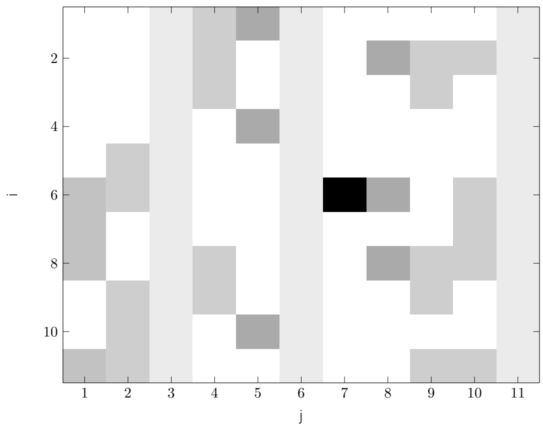
Haladó lineáris algebra

NEGYEDIK HÁZI FELADAT

1. Generáljunk számítógéppel (Octave, Matlab, Sage, Mathematica, Maple) egy **n**$\times$**n**-es **A** mátrixot, mely a fenti definíciónak megfelel, **n** > 10, és a képzeletbeli dokumentumokban $0-5$ link van (de legalább egyben 0).

Az 1. ábrán látható a MATLAB-bal generált áttérésmátrix szürkeárnyalatos képe.



1. Ábra – *A MATLAB-bal generált áttérésmátrix* ***n*****=*****11****-re*

Továbbá a használt parancsok az alábbiak voltak.

```
%%-- Az egyes dokumentumok
k = randi([0 5],1,n); A = zeros(n);

%%-- Kiosszuk a dokumentumok kozott a hivatkozasokat
for i = 1:length(k)
    %%-- Veletlenul sorsolunk a linkek szamanak megfelelot
    temp = randperm(n,k(i))';
    K{i} = temp;
end

%%-- Ahol nulla dokumentum van
for i = 1:length(k)
    for j = 1:length(k)
        if(k(j) == 0)
            A(i,j) = 1/n;
        end
    end
end

%%-- Ahol nem
for i=1:n
    for j=1:length(K{i})
        A(K{i}(j),i) = 1/length(K{i});
    end
end

%%-- Szurkearnyalatos kepet keszitunk a matrixbol
B = mat2gray(A);
figure(1);

%%-- mat2gray(.) feketehez 0-t rendel, ezert ezt atalakitjuk 1-re
imagesc(abs( ones(size(B)) -B));
colormap(gray);    xlabel('j');    ylabel('i');
```

2. Képezzük a fentiek alapján az **M** mátrixot, és határozzuk meg az 1-hez tartozó sajátvektorok közül azt a **w** vektort, amelyben a koordináták összege 1. Generáljunk 10 véletlen **v** eloszlásvektort, majd határozzuk meg mindegyikhez azt a legkisebb **k** számot, melyre $\mathbf{M^k v} - \mathbf{w}$ legnagyobb abszolút értékű koordinátája kisebb az $\frac{1}{n}10^{-2}$ számnál. Írjuk ki a **k** e 10 értéket!

A feladat első részéhez az alábbi lineáris egyenletrendszert kell megoldani

$$\mathbf{Mw} = 1\mathbf{w} \rightsquigarrow (\mathbf{M} - \mathbf{I_n})\mathbf{w} = \mathbf{0},$$

ahol $1 = \lambda_1$ az **M** mátrix egy sajátértéke és a **w** a hozzá tartozó jobboldali sajátvektor. A megoldásához az alábbi MATLAB parancsokat adtam ki.

```
%%-- A egy nullter ortonormalt bazisat adja meg es ez a sajatvektor
w = null(M-eye(n));

%%-- Leosszuk a koordinatak osszegevel, hogy egy valoszinusegi eloszlasvektort kapjunk
w = w/sum(w);
```

Az így kapott eloszlásvektor

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0{,}0671 & 0{,}1136 & 0{,}0644 & 0{,}0573 & 0{,}0597 & 0{,}1808 & 0{,}0677 & 0{,}1279 & 0{,}0837 & 0{,}0766 & 0{,}1012 \end{bmatrix},$$

ahol balról jobbra rendre az egyes dokumentumokhoz tartozó valószínűségeket kaptam.

