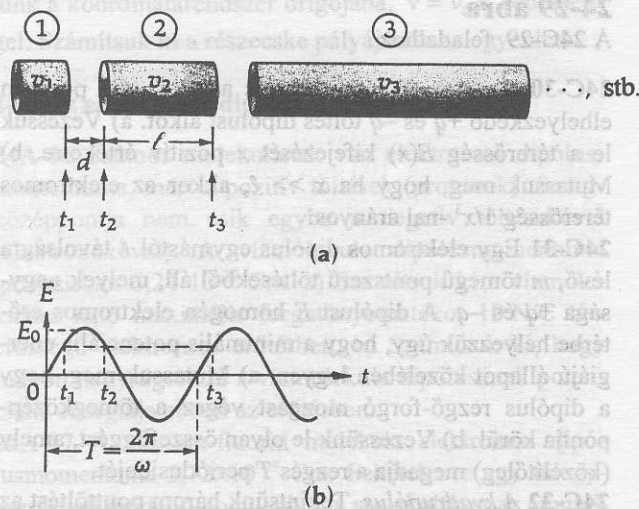
24C-31 Egy elektromos dipólus egymástól l távolságra lévő, m tömegű pontszerű töltésekből áll, melyek nagysága $+q$ és $-q$. A dipólust E homogén elektromos erőtérbe helyezzük úgy, hogy a minimális potenciális energiájú állapot közelében legyen. a) Mutassuk meg, hogy a dipólus rezgő-forgó mozgást végez a tömegközéppontja körül. b) Vezessük le olyan összefüggést, amely (közelítőleg) megadja a rezgés T periódusidejét.

24C-32 A kvadrupólus. Tekintsünk három ponttöltést az xy síkban: legyen egy $-2q$ töltés az origóban, egy $+q$

töltés az $y = +\ell/2$ pontban és egy másik $+q$ töltés az $y = -\ell/2$ pontban. Az ilyen töltésrendszer neve *elektromos kvadrupól*. Vezessünk le olyan összefüggéseket, amelyek megadják, hogy az elektromos térerősség hogyan függ a) x -től az x tengely mentén; b) y -től, az y tengely mentén. c) Határozzuk meg E irányát mindkét esetben. d) Mutassuk meg, hogy a fenti két esetben, ha x vagy y sokkal nagyobb ℓ -nél, $E \sim 1/r^4$.

24C-33 Az e töltésű, m tömegű pozitív töltésű részecskék felgyorsíthatók a 24-30 ábrán illusztrált lineáris gyorsítóban, amely vákuumrendszerben lévő, egyre növekvő hosszúságú koaxiális hengeres fémcsövek sorozatából áll. A hengerek felváltva csatlakoznak egy nagyfrekvenciás feszültségforrás két pólusához. A részecskékre az egyes csövek belsejében (ahol a potenciál konstans, tehát a térerősség zérus) erő nem hat; az egyes csövek közötti hézagban a részecskékre $eE_0 \sin(\omega t)$ időben változó erő hat. A részecskék gyorsításának feltétele, hogy a 24-30 ábrán t_1 -gyel jelölt időpontban érjenek a csövek közötti hézagba, amikor (t_1 és t_2 időpontok között) a gyorsító tér maximális. A részecske t_1 időpontban v_1 sebességgel kilép az 1. csőből, a hengerek közötti térrészben felgyorsul, majd a t_2 időpontban belép a következő csőbe, ahol egy újabb állandó sebességgel halad, mialatt a cső (szinuszos) potenciálja előjelet vált. A részecske t_3 időpontban érkezik a második cső végéhez, ahol is megint maximális gyorsítóter hat rá. A csövek és a közöttük lévő hézagok úgy vannak méretezve, hogy a részecskék az egymásutáni hézagokhoz mindig a (szinuszos) gyorsítófeszültséggel azonos fázisban érkezzenek. Tételezzük fel, hogy a $t_2 - t_1$ időintervallum a szinuszos feszültség periódusidejének éppen zérusátmenetek által határolt egynegyede. Határozzuk meg, hogy mekkora legyen d , az első hézag hossza, és a második cső hossza ℓ , ha a többi paraméter v_1 , e , m , ω , E_0 adott.

