Valószínűségszámítás vizsga megoldása
Műszaki informatikus BSc
2014. december 23.

1. Négyszer dobunk egy kockával. Minden dobás után egy golyót belerakunk egy dobozba. Ha a dobás 6-os volt, akkor piros színű golyót, ha más értéket kaptunk, akkor fehér színű golyót helyezünk el benne. Ezután a dobozból kiveszünk egyszerre 2 golyót. Jelölje X a pirosak számát. Számolja ki X várható értékét!
   Megoldás: A $\mathbf{P}(X=0)$ értékét nem fogjuk felhasználni, így ki sem számoljuk.
   $\mathbf{P}(X=1) = 0\cdot\binom{4}{0}\frac{5^4}{6^4} + \frac{3}{6}\cdot\binom{4}{1}\frac{5^3}{6^4} + \frac{4}{6}\cdot\binom{4}{2}\frac{5^2}{6^4} + \frac{3}{6}\cdot\binom{4}{3}\frac{5}{6^4} + 0\cdot\binom{4}{4}\frac{1}{6^4} = \frac{250+100+10}{1296} = \frac{360}{1296}$
   $\mathbf{P}(X=2) = 0\cdot\binom{4}{0}\frac{5^4}{6^4} + 0\cdot\binom{4}{1}\frac{5^3}{6^4} + \frac{1}{6}\cdot\binom{4}{2}\frac{5^2}{6^4} + \frac{3}{6}\cdot\binom{4}{3}\frac{5}{6^4} + 1\cdot\binom{4}{4}\frac{1}{6^4} = \frac{25+10+1}{1296} = \frac{36}{1296}$
   $\mathbf{E}X = \frac{360+72}{1296} = \frac{432}{1296} = \frac{1}{3}$

2. Tekinsük a $\mathbf{P}(X=k) = (k-1)\vartheta^2\cdot(1-\vartheta)^{k-2}, k=2,3...$ ún. negatív binomiális eloszlást, ahol a ϑ paraméter az egységintervallum egy ismeretlen eleme. Tekintsünk egy n-elemű mintarealizációt ehhez az eloszláshoz. Adja meg a paraméter maximum likelihood becslését!
   Megoldás: $L(x_1,x_2,...,x_n;\vartheta) = \prod_{i=1}^{n}(x_i-1)\cdot\vartheta^2\cdot(1-\vartheta)^{x_i-2} = \vartheta^{2n}\cdot(1-\vartheta)^{\sum_{i=1}^{n}x_i-2n}\cdot\prod_{i=1}^{n}(x_i-1)$
   $l(x_1,x_2,...,x_n;\vartheta) = \ln\vartheta\cdot 2n + \ln(1-\vartheta)\cdot(\sum_{i=1}^{n}x_i-2n) + \ln\prod_{i=1}^{n}(x_i-1).$
   $\frac{\partial l}{\partial\vartheta} = \frac{2n}{\vartheta} - \frac{1}{1-\vartheta}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i-2n\right) = 0 \Longrightarrow \vartheta = \frac{2}{\bar{x}_n}.$
   $\frac{\partial^2 l}{\partial\vartheta^2} = -\frac{2n}{\vartheta^2} - \frac{1}{(1-\vartheta)^2}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i-2n\right) < 0 \Longrightarrow$ maximumhely!

3. Egy dobozban 3 piros, 3 fehér és 2 zöld színű golyó van. Találomra kiveszünk 2 golyót a dobozból. Jelölje X a pirosak, Y a fehérek számát a mintában. Mennyi $\mathrm{R}(X,Y)=$?
   Megoldás: $\mathrm{R}(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}$, ahol $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbf{E}(X\cdot Y) - \mathbf{E}X\cdot\mathbf{E}Y$.
   Az együttes eloszlástáblázat:

Y/X	0	1	2	Y perem	
0	2/56	12/56	6/56	20/56	
1	12/56	18/56	0	30/56	
2	6/56	0	0	6/56	
X perem	20/56	30/56	6/56		

$\mathbf{E}X = \mathbf{E}Y = 1 \cdot \frac{30}{56} + 2 \cdot \frac{6}{56} = \frac{3}{4}$

$\mathbf{E}X^2 = \mathbf{E}Y^2 = 1 \cdot \frac{30}{56} + 4 \cdot \frac{6}{56} = \frac{27}{28}$, $\sigma^2 X = \sigma^2 Y = \frac{54}{56} - \frac{3^2}{4^2}$

$\mathbf{E}XY = 1 \cdot \frac{18}{56}$, $\mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{18}{56} - \frac{3^2}{4^2}. \Longrightarrow \mathrm{R}(X,Y) = -\frac{216}{360} = -0,6$

4. Legyenek X és Y normális eloszlású változók, ahol $\mathbf{E}X = \mathbf{E}Y = 1$ és $\boldsymbol{\sigma}X = \boldsymbol{\sigma}Y = 2$, továbbá $\mathrm{R}\,(X,Y) = -\frac{1}{2}$. Adja meg Y-nak az X-re vett feltételes várhatóértékét! Mennyivel egyenlő $\sigma^2\,(3X + 4Y - 1) =$?
   Megoldás: A tanultak alapján $\mathbf{E}(Y|X) = aX + b$, ahol $a = \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\,\mathrm{R}(X,Y)$ és $b = \mathbf{E}Y - a\mathbf{E}X$, vagyis $\mathbf{E}(Y|X) = -\frac{1}{2}X + \frac{3}{2}$.

   $\boldsymbol{\sigma}^2(3X + 4Y - 1) = 9\sigma^2 X + 16\sigma^2 Y + 2\,\mathrm{cov}\,(3X, 4Y) = 100 - 48 = 52.$

5. Legyen $X \in U\,(0,4)$ és $Z = (X-2)^2$. Bizonyítsa be, hogy $\mathbf{P}\,(Z \geq 6) \leq \frac{2}{9}$!
   Megoldás:

   $\mathbf{P}((X-2)^2 \geq 6) = \mathbf{P}(|X-2| \geq \sqrt{6}) \leq \frac{\sigma^2 X}{6} = \frac{\frac{16}{12}}{6} = \frac{2}{9}$, ahol a Csebisev-egyenlőtlenséget használtuk.

6. Adja meg az eloszlásfüggvény definícióját és meghatározó tulajdonságait!
   Megoldás: $F_X(x) = \mathbf{P}(X < x) = \mathbf{P}(\{\omega : X(\omega)\} < x)$, $x \in \mathbf{R}$ függvény az X valószínűségi változó eloszlásfüggvénye. Tulajdonságok:

   (a) F_X monoton nemcsökkenő: $F_X(x) \leq F_X(y)$, ha $x < y$.

   (b) F_X balról folytonos: $\lim_{x \to y-} F_X(x) = F_X(y)$ minden $y \in \mathbf{R}$-re.

   (c) $\lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$, $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$.