A feladat következő részében 10 darab véletlen **v** eloszlásvektorból kellett kiindulnom és megvizsgálnom, hogy hányadik ütemre (mátrixhatványra) lesz az adott eloszlás és a fent kiszámolt eloszlás **w** eltérése egy adott számnál kisebb. A véletlen eloszlásvektorokat és a hatványkitevőket az alábbi parancsok segítségével határoztam meg.

```
%%-- Kerjunk 10 db veletlen eloszlasvektort
for i = 1:10
    tmp     =   rand(n,1)    ;
    VV{i}   =   tmp/sum(tmp);
end

%%-- Es mindegyikhez szamoljuk ki a hatvanykitevoket az eps-nak megfeleloen
for i = 1:10
    k{i}        = 1;
    diff_vector = (M)^(k{i})   * VV{i} - w;
    diff        = max(abs(diff_vector)) ;
    while(diff  >   eps)
        k{i}        = k{i} + 1;
        diff_vector = (M)^(k{i})   * VV{i} - w;
        diff        = max(abs(diff_vector))   ;
    end
end
```

Az így kapott hatványértékek

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 2 & 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

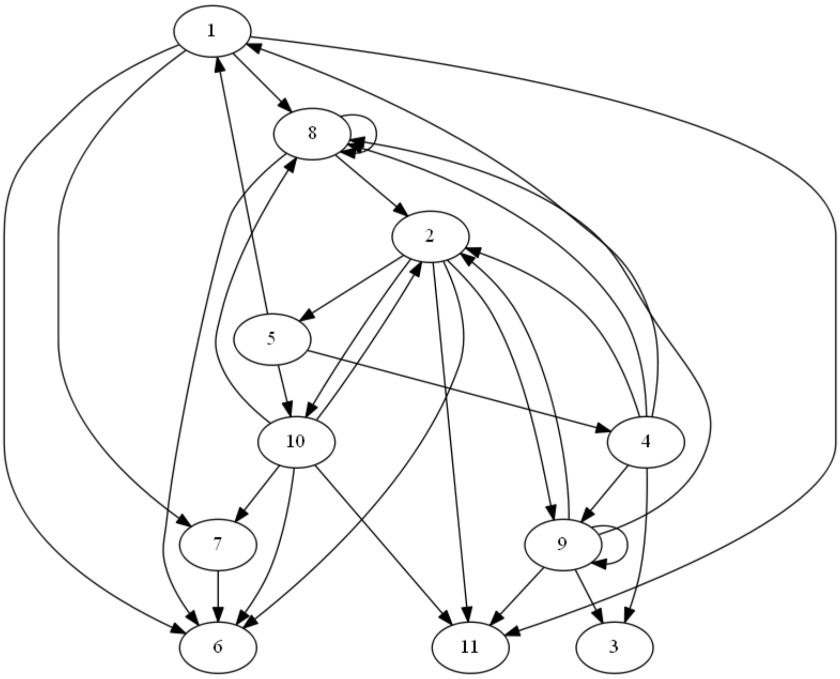
3. Határozzuk meg az előzők alapján a dokumentumok fontossági sorrendjét és írjuk ki.