24C-34 Az x tengely mentén elhelyezkedő ℓ hosszúságú, vékony, szigetelő rúdon a $\lambda(x)$ töltéssűrűség hely-



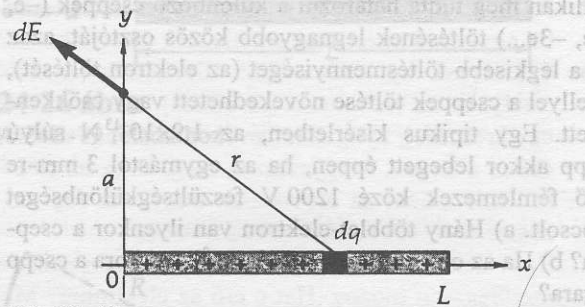
24-30 ábra
A 24C-33 feladathoz

függését a $\lambda(x) = Ax$ összefüggés írja le. A rúd végétől ℓ távolságra egy q pontszerű töltés helyezkedik el az x tengelyen (24-31 ábra). a) Mi az A állandó SI mértékegysége? b) Mekkora a töltés helyén az elektromos térerősség x komponense?



24-31 ábra
A 24C-34 feladathoz

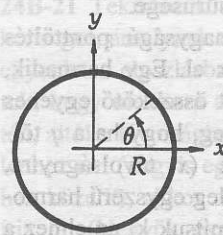
24C-35 Tekintsünk az $x = 0$ és $x = L$ pontok között, az x tengely mentén egy λ pozitív lineáris töltéssűrűséget (24-32 ábra). a) Számítsuk ki az E elektromos térerősség y komponensét az $x = 0$, $y = a$ pontban; b) Számítsuk ki az elektromos térerősség x komponensének értékét ugyanebben a pontban.



24-32 ábra
A 24C-35 feladathoz

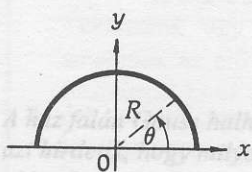
24C-36 Egy R sugarú körgyűrűn $+Q$ teljes töltés, a gyűrű középpontjában pontszerű $-q$ negatív töltés van. Ha a $-q$ töltést a gyűrű tengelye mentén kissé kimozdítjuk, majd elengedjük, akkor a gyűrű tengelye mentén rezgőmozgást végez (feltéve, hogy a tengelyvonalból való kimozdulást valamilyen módon megakadályozzuk). Adjuk meg a rezgés f (közelítő) frekvenciáját. (Felhasználhatjuk a 24-10 feladat eredményét is.)

24C-37 Egy vékony, nem vezető, R sugarú gyűrűn nem egyenletes a λ lineáris töltéssűrűség: azaz $\lambda = \lambda_0 \sin\theta$, ahol a θ szög a 24-33 ábra szerint értelmezendő. a) Vázzuk a gyűrű töltéseloszlását. b) Milyen az E elektromos térerősség iránya a gyűrű középpontjában? c) Mutassuk meg, hogy az elektromos térerősség nagysága a gyűrű középpontjában $\lambda_0 / (4\epsilon_0 R)$.



24-33 ábra
A 24C-37 feladathoz

24C-38 Tekintsünk egy vékony, nem vezető, R sugarú félkör alakúra hajlított rudat, melyen a λ lineáris töltéssűrűség nem egyenletes: $\lambda = \lambda_0 \sin 2\theta$, ahol a θ szög a 24-34 ábra szerint értelmezendő. a) Vázzuk a meghajlított rúdon a töltéseloszlást. b) Milyen az E elektromos térerősség iránya az O pontban, a félkör középpontjában? c) Számítsuk ki az elektromos térerősség nagyságát az O pontban.

