Valószínűségszámítás pót zárthelyi dolgozat megoldása
2014. december 5.

1. Egy betegség kimutatásához szűrővizsgálatot végeznek. A vizsgálat a betegséget az esetek 90%-ban képes kimutatni. Ugyanakkor megesik, hogy tévesen betegnek diagnosztizál olyat is, aki egészséges. Ez az esetek 3%-ban fordul elő. A betegség a lakosság 35%-át érinti. Egy lakosról a teszt elvégzése során kiderül, hogy egészséges. Mennyi a valószínűsége, hogy valóban az?
Megoldás: B - a páciens beteg, K - kimutatják a teszttel, hogy beteg.
Adott: $\mathbf{P}(K \mid B) = 0,9; \mathbf{P}(K \mid \bar{B}) = 0,03; \mathbf{P}(B) = 0,35$
Számolható: $\mathbf{P}(\bar{B}) = 1 - \mathbf{P}(B) = 0,65; \mathbf{P}(\bar{K} \mid \bar{B}) = 1 - \mathbf{P}(K \mid \bar{B}) = 0,97; \mathbf{P}(\bar{K} \mid B) = 1 - \mathbf{P}(K \mid B) = 0,1$
Számítandó: $\mathbf{P}(\bar{B} \mid \bar{K}) = \frac{\mathbf{P}(\bar{K}|\bar{B})\mathbf{P}(\bar{B})}{\mathbf{P}(\bar{K}|\bar{B})\mathbf{P}(\bar{B})+\mathbf{P}(\bar{K}|B)\mathbf{P}(B)} = \frac{0,97\cdot 0,65}{0,97\cdot 0,65+0,1\cdot 0,35} = \frac{6305}{6655} \approx 0,95$

2. Egy magasugró versenyen a versenyzők 0,8 valószínűséggel ugorják át a lécet az induló magasságon. Mindenki háromszor próbálkozhat. Ha 12 versenyző indul, akkor jelöljük X-szel az induló magasságon végrehajtott összes ugrások számát. Számolja ki X várható értékét.
Megoldás: X_i az i-edik versenyző ugrásainak a száma a kezdő magasságon,
$R_{X_i} = \{1,2,3\}, \mathbf{P}(X_i = 1) = 0,8; \mathbf{P}(X_i = 2) = 0,2\cdot 0,8; \mathbf{P}(X_i = 3) = 1 - 0,8 + 0,2\cdot 0,8 = 0,04.$
$\mathbf{E}X_i = 1\cdot\mathbf{P}(X_i = 1) + 2\cdot\mathbf{P}(X_i = 2) + 3\cdot\mathbf{P}(X_i = 3) = 1,24$
$Y = \sum_{i=1}^{12} X_i$ az összes ugrások száma. $\mathbf{E}Y = \sum_{i=1}^{12}\mathbf{E}X_i = 12\cdot\mathbf{E}X_1 = 14,88.$

3. Legyen az X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye:

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{3x} & \text{ha } x \le 0 \\ 1-x^2 & \text{ha } 0 < x \le 1 \\ 0 & \text{ha } 0 < x \end{cases}$$

Mennyi $\mathbf{E}(3-2X) = ?$
Megoldás: $\mathbf{E}X = \int_{-\infty}^{0} xe^{3x}dx + \int_{0}^{1} x - x^3 dx = [\frac{1}{3}xe^{3x}]_{-\infty}^{0} - [\frac{1}{9}e^{3x}]_{-\infty}^{0} + \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = 0 - \frac{1}{9} + \frac{1}{4} = \frac{5}{36}$
$\mathbf{E}(3-2X) = 3 - 2\cdot\frac{5}{36} = \frac{98}{36} \approx 2,72$

4. Novemberben a hónap 30 napjából átlagosan 12-őn esik valamilyen csapadék. Mennyi a valószínűsége, hogy egy héten három nap is fog esni? (A csapadékos napok száma Poisson eloszlást követ.)
Megoldás: a.) Az egy héten várható esős napok száma átlagosan: $\lambda = 7\cdot\frac{12}{30} = 2,8.$
Így a keresett valószínűség: $\mathbf{P}(X = 3) = \frac{(2,8)^3}{6}e^{-2,8} \approx 0,222$
b.) Annak valószínűsége, hogy egy napon esni fog az eső: $p = \frac{12}{30} = 0,4.$
Az egy héten esős napok száma binomiális eloszlású: $X \in B(7, 0.4).$
$\mathbf{P}(X = 3) = \binom{7}{3}0.4^3\cdot 0.6^4 \approx 0,29$

5. Egy dobozban 3 piros, 4 fehér és 5 zöld színű golyó van. Visszatevés nélkül kiveszünk 3-at. Jelölje X a piros, Y a zöld színű golyók számát a mintában. Számolja ki az X és Y kovarianciáját!
Megoldás: Az eloszlás-táblázat:

$Y \setminus X$	0	1	2	3	Y perem
0	$\frac{4}{220}$	$\frac{18}{220}$	$\frac{12}{220}$	$\frac{1}{220}$	$\frac{35}{220}$
1	$\frac{30}{220}$	$\frac{60}{220}$	$\frac{15}{220}$	0	$\frac{105}{220}$
2	$\frac{40}{220}$	$\frac{30}{220}$	0	0	$\frac{70}{220}$
3	$\frac{10}{220}$	0	0	0	$\frac{10}{220}$
X perem	$\frac{84}{220}$	$\frac{108}{220}$	$\frac{27}{220}$	$\frac{1}{220}$	1

$\mathbf{E}Y = \frac{105+140+30}{220} = \frac{275}{220}; \mathbf{E}X = \frac{108+54+3}{220} = \frac{165}{220}$
$\mathbf{E}XY = \frac{60+30+60}{220} = \frac{150}{220}; \mathrm{cov}(X,Y) = \mathbf{E}XY - \mathbf{E}X\cdot\mathbf{E}Y = \frac{33000-45375}{48400} = -\frac{12375}{48400} \approx -0,26$