A dokumentumok fontossági sorrendjét a **w** stacioner eloszlásvektorban szereplő valószínűségek alapján lehet meghatározni. Egyszerűen sorba kell őket rendezni csökkenő sorrendben és ekkor az első helyen szereplő dokumentum lesz a legfontosabb, stb.

```
%%-- A fontossagi sorrend meghatarozasa
[ranks,ind] = sort(w,'descend');
```

w_i	0,1808	0,1279	0,1136	0,1012	0,0837	0,0766	0,0677	0,0671	0,0644	0,0597	0,0573
dokumentum	6	8	2	11	9	10	7	1	3	5	4

4.1. Rajzoljuk ki az **A** mátrixhoz tartozó dokumentumok linkjeinek irányított gráfját (azaz az **i**-edik csúcsból menjen él a **j**-edikbe, ha az **i**-edik dokumentum hivatkozik a **j**-edikre). E gráfnak tehát 10-nél több csúcsa van, de minden csúcs kifoka legföljebb 5.



2. Ábra – *Az áttérésmátrix irányított gráfja*

Észrevehető, hogy a gráf jól tükrözi a 3. feladatban kiszámított fontossági sorrendet, hiszen ha közelebbről megnézzük, akkor pld. a 6-os dokumentumnak megfelelő csúcsba csak érkezni lehet, onnét kijönni nem tudunk.

4.2. Igazoljuk, hogy minden olyan **v** vektorra, mely valószínűségeloszlás, az **Mv** is valószínűségeloszlás, és hogy az **M** mátrixnak az 1 sajátértéke.

Írjuk fel az **Mv** szorzatot

$$\mathbf{Mv} = (1-d)\mathbf{Av} + \frac{d}{n}\mathbf{Jv}.$$

Ebből a második tag

$$\frac{d}{n}\mathbf{Jv} = \begin{bmatrix} d/n & \dots & d/n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d/n & \dots & d/n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n v_i \frac{d}{n} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n v_i \frac{d}{n} \end{bmatrix}$$

illetve az első tag

$$(1-d) \begin{bmatrix} | & \dots & | \\ \mathbf{a_1} & \dots & \mathbf{a_n} \\ | & \dots & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-d)\sum_{i=1}^n a_{1i}v_i \\ \vdots \\ (1-d)\sum_{i=1}^n a_{ni}v_i \end{bmatrix},$$

ahol az **A** mátrix oszlopairól tudjuk, hogy eloszlásvektorok, hiszen azokat épp úgy töltöttük fel, hogy a koordináták összege 1 legyen.

Ezek alapján írjuk fel a mátrixszorzatot

$$\mathbf{Mv} = \begin{bmatrix} (1-d)\sum_{i=1}^{n} a_{1i}v_i + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{d}{n} \\ \vdots \\ (1-d)\sum_{i=1}^{n} a_{ni}v_i + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{d}{n} \end{bmatrix} = \mathbf{b},$$

ahol a szorzás eredményül kapjuk a **b** vektort. Erről kell megmutatni, hogy eloszlásvektor, azaz a koordinátáik összege 1. Tehát vegyük a rendezők összegét

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n}\left[(1-d)\sum_{i=1}^{n} a_{ji}v_i + \sum_{i=1}^{n} v_i\frac{d}{n}\right] = (1-d)\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ji}v_i + \frac{d}{n}\sum_{j=1}^{n}\underbrace{\sum_{i=1}^{n} v_i}_{=1} = \\
=&(1-d)\left[\sum_{j=1}^{n} a_{j1}v_1 + \ldots + \sum_{j=1}^{n} a_{jn}v_n\right] + \frac{d}{n}\sum_{j=1}^{n} 1 = (1-d)\left[v_1\underbrace{\sum_{j=1}^{n} a_{j1}}_{=1} + \ldots + v_n\underbrace{\sum_{j=1}^{n} a_{jn}}_{=1}\right] = \\
=&(1-d)\Big[v_1 + \ldots + v_n\Big] + d = 1. \quad \checkmark
\end{aligned}$$

Azt, hogy az **M** mátrixnak az 1 sajátértéke, azt már a 2. feladatban igazoltam, hiszen találtam hozzá nem zérus sajátvektort, amely a **w** stacioner eloszlás volt.