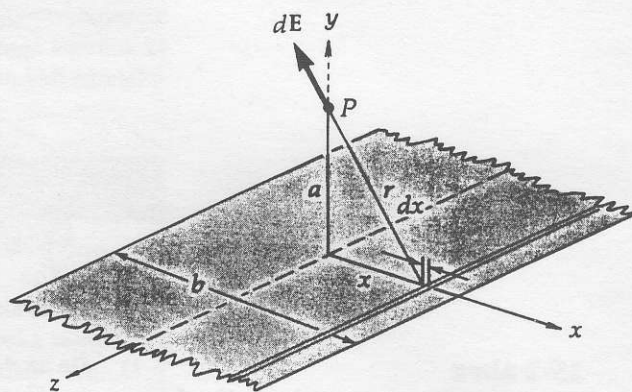


24-34 ábra

A 24C-38 feladathoz

24C-39 Tekintsünk egy egyenesen feltöltött R sugarú körgyűrűt, és annak tengelye mentén az elektromos teret. Mutassuk meg, hogy a térerősség maximuma $(E_x)_{\max}$ a tengelyen, a gyűrű középpontjától $x = R/\sqrt{2}$ távolságban van. Vázzuk E változását x függvényében (negatív és pozitív x értékekre). (Felhasználhatjuk a 24-10 feladat eredményét is.)

24C-40 Egy b szélességű, hosszú, vékony, nem vezető feltöltött szalag mindkét oldalán a felületmenti töltéssűrűség σ . Számítsuk ki az E elektromos térerősséget a szalag középvonala feletti a távolságban (24-35 ábra).



24-35 ábra

A 24C-40 feladathoz

Útmutatás: tekintsük a szalagot feltöltött rudak együttesének. Mutassuk meg, hogy egy dx vastag rúd mentén a lineáris töltéssűrűség $2\sigma dx$. Minden egyes rúd a P pontban dE térerősséget hoz létre (vö. a 24-8 példában leírtakkal).

24C-41 Egy nemvezető anyagból készült, homogén töltéseloszlású karika középpontjában a térerősség zérus. Miért? Tekintsünk egy R sugarú karikát, amelynek teljes töltése $+Q$. A karikából egy ℓ hosszúságú darabot kivágunk. Határozzuk meg, hogy mekkora a térerősség a megmaradt körív középpontjában.

ből indulnak és a negatívokhoz tartanak, így tehát az erővonalak iránya meg egyezik a térerősség irányával. A térerősségvonalak voltaképpen fiktívek; a valóságban nem léteznek, viszont kiűző segédeszközök az elektromos erőterrel kapcsolatos fogalmaink kialakításakor. Szemben a térerősség-vonalakkal, az elektromos térerősség létezik; a térerősség minden egyes pontjában a térerősségnek meghatározott nagysága és iránya van, amit (legalábbis elvileg) kísérleti úton megmérhetünk egy kis q töltés odahelyezésével.

A következőkben az erővonalak értelmezését még kvantitatívabbá tesszük, és eljutunk egy nagyon hasznos törvényhez, a Gauss-törvényhez, amely újabb módszert kínál az elektromos erőterek meghatározására. Ezt elsősorban szimmetrikus töltéseloszlások esetében, sokkal könnyebb alkalmazni, mint a 24. fejezetben leírt Coulomb-törvényt.

25.2 Az elektromos fluxus

A továbbiakban az erővonalak értelmezését oly módon terjesztjük ki, hogy ne csak szemléletes, hanem kvantitatív is legyen. Defináljuk az *elektromos fluxus* fogalmát, ami lényegében az adott felületet metsző erővonalak száma. Tekintsünk egy E térerősségű homogén erőteret, és egy képzeletbeli, a térre merőleges A felületet (25-1 ábra). Ezen felület Φ_E elektromos fluxusát az alábbi formulával definiáljuk:

$$\Phi_E = EA \quad (25-1)$$

Alkalmanként olyan felületek is szerepelnek egyenleteinkben, amelyek nem merőlegesek az erővonalakra. Ha a sík felület nem merőleges az erővonalakra, mint az a 25-2 ábrán látható, viszonylag kevesebb erővonal metszi a



25-1 ábra

Az A területű síklap merőleges az E térerősségű homogén elektromos erőterre. Ezen a felületen az elektromos fluxus $\Phi_E = EA$.

AZ 24–45 FEJEZETEK PÁRATLAN SZÁMOZÁSÚ FELADATAINAK MEGOLDÁSAI

XXIV. Fejezet

- 24A-1 649 kg
 24A-3 $2,27 \times 10^{39}$
 24A-5 110 N 157°-ra a +x tengelytől
 24B-7 $2,51 \times 10^{-10}$
 24B-9 $x = 0,817$ m
 24B-11 9,55 elektront
 24A-13 $4,90 \times 10^{-3}$ C
 24B-15 $y = (qE_0/2mv_0^2)x^2$
 24A-17 $1,70 \times 10^{-10}$ m
 24B-19 $Q/4\pi\epsilon_0 d(d+L)$
 24B-21 A válasz adott.
 24C-23 A válasz adott.
 24C-25 A válasz adott.
 24C-27 $W = Q^2/8\pi\epsilon_0 R$
 24C-29 3,67 cm
 24C-31 $2\pi\sqrt{ml/2qE}$
 24C-33 $d = \frac{\pi}{2\omega} \left[v_1 + \frac{eE_0}{m\omega\sqrt{2}} \right] l = \frac{3\pi}{2\omega} \left[v_1 + \frac{eE_0\sqrt{2}}{m\omega} \right]$
 24C-35 a) $E_y = \lambda L/4\pi\epsilon_0 a\sqrt{L^2 + a^2}$
 b) $E_x = (\lambda/4\pi\epsilon_0) \left[(1/a) - (1/\sqrt{L^2 + a^2}) \right]$
 24C-37 A válasz adott.
 24C-39 A válasz adott.
 24C-41 $E = (Q/4\pi^2\epsilon_0 R_2) \sin(l/2R)$, a megmaradó körívttől kifelé irányítva

XXV. Fejezet

- 25A-1 a) zérus b) $3q/\epsilon_0$ c) $-2q/\epsilon_0$
 25A-3 $7,50 \times 10^{-2}$ N·m²/C
 25A-5 a) zérus b) σ/ϵ_0
 25B-7 a) px/ϵ_0 b) $pd/2\epsilon_0$
 25A-9 a) σ/ϵ_0 b) $\sigma/2\epsilon_0$
 25A-11 $-1,15 \times 10^{-9}$ C/m²

- 25B-13 b) $1,38 \times 10^7$ elektron/m³ hiány
 25C-15 a) C/m² b) $Q = k2\pi L(b-a)$
 c) $E = (k/\epsilon_0)(1-a/r)$
 25C-17 A válasz adott.
 25C-19 $E(\pi R^2)$

XXVI. Fejezet

- 26A-1 a) $2,05 \times 10^6$ m/s
 b) 12 eV, $1,92 \times 10^{-18}$ J c) 3,89 ns
 26A-3 a) $2,19 \times 10^6$ m/s c) $-13,6$ eV
 26B-5 $0,0415$ kq/a; a középpontban
 26B-7 A válasz adott.
 26B-9 $1,01 \times 10^{-19}$ N, 18,4° az x tengelyhez képest
 26B-11 $Q_0/2, 3Q_0/2$
 26B-13 A gömb belsejében $E = 0, V = -(140/3\pi\epsilon_0) \mu V$
 a gömbök közt
 $E = (80/4\pi\epsilon_0 r^2) \mu N/C$ befelé,
 $V = -(1/4\pi\epsilon_0)(80/r - 40/0,5) \mu V$
 a gömbökön kívül $E = (40/4\pi\epsilon_0 r^2) \mu N/C$,
 befelé,
 $V = -(40/4\pi\epsilon_0 r) \mu V$
 26C-15 $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 l} \ln \frac{l + \sqrt{l^2 + y^2}}{y}$
 26C-17 a) C/m⁴ b) $Q = A\pi R^4$
 c) $E = Ar^2/4\epsilon_0$ d) $r \geq R$ esetén $V = AR^4/4\epsilon_0 r$
 $r \leq R$ esetén $V = (A/12\epsilon_0)(4R^3 - r^3)$
 26C-19 2000 V
 26C-21 A válasz adott.
 26C-23 a) $2,72 \times 10^{-5}$ m
 b) $2,65 \times 10^7$ m/s és $6,19 \times 10^5$ m/s
 c) 2000 eV, $3,20 \times 10^{-16}$ J
 26C-25 a) $(q/2\pi\epsilon_0) \left\{ [x^2 + (l/2)^2]^{-1/2} - 1/x \right\}$
 b) $(q/4\pi\epsilon_0) \left[(y+l/2)^{-1} + (y-l/2)^{-1} - 2/y \